

塑性极限分析的不可微模型及其光滑化算法^{*}

李建宇¹, 潘少华², 李兴斯¹

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023;

2. 华南理工大学 应用数学系, 广州 510641)

(钟万勰推荐)

摘要: 藉助于凸规划的 Lagrange 对偶理论, 建立了 Mises 屈服条件下理想刚塑性材料 Hill 最大塑性功原理的对偶问题, 并据此建立了极限分析的一个不可微凸规划模型。该模型不仅避免了对屈服条件的线性化, 而且其离散化形式为线性约束下 Euclid 模之和的极小化问题。针对 Euclid 模的不可微性, 提出理想刚塑性体极限分析的一种光滑化算法。通过计算平面应力和平面应变问题的极限荷载因子和相应的坍塌机构, 验证了算法的有效性。

关键词: 塑性极限分析; 对偶; 不可微优化; 光滑化

中图分类号: O344.5; O221.2 **文献标识码:** A

引 言

极限分析上、下限定理的建立使得数学规划迅速成为研究和发展极限分析理论和算法的主要手段。线性规划在离散结构极限分析中的应用已经比较成熟, 如 Dom 等人将杆系结构的极限分析问题表述为线性规划模型^[1,2], 并利用线性规划对偶理论首次揭示刚架结构极限分析上、下限定理之间的对偶关系^[3]。而对于连续体的极限分析, 其上、下限定理对应为非线性规划, 直接求解都有困难: 对于下限分析, 屈服条件线性化后将导致大规模的问题, 特别是对于平面应变和三维问题, 导致了退化的线性规划模型; 而上限分析的非线性规划模型虽然避免了对屈服条件的线性化, 但其模型中的目标函数在最优解处不可微。因此, 优化算法的研究成为应用非线性规划法进行连续体极限分析的关键。已有的算法如 Overton 等人^[4]针对纵向剪切问题极限分析建立的 Newton 型算法, 张丕辛等人^[5]和 Liu 等人^[6]给出的一种无搜索数学规划算法, 以及最近 Andersen 等人^[7]提出的原对偶内点型算法。

本文利用凸规划对偶理论研究连续体上、下限分析非线性规划之间的对偶关系, 并给出极限分析的一个不可微凸规划模型, 其离散化形式对应于线性约束下 Euclid 模之和的极小化问题。针对导出的不可微凸规划模型, 采用文献[8, 9]提出的光滑化方法给出一致逼近 Euclid 模之和的光滑函数, 进而给出理想刚塑性体极限分析的一种新型光滑化算法。

* 收稿日期: 2005_02_16; 修订日期: 2006_03_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572031; 10332010)

作者简介: 李建宇(1978—), 男, 呼和浩特人, 博士研究生(Tel: + 86_411_84706349;

E_mail: jianyuli@student.dlut.edu.cn);

李兴斯(联系人, Tel: + 86_411_84706349; Fax: + 86_411_84708769; E_mail: lixs@dlut.edu.cn)。

1 极限分析的不可微凸规划模型

从数学规划的角度分析,在 Mises 屈服条件下,极限分析的上限定理与下限定理是互为对偶的,而上、下限定理之间的对偶关系实质上又体现为塑性理论中 Hill 最大塑性功原理及其对偶问题之间的关系。本节利用凸规划对偶理论来揭示这些对偶关系,并藉此导出极限分析的一个不可微凸规划模型。

1.1 Hill 最大塑性功原理的对偶问题

在 Mises 屈服条件下,刚塑性材料的 Hill 最大塑性功原理可表述为如下优化问题:

$$\max_{\sigma} \int_{\Omega} \sigma: \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega \quad \text{s. t. } f(\sigma) \leq 2\sigma_s^2, \quad (1)$$

其中 σ 为 Ω 内应力张量场, \mathbf{u} 为变形速度向量, ε 为应变速度张量, $f(\sigma) \leq 2\sigma_s^2$ 为屈服条件,常用的 Mises 屈服条件一般表述为:

$$f(\sigma) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \leq 2\sigma_s^2. \quad (2)$$

下面研究优化问题 (1) 的对偶问题。为了便于推导,将应力张量和应变速度张量表示为如下向量形式:

$$\sigma = \left\{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31} \right\}^T, \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \left\{ \varepsilon_{11}(\mathbf{u}), \varepsilon_{22}(\mathbf{u}), \varepsilon_{33}(\mathbf{u}), 2\varepsilon_{12}(\mathbf{u}), 2\varepsilon_{23}(\mathbf{u}), 2\varepsilon_{31}(\mathbf{u}) \right\}^T.$$

