应用数学和力学,第 27 卷 第 8 期
2006 年 8 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 8, Aug. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 08_0963_08

向量拟平衡问题系统及其应用*

彭建文[1,2], 杨新民[1], 朱道立[2]

(1. 重庆师范大学 数学系, 重庆 400047;
2. 复旦大学 管理学院, 上海 200433)

(张石生推荐)

摘要: 引入了向量拟平衡问题系统并证明了其解的存在性定理• 作为应用, 还得到约束多目标对策和无约束多目标对策弱 Pareto 平衡的一些存在性结果•

关 键 词: 存在性; 向量拟平衡问题系统; 多目标对策; 弱 Pareto 平衡; C_上半连续

中图分类号: O255; O177. 92 文献标识码: A

1 引言和预备知识

首先, 我们引入一类新型的向量拟平衡问题系统即定义在乘积集上的一簇向量值拟平衡问题• 设 I 为一指标集, 对每一 $i \in I$, E_i 为一Hausdorff 拓扑线性空间, $X_i \subset E_i$ 为非空凸子集• 设

$$X = \prod_{i \in I} X_i,\ K = \prod_{i \in I} K_i \bullet$$

用 x^i 表示集合 $X^i = \prod_{j \in I \setminus i} X_j$ 的元素, 所以, $x \in X$ 可写为 $x = (x^i, x_i) \in X^i \times X_i$•

对每一 $i \in I$, 设 Y_i 为一Hausdorff 拓扑线性空间, C_i 是 Y_i 的点闭凸锥, 且 $\operatorname{int} C_i \neq \varnothing$, 其中 $\operatorname{int} C_i$ 表示 C_i 的内部, 设 $\varphi_i: X \times X_i \to Y_i$ 为向量值映射, $A_i: X \to 2^{X_i}$ 为集值映射, 则向量拟平衡问题系统(简写为, SVQEP) 是找一点 $x \in X$, 使得对每一 $i \in I$, $x_i \in A_i(x)$, 且 $\varphi_i(x, y_i) \notin -\operatorname{int} C_i$, $\forall y_i \in A_i(x)$•

对每一 $i \in I$, 若 $Y_i = \mathbb{R}$, $C_i = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0\}$, 并且 $\varphi_i: X \times X_i \to \mathbb{R}$ 是数量函数, 则(SVQEP) 退化为文献[1, p. 286] 的广义对策模型和文献[2, p. p. 152—153] 的拟变分不等式•

对每一 $i \in I$, 若 $Y_i = Y$, $C_i = C$, φ_i 为 $X \times X_i$ 到 Y 的向量值映射且对所有 $x \in X$, $A_i(x) = X_i$, 则(SVQEP) 退化为文献[3] 中的向量平衡问题系统•

定义 1.1 设 $i \in I$, $C_i \subset Y_i$ 是凸锥且 $\operatorname{int} C_i \neq \varnothing$, 称映射 $\varphi: X \times X_i \to Y_i$ 是 C_i_0_偏对角拟凸的, 若对任何有限集 $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n}\} \in X_i$, 和任何 $x = (x^i, x_i) \in X$ 满足 $x_i \in \mathrm{co}\{y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n}\}$, 都存在某个 $j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 $\varphi(x, y_{i_j}) \notin -\operatorname{int} C_i$•

* 收稿日期: 2003_06_27; 修订日期: 2005_12_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171118; 70432001); 重庆市教委应用基础研究基金资助项目(030801); 重庆市自然科学基金资助项目(8409); 中国博士后基金资助项目
作者简介: 彭建文(1967—), 男, 四川仁寿人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_23_65362798; E_mail: jwpeng6@yahoo.com.cn)•

注 1.1 若 $Y_i = R$ 且 $Y_i = \{y \in R : y \geqslant 0\}$, 则 C_i_0_偏对角拟凸退化为文献[4] 中的定义 3, 进一步, 令 $I = \{1\}$, 则文献[4] 中的定义 3 退化为文献[5] 和[6] 中的 γ_对角凸, 这里 $\gamma = 0$•

作为(SVQEP) 的特殊情形, 我们考虑约束多目标对策 $\Gamma = (I, \{X_i\}, \{A_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$• 这里, I 为无限个局中人的集合; 对每一 $i \in I$, X_i 是第 i 个局中人的策略集; $A_i: X \to 2^{X_i}$ 是约束集值映射, 向量值映射 $F_i: X \to Y_i$ 是第 i 个局中人的支付函数(或损失函数, 或准则), 其中 Y_i 是实拓扑线性空间, 且具有由点闭凸锥 $C_i(\operatorname{int} C_i \neq \varnothing)$ 诱导的偏序•

定义 1.2 称向量 $x \in X$ 是约束多目标对策 $\Gamma = (I, \{X_i\}, \{A_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$ 的弱 Pareto 平衡, 如果对每一 $i \in I$,

$$x_i \in A_i(x), \ F_i(x) - F_i(x^i, y_i) \notin -\operatorname{int} C_i, \qquad \forall y_i \in A_i(x)•$$

若 $I = N$ 为有限个局中人的集合, $Y_i = R$, 设 $X^i = \prod_{j \in N, j \neq i} X_j$, 且 $X = \prod_{j \in N} X_j = X^i \times X_i$• 对每一 $i \in N$, 若用一实值函数 $U_i: \prod_{j \in N} X_j \to R$ 代替 F_i, 则约束多目标对策退化为文献[7, p. 345] 中的抽象经济 $\Gamma = (\{X_i\}, \{A_i\}, \{U_i\})_{i \in N}$(注: 在文献[8, p. 145] 中也称为广义 N_人对策)• 称 $x \in X$ 为 Γ 的平衡点, 如果对每一局中人 $i \in N$, $x_i \in A_i(x)$ 且 $U_i(x^i, x_i) \geqslant U_i(x^i, y_i)$, $\forall y_i \in A_i(x)$• 注意这一抽象经济模型是文献[9] 中模型的变形, 且约束多目标对策是文献[10] 中模型的变形• 对这一抽象经济模型平衡点的存在性, 已有一个重要结果(见[8, p. 145, 定理 5.2.5]) 为:

定理 A 假设抽象经济 $\Gamma = (\{X_i\}, \{A_i\}, \{U_i\})_{i \in N}$ 满足下列条件:

(i) 对每一 $i \in N$, $X_i \subset R^i$ 是非空凸集和紧集;

(ii) 对每一 $i \in N$, 集值映射 $A_i: X \to 2^{X_i}$ 是非空闭凸值的和连续的;

(iii) 对每一 $i \in N$, $U_i: X \to R$ 连续, 且对所有 $x^i \in X^i$, $U_i(x^i, \cdot)$ 是拟凹的•

则 Γ 至少存在一平衡点•

定理 A 是文献[11] 中的 Nash 均衡定理的推广•

对每一 $i \in I$ 和对所有 $x \in X$, 若 $A_i(x) = X_i$, 则约束多目标对策退化为无约束多目标对策 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$•

若 I 是有限集, 且对每一 $i \in I$, $Y_i = R^{k_i}$ 和 $C_i = R^{k_i}_+$, 则无约束多目标对策 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$ 退化为一些作者讨论过的多目标对策模型(见文献[12~15] 及其中的参考文献)•

定义 1.3 称向量 $x \in X$ 为无约束多目标对策 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$ 的弱 Pareto 平衡, 如果对每一 $i \in I$,

$$x_i \in X_i, \ F_i(x) - F_i(x^i, y_i) \notin -\operatorname{int} C_i, \qquad \forall y_i \in X_i•$$

定义 1.4[3, 16, 17] 设 M 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, Y 是一拓扑向量空间且有序锥 C• 称向量值映射 $\Phi: M \to Y$ 是 C_拟凸的, 如果对所有 $z \in Y$, 集合 $\{x \in M: \Phi(x) \in z - C\}$ 是凸集• 称 $\Phi: M \to Y$ 是 C_拟凹的, 如果 $-\Phi$ 是 C_拟凸的•

引理 1.1 设 $\Phi: M \to Y$ 是 C_拟凸的, 则 $\forall z \in Y$, $\Phi^{-1}(z - \operatorname{int} C) = \{x \in X: \Phi(x) \in z - \operatorname{int} C\}$ 是凸集•

证明 任取 $x_1, x_2 \in \Phi^{-1}(z - \operatorname{int} C)$• 则, $x_1, x_2 \in M$, 且 $\Phi(x_1) \in z - \operatorname{int} C$, $\Phi(x_2) \in z - \operatorname{int} C$• 取 $z_0 \in -\operatorname{int} C$, 存在 $\alpha \in (0, 1)$ 趋于 0, 使得 $c = \alpha \cdot z_0 \in -\operatorname{int} C$ 且 $\Phi(x_i) - c - z$

$\in - C, i = 1, 2$. 所以

$$x_1, x_2 \in \Phi^{-1}(z + c - C).$$

由于 Φ 是 C_拟凸的, $\forall \lambda \in (0, 1)$,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Phi^{-1}(z + c - C).$$

由于 $c - C \subset - \operatorname{int} C$, 我们有:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Phi^{-1}(z - \operatorname{int} C).$$

定义 1.5[18] 设 X 是一拓扑线性空间, Y 是一实拓扑空间且有序锥 C. 我们称向量值映射 $\Phi: X \to Y$ 在 X 上是 C_下半连续的, 如果对任意 $y \in Y$, 集合 $\{x \in X: \Phi(x) \in y + \operatorname{int} C\}$ 是开集.

称 $\Phi: X \to Y$ 在 X 上是 C_上半连续的, 如果 $-\Phi$ 在 X 上是 C_下半连续的, 即对任意 $y \in Y$, $\{x \in X: \Phi(x) \in y - \operatorname{int} C\}$ 是开集.

注 1.2 若 $\Phi: X \to Y$ 是连续的, 则 Φ 既是 C_上半连续又是 C_下半连续的.

类似于文献[18]的定理 2.1, 我们有:

引理 1.2 若 f 及 g 在 X 上是 C_上半连续的, 则 $f + g$ 在 X 上也是 C_上半连续的.

定义 1.6[19] 设 X、Y 是二拓扑空间. 称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 是下半连续的, 如果对 Y 中的任意开集 V, $\{x \in X: T(x) \cap V \neq \varnothing\}$ 是 X 中的开集. 称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 是上半连续的, 如果对 Y 中的任意开集 V, $\{x \in X: T(x) \subset V\}$ 是 X 中的开集. 称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 具有开下截口, 如果对任意 $y \in Y$, $T^{-1}(y) = \{x \in X: y \in T(x)\}$ 是 X 中的开集.

在本文的第 2 节, 我们证明了向量拟平衡问题系统解的一些存在性结果. 作为应用, 在本文的第 3 节, 我们也得到了约束多目标对策和无约束多目标对策弱 Pareto 平衡的一些存在性结果.

2 向量似平衡问题系统的存在性

我们用 co$A$ 表示集合 A 的凸包.

定理 2.1 设指标集 I 是可数集, 每一 $i \in I$, Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间, C_i 是 Y_i 中的点闭凸锥, 且 $\operatorname{int} C_i \neq \varnothing$, X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 中的非空紧凸可度量化子集, $A_i: X \to 2^{X_i}$ 是集值映射, φ_i 是从 $X \times X_i$ 到 Y_i 的映射. 假若下列条件成立

(i) 对每一 $i \in I$, $\varphi_i(x, y_i)$ 是 C_i_0_偏对角拟凸的;

(ii) 对每一 $i \in I$, 对所有 $y_i \in X_i$, $x \mapsto \varphi_i(x, y_i)$ 在 X 上是 C_i_上半连续的;

(iii) 对每一 $i \in I$, A_i 是上半连续的且是非空闭凸值的和有开下截口.

则存在 $x \in X$, 使得对每一 $i \in I$, $x_i \in A_i(x)$, 且 $\varphi_i(x, y_i) \notin - \operatorname{int} C_i$, $\forall y_i \in A_i(x)$.

证明 对每一 $i \in I$, 定义集值映射 $P_i: X \to 2^{X_i}$ 为

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i: \varphi_i(x, y_i) \in - \operatorname{int} C_i\}, \qquad \forall x = (x^i, x_i) \in X.$$

由假设(i), 我们可证, 对每一 $i \in I$ 和对所有 $x \in X$, $x_i \notin \operatorname{co}(P_i(x))$. 用反证法. 假设存在 $i \in I$ 和点 $x = (x^i, x_i) \in X$ 和 $y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n} \in X_i$, 使得 $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{i_j}$(其中 $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$), 对所有 $j = 1, 2, \cdots, n$, $y_{i_j} \in P_i(x)$. 即对 $j = 1, 2, \cdots, n$, 均有 $\varphi_i(x, y_{i_j}) \in - \operatorname{int} C_i(x_i)$, 与假设 $\varphi_i(x, z_i)$ 是 C_i_0_偏对角拟凸矛盾.

由假设(ii), 可知对每一 $i \in I$ 和所有 $y_i \in X_i$, $P_i^{-1}(y_i) = \{x \in X: \varphi_i(x, y_i) \in - \operatorname{int} C_i\}$ 是

开集, 即 P_i 有开下截口•

对每一 $i \in I$, 定义另一集值映射 $G_i: X \to 2^{X_i}$ 为 $G_i(x) = A_i(x) \cap \mathrm{co}(P_i(x))$, $\forall x \in X$• 令 $W_i = \{x \in X : G_i(x) \neq \varnothing\}$• 由于 A_i 及 P_i 在 X 中有开下截口, 由文献[20] 中的引理 5 和引理 4, 可知 $\mathrm{co}P_i$ 和 G_i 也在 X 中有开下截口• 所以, $W_i = \bigcup_{y_i \in X_i} G_i^{-1}(y_i)$ 是 X 中的开集• 所以集值映射 $G_i|_{W_i}: W_i \to 2^{X_i}$ 在 W_i 中有开下截口, 且对所有 $x \in W_i$, $G_i(x)$ 是非空凸集• 又由文献[21, p. 50] 知 X 是度量空间, 由文献[22, p. 831] 知 W_i 是仿紧的• 所以由文献[20] 的引理 6, 存在连续函数 $f_i: W_i \to X_i$ 使得对所有 $x \in W_i, f_i(x) \in G_i(x) \subset A_i(x)$• 定义集值映射 $T_i: X \to 2^{X_i}$ 为

$$T_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{当 } x \in W_i, \\ A_i(x), & \text{当 } x \notin W_i. \end{cases}$$

我们可以证明 T_i 是上半连续的• 事实上, 对 X_i 中的任意开集 V_i,

$$\{x \in X : T_i(x) \subset V_i\} = \{x \in W_i : f_i(x) \in V_i\} \cup \{x \in X \setminus W_i : A_i(x) \subset V_i\} \subset \{x \in W_i : f_i(x) \in V_i\} \cup \{x \in X : A_i(x) \subset V_i\}.$$

另一方面, 当 $x \in W_i$, 若 $f_i(x) \in V_i$, 则 $T_i(x) = f_i(x) \in V_i$• 当 $x \in X$ 且 $A_i(x) \subset V_i$, 若 $x \in W_i$, 则 $f_i(x) \in A_i(x)$, 可知 $T_i(x) \subset V_i$, 所以

$$\{x \in W_i : f_i(x) \in V_i\} \cup \{x \in X : A_i(x) \subset V_i\} \subset \{x \in X : T_i(x) \subset V_i\}.$$

因此,

$$\{x \in X : T_i(x) \subset V_i\} = \{x \in W_i : f_i(x) \in V_i\} \cup \{x \in X : A_i(x) \subset V_i\}.$$

由于 f_i 是连续的且 D_i 是上半连续的, 则集合 $\{x \in W_i : f_i(x) \in V_i\}$ 和 $\{x \in X : A_i(x) \subset V_i\}$ 是开集• 所以有 $\{x \in X : T_i(x) \subset V_i\}$ 是开集, 从而 $T_i : X \to 2^{X_i}$ 是上半连续的• 定义集值映射 $T: X \to 2^X$ 为 $T(x) = \prod_{i \in I} T_i(x)$, $\forall x \in X$• 由文献[23, p. 124] 的引理 3, T 是上半连续的• 因为对每一个 $x \in X$, $T(x)$ 是非空闭凸集, 由文献[23, p. 122] 的定理 1 知, 存在 $x \in X$ 使得 $x \in T(x)$• 注意对每一个 $i \in I$, $x \notin W_i$• 否则, 存在 $i \in I$ 使得 $x \in W_i$• 则 $x_i = f_i(x) \in \mathrm{co}(P_i(x))$, 这与对每一个 $i \in I$ 和所有 $x \in X$, $x_i \notin \mathrm{co}(P_i(x))$ 矛盾•

所以 $x_i \in A_i(x)$ 且对每一 $i \in I$, $G_i(x) = \varnothing$• 即, $x_i \in A_i(x)$ 且 $A_i(x) \cap \mathrm{co}(P_i(x)) = \varnothing$, 从而有: $x_i \in A_i(x)$ 且对每一 $i \in I, A_i(x) \cap P_i(x) = \varnothing$• 因此, 存在 $x \in X$, 使得对每一 $i \in I, x_i \in A_i(x)$, 且 $\varphi_i(x, y_i) \notin -\mathrm{int}C_i$, $\forall y_i \in A_i(x)$• 所以, Γ 至少有一弱 Pareto 平衡 $x \in X$•

对每一 $i \in I$, 和所有 $x \in X$, 令 $A_i(x) \equiv X_i$, 由定理 2.1, 我们有:

推论 2.2 设指标集 I 是可数集, 对每一 $i \in I$, Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间, C_i 是 Y_i 中的点闭凸锥, 且 $\mathrm{int}C_i \neq \varnothing$, X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 中的非空紧凸可度量化子集, φ_i 是从 $X \times X_i$ 到 Y_i 的映射• 假若下列条件成立:

(i) 对每一 $i \in I$, $\varphi_i(x, y_i)$ 是 C_i_0_偏对角拟凸的;

(ii) 对每一 $i \in I$, 对所有 $y_i \in X_i$, $x \mapsto \varphi_i(x, y_i)$ 在 X 上是 C_i_上半连续的•

则存在 $x \in X$, 使得对每一 $i \in I, x_i \in X_i$, 且 $\varphi_i(x, y_i) \notin -\mathrm{int}C_i$, $\forall y_i \in X_i$•

注 2.1 若对每一 $i \in I$ 和对所有 $x \in X$, $\varphi_i(x, x_i) = 0$ 且映射 $y_i \mapsto \varphi_i(x, y_i)$ 是 C_i_拟凸的, 则 φ_i 必是 C_i_0_偏对角拟凸的(类似于定理 2.1 的证明过程中的相应部分)• 所以, 推论 2.2 用更具有广泛意义的凸性

和连续性推广了文献[3]中的定理2.1,从而定理2.1也是文献[3]中的定理2.1的推广。

3 多目标对策

作为定理2.1的应用,我们将得到约束多目标对策弱Pareto平衡的存在性定理如下:

定理3.1 设 $\Gamma=(I,\{X_i\},\{A_i\},\{F_i\},\{C_i\})_{i\in I}$ 是一约束多目标对策,其中 I 是可数的且对每一 $i\in I$, Y_i 是一实拓扑空间且有由点闭凸锥 $C_i(\mathrm{int}C_i\neq\varnothing)$ 诱导的偏序,X_i 是局部凸Hausdorff拓扑向量空间 E_i 中的非空紧凸可度量化子集,$A_i: X\to 2^{X_i}$ 是约束集值映射,且 $F_i: X\to Y_i$ 是第 i 个局中人的支付函数。假设下列条件成立:

(i) 对每一 $i\in I$,对所有 $x^i\in X^i$,映射 $y_i\mapsto F_i(x^i,y_i)$ 是 C_i_拟凹的;

(ii) 对每一 $i\in I$,对所有 $y_i\in X_i$, $x\mapsto F_i(x)-F_i(x^i,y_i)$ 在 X 上是 C_i_上半连续的;

(iii) 对每一 $i\in I$, A_i 是上半连续的且是非空闭凸值的和有开下截口。

则, Γ 至少存在一弱Pareto平衡 $x\in X$。

证明 对每一 $i\in I$,定义映射 $\varphi_i: X\times X_i\to Y_i$ 为

$$\varphi_i(x,y_i)=F_i(x)-F_i(x^i,y_i),\qquad \forall(x,y_i)\in X\times X_i.$$

可证对每一 $i\in I$, φ_i 是 C_i_0_偏对角拟凸的。事实上,由假设(i),由于对每一 $i\in I$,对所有 $x^i\in X^i$,映射 $y_i\mapsto -F_i(x^i,y_i)$ 是 C_i_拟凸的,由引理1.1,对任意 $z\in Y_i$,集合 $\{y_i\in X_i: -F_i(x^i,y_i)\in z-\mathrm{int}C_i\}$ 是凸集。所以,对所有 $x=(x^i,x_i)\in X$,取 $z=-F_i(x)$,可知对每一 $i\in I$,

$$\{y_i\in X_i: F_i(x)-F_i(x^i,y_i)\in-\mathrm{int}C_i\}=\{y_i\in X_i:\varphi_i(x,y_i)\in-\mathrm{int}C_i\}$$

是凸集。下证 $\varphi_i(x,y_i)=F_i(x)-F_i(x^i,y_i)$ 是 C_i_0_偏对角拟凸的。否则,存在有限集 $\{y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_n}\}\in X_i$ 和 $x=(x^i,x_i)\in X$ 满足 $x_i\in\mathrm{co}\{y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_n}\}$ 使得对所有 $j=1,2,\cdots,n$, $\varphi_i(x,y_{i_j})\in-\mathrm{int}C_i$ 均成立,即对所有 $j=1,2,\cdots,n$, $y_{i_j}\in\{y_i\in X_i:\varphi_i(x,y_i)\in-\mathrm{int}C_i\}$。由于 $\{y_i\in X_i:\varphi_i(x,y_i)\in-\mathrm{int}C_i\}$ 是凸集,知 $x_i\in\{y_i\in X_i:\varphi_i(x,y_i)\in-\mathrm{int}C_i\}$。所以 $\varphi_i(x,x_i)=F_i(x)-F_i(x^i,x_i)=0\in-\mathrm{int}C_i$,这是不可能成立的。所以,对每一 $i\in I$, $\varphi_i(x,y_i)=F_i(x)-F_i(x^i,y_i)$ 是 C_i_0_偏对角拟凸的。

由假设(ii),对每一 $i\in I$,对所有 $y_i\in X_i$, $\varphi_i(\cdot,y_i)$ 在 X 上是 C_i_上半连续的。所以,由定理2.1,可知结论成立。

由引理1.2和定理3.1,我们可得到如下结果:

推论3.2 如果将定理3.1条件(ii)替换为下列条件:

(ii(a)) 对每一 $i\in I$ 和所有 $y_i\in X_i$, $x^i\mapsto F_i(x^i,y_i)$ 在 X^i 是 C_i_下半连续的;

(ii(b)) 对每一 $i\in I$, $x\mapsto F_i(x)$ 在 X 上是 C_i_上半连续的。

则定理3.1的结论仍然成立,即约束多目标对策 Γ 至少有一弱Pareto平衡 $x\in X$。

由推论3.2及注1.1,我们有:

推论3.3 如果将定理3.1条件(ii)替换为下列条件:

(ii*) 对每一 $i\in I$, $x\mapsto F_i(x)$ 在 X 上是连续的。

则定理3.1的结论仍然成立,即约束多目标对策 Γ 至少有一弱Pareto平衡 $x\in X$。

由推论3.2,易得如下结果:

推论3.4 设 $\Gamma=(I,\{X_i\},\{A_i\},\{U_i\})_{i\in I}$ 是抽象经济,其中 I 是可数的,且对每一 $i\in$

I, X_i 是局部凸Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 中的非空紧凸可度量化子集, $A_i: X \to 2^{X_i}$ 约束集值映射, $U_i: X \to \mathbb{R}$ 是第 i 个局中人的支付函数. 假若下列条件成立:

(i) 对每一 $i \in I$ 和所有$x^i \in X^i$, $y_i \mapsto U_i(x^i, y_i)$ 是拟凹函数;

(ii) 对每一 $i \in I$, 对所有 $y_i \in X_i$, $x^i \mapsto U_i(x^i, y_i)$ 在 X^i 上是下半连续的;

(iii) 对每一 $i \in I$, $x \mapsto U_i(x)$ 在 X 上是上半连续的;

(iv) 对每一 $i \in I$, A_i 是上半连续的且是非空闭凸值的和有开下截口.

则 Γ 至少存在一平衡点$x \in X$. 即对每一 $i \in I$, $x_i \in A_i(x)$ 且 $U_i(x^i, x_i) \geqslant U_i(x^i, y_i)$, $\forall y_i \in A_i(x)$.

注 3.1 推论 3.4 将定理A 从有限个局中人推广到无限个局中人. 且定理 3.1, 推论 3.2 和推论 3.3 将定理A 从数量情形推广到向量情形.

若对每一 $i \in I$ 和对所有$x \in X$, $A_i(x) = X_i$ 都成立, 则由推论 3.2, 我们有如下无约束多目标的弱 Pareto 平衡存在性定理:

推论 3.5 设 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$ 是一无约束多目标对策, 其中 I 是可数的且对每一$i \in I$, Y_i 是一实拓扑空间且有由点闭凸锥 $C_i(\mathrm{int}\, C_i \neq \varnothing)$ 诱导的偏序, X_i 是局部凸Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 中的非空紧凸可度量化子集, $F_i: X \to Y_i$ 是第i 个局中人的支付函数. 假设下列条件成立:

(i) 对每一 $i \in I$, 对所有 $x^i \in X^i$, 映射 $y_i \mapsto F_i(x^i, y_i)$ 是 C_i_拟凹的;

(ii) 对每一 $i \in I$ 和所有$y_i \in X_i$, $x^i \mapsto F_i(x^i, y_i)$ 在 X^i 上是C_i_下半连续的;

(iii) 对每一 $i \in I$, $x \mapsto F_i(x)$ 在 X 上是C_i_上半连续的.

则, Σ 至少存在一弱 Pareto 平衡 $x \in X$.

若 X_i 不是紧集, 我们有:

定理 3.6 设 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{F_i\}, \{C_i\})_{i \in I}$ 是一无约束多目标对策, 其中 I 是可数的且对每一$i \in I$, Y_i 是一实拓扑空间且有由点闭凸锥 $C_i(\mathrm{int}\, C_i \neq \varnothing)$ 诱导的偏序, X_i 是局部凸Hausdorff 拓扑向量空间E_i 中的非空凸可度量化子集, $F_i: X \to Y_i$ 是第i 个局中人的支付函数. 假设下列条件成立:

(i) 对每一 $i \in I$, 对所有 $x^i \in X^i$, 映射 $y_i \mapsto F_i(x^i, y_i)$ 是 C_i_拟凹的;

(ii) 对每一 $i \in I$ 和所有$y_i \in X_i$, $x^i \mapsto F_i(x^i, y_i)$ 在 X^i 上是C_i_下半连续的;

(iii) 对每一 $i \in I$, $x \mapsto F_i(x)$ 在 X 上是C_i_上半连续的;

(iv) 对每一 $i \in I$, 存在一非空紧子集$A_i \subset X_i$ 和一个紧凸集$B_i \subset X_i$; 令 $A = \prod_{i \in I} A_i \subset X$ 和 $B = \prod_{i \in I} B_i \subset X$ 使得, 对所有 $x \in X \setminus A$, 存在 $y_i^* \in B_i$ 满足$F_i(x) - F_i(x^i, y_i^*) \in - \mathrm{int}\, C_i$.

则, Σ 至少存在一弱 Pareto 平衡 $x \in A$.

证明 对每一 $i \in I$, 设$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}$ 是X_i 的有限子集. 令 $Q_i = \mathrm{co}(B_i \cup \{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\})$. 则对每一 $i \in I$, Q_i 是紧凸集. 由推论 3.5, 存在 $x \in Q = \prod_{i \in I} Q_i$ 使得, 对每一 $i \in I$, $F_i(x) - F_i(x^i, y_i) \notin - \mathrm{int}\, C_i$, $\forall y_i \in Q_i$. 由 $B \subseteq Q$ 及假设(iv), 有$x \in A$. 特别地, 有 $x \in A$ 使得, 对每一 $i \in I$, $F_i(x) - F_i(x^i, y_{i_j}) \notin - \mathrm{int}\, C_i$, 对$j = 1, 2, \cdots, k$ 均成立. 由于A 是紧集, 由(ii)及(iii) 可知, 对每一 $i \in I$ 和对所有$y_i \in X_i$,

$$G(y_i) = \left\{ x \in A : F_i(x, y_i) \notin -\operatorname{int} C_i \right\}$$

是 A 的闭子集. 由于紧集 A 中的闭集簇 $\left\{ G(y_i) \right\}$ 的任意有限个闭子集的交集是非空集合, 因此对每一 $i \in I$, $\bigcap_{y_i \in X_i} G(y_i) \neq \varnothing$. 所以, 存在 $x \in A$ 使得, 对每一 $i \in I$,

$$x_i \in A_i,\ F_i(x) - F_i(x^i, y_i) \notin -\operatorname{int} C_i, \qquad \forall y_i \in X_i.$$

由定理 3.6, 我们有:

推论 3.7 设 $\Sigma = (I, \{X_i\}, \{U_i\})_{i \in I}$ 是一对策, 其中 I 是可数集, 且对每一 $i \in I$, X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 中的非空可度量化凸子集, $U_i: X \to \mathbb{R}$ 是第 i 个局中人的支付函数. 假设下列条件成立:

(i) 对每一 $i \in I$, 对所有 $x^i \in X^i$, 函数 $y_i \mapsto U_i(x^i, y_i)$ 是拟凹的;

(ii) 对每一 $i \in I$ 和所有 $y_i \in X_i$, $x^i \mapsto U_i(x^i, y_i)$ 在 X^i 上是下半连续的;

(iii) 对每一 $i \in I$, $x \mapsto U_i(x)$ 在 X 上是上半连续的;

(iv) 对每一 $i \in I$, 存在一非空紧子集 $A_i \subset X_i$ 和紧凸集 $B_i \subset X_i$; 令 $A = \prod_{i \in I} A_i \subset X$ 和 $B = \prod_{i \in I} B_i \subset X$ 使得, 对所有 $x \in X \setminus A$, 存在 $y_i^* \in B_i$ 满足 $U_i(x) < U_i(x^i, y_i^*)$.

则存在 $x = (x^i, x_i) \in A$, 使得对每一 $i \in I$, $x_i \in X_i$, $U_i(x) \geqslant U_i(x_i, y_i)$, $\forall y_i \in X_i$. 即 Σ 至少有一平衡点 $x = (x^i, x_i) \in A$.

注 3.2 推论 3.7 推广了文献[11] 中的 Nash 均衡(或文献[24, p.335] 的定理 13). 推论 3.5 和定理 3.6 推广了文献[12~15] 的结果.

[参 考 文 献]

[1] Ionescu Tulcea C. On the approximation of upper semi_continuous correspondences and the equilibriums of generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1988, **136**(1): 267—289.

[2] Yuan G X_Z, Isac G, Lai K K, et al. The study of minimax inequlities, abstract economics and applications to variational inequalities and Nash equilibria[J]. Acta Appl Math, 1998, **54**(1): 135—166.

[3] Ansari Q H, Schaible S, Yao J C. Systems of vector equilibrium problems and its applications[J]. J Optim Theory Appl, 2000, **107**(3): 547—557.

[4] 陈光亚, 于辉. 随机平衡系统解的存在性[J]. 系统科学与数学, 2002, **22**(3): 278—284.

[5] Zhou J X, Chen G. Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1988, **132**(1): 213—225.

[6] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991.

[7] Shafer W, Sonnenschein H. Equilibrium in abstract economies without ordered preferences[J]. J Math Econom, 1975, **2**(2): 345—348.

[8] 潘吉勋, 张顺明. 经济均衡的数学原理[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1997.

[9] Debreu G. A social equilibrium existence theorem[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1952, **38**(2): 386—393.

[10] Ding X P. Quasi_equilibrium problems with applications to infinite optimization and constrained games in general topological spaces[J]. Appl Math Lett, 2000, **13**(1): 21—26.

[11] Nash J F. Noncooperative games[J]. Ann Math, 1951, **54**(1): 286—295.

[12] Wang S Y. Existence of a Pareto equilibrium[J]. J Optim Theory Appl, 1993, **79**(2): 373—384.

[13] Wang S Y. An existence theorem of a Pareto equilibrium[J]. Appl Math Lett, 1991, **4**(1): 61—63.

[14] Yu J, Yuan G X_Z. The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan

minimax inequality methods[J]. Comput Math Appl, 1998, **35**(9): 17—24.

[15] Yuan X Z, Tarafdar E. Non_compact Pareto equilibria for multiobjective games[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(1): 156—163.

[16] Luc D T. Theory of Vector Optimization [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1989.

[17] Luc D T, Vargas C A. A saddle_point theorem for set_valued maps[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods, and Applications, 1992, **18**(1): 1—7.

[18] Tanaka T. Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points[J]. Appl Math Optim, 1997, **36**(3): 313—322.

[19] Nash J F. Equilibrium point in n_person games[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1950, **36**(1): 48—49.

[20] Tian G Q, Zhou J X. Quasi_variational inequalities without the concavity assumption[J]. J Math Anal Appl, 1993, **172**(1): 289—299.

[21] Kelley J, Namioka I. Linear Topological Space[M]. New York/Heidelberg/Berlin: Springer, 1963.

[22] Michael E. A note on paracompact spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, **4**(5): 831—838.

[23] Fan K. Fixed_point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1952, **38**(1): 121—126.

[24] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

System of Vector Quasi_Equilibrium Problems and Its Applications

PENG Jian_wen[1, 2], YANG Xin_min[1], ZHU Dao_li[2]

(1. Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, P. R. China;

2. School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: A new system of vector quasi_equilibrium problems was introduced and its existence of a solution was proved. As applications, some existence results of weak Pareto equilibrium for both constrained multicriteria games and multicriteria games without constrained correspondences were also shown.

Key words: existence; system of vector quasi_equilibrium problem; multicriteria game; weak Pareto equilibrium; C_upper semicontinuous