则 Mises 屈服条件等价于:

$$f(\sigma) = \|\mathbf{Q}\sigma\| \leq \sqrt{2}\sigma_s, \quad (3)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 模,矩阵 \mathbf{Q} 的形式依具体问题而定,如对平面应力和平面应变问题,分别有

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则优化问题 (1) 等价于:

$$\max_{\sigma} \int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega \quad \text{s. t. } \|\mathbf{Q}\sigma\| \leq \sqrt{2}\sigma_s. \quad (4)$$

考虑到 Mises 条件的凸性,问题 (1) 或 (4) 为一凸规划,并且 Slater 约束规范成立。根据凸规划强对偶定理有,

$$\max_{\sigma} \min_{\nu \geq 0} \int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nu (\|\mathbf{Q}\sigma\| - \sqrt{2}\sigma_s) d\Omega = \\ \min_{\nu \geq 0} \max_{\sigma} \int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nu (\|\mathbf{Q}\sigma\| - \sqrt{2}\sigma_s) d\Omega, \quad (5)$$

其中 ν 是不等式约束 $\|\mathbf{Q}\sigma\| \leq \sqrt{2}\sigma_s$ 的 Lagrange 乘子,力学含义为塑性乘子;左端的极小极大问题就是原问题 (4),而右端的极大极小问题为其对偶问题。对于式 (5) 右端的内层极大化问题,有

$$\max_{\sigma} \int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nu (\|\mathbf{Q}\sigma\| - \sqrt{2}\sigma_s) d\Omega = \\ \max_{\sigma} \min_{\|\mathbf{y}\| \leq 1} \left[\int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nu (\mathbf{y}^T (\mathbf{Q}\sigma) - \sqrt{2}\sigma_s) d\Omega \right] = \\ \min_{\|\mathbf{y}\| \leq 1} \max_{\sigma} \left[\int_{\Omega} (\sigma)^T \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nu (\mathbf{y}^T (\mathbf{Q}\sigma) - \sqrt{2}\sigma_s) d\Omega \right] =$$

$$\min_{\|y\| \leq 1, \varepsilon(u) - vQ^T y = 0} \sqrt{2}\sigma_s \int_{\Omega} v d\Omega, \quad (6)$$

其中第 1 个等式源于 Cauchy-Schwarz 不等式, 而第 2 个等式由文献[10] 的推论 37.3.2 得到. 故问题(4) 的对偶规划为

$$\min_{y, v \geq 0} \sqrt{2}\sigma_s \int_{\Omega} v d\Omega, \quad \text{s. t. } \|y\| \leq 1, \varepsilon(u) - vQ^T y = 0. \quad (7)$$

进一步等价于

$$\min_x \sqrt{2}\sigma_s \int_{\Omega} \|x\| d\Omega, \quad \text{s. t. } Q^T x = \varepsilon(u). \quad (8)$$

对于给定的应变速度 ε , 若 Q 阵可逆(如平面应力问题), 则由 $x = Q^{-T} \varepsilon(u)$ 可唯一确定 x ; 若 Q 不可逆, 如对于平面应变问题, $x \in \mathcal{R}^2$, 而 $\varepsilon \in \mathcal{R}^3$, 等式约束 $Q^T x = \varepsilon(u)$ 是一个超定方程, 表达为:

$$x_1 = 2\varepsilon_{11}, \quad x_2 = -2\varepsilon_{22}, \quad x_3 = 2\varepsilon_{12}. \quad (9)$$

为了保证有解, 需要

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0, \quad (10)$$

这个条件就是不可压缩条件. 类似的情况也出现在三维刚塑性问题中. 从数学规划的角度分析, 原问题 Mises 屈服条件(2) 中的 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{33} 上可以施加任意大小的静水压力值而不违反屈服条件, 而反映到对偶问题(8) 中, 应力无界的对偶表现为变形速度的散度为零, 即不可压缩条件(10). 这就解释了为什么在 Mises 屈服条件下, 平面应变与三维刚塑性问题的应变速度需要满足不可压缩条件.

1.2 连续体上、下限分析中的对偶关系

根据极限分析的下限定理, 理想刚塑性体的极限荷载因子可由如下数学规划来确定:

$$\max_{\lambda} \lambda, \quad \text{s. t. } \begin{cases} -\dot{\sigma}^T \sigma = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \mathbf{n}^T \sigma = \mathbf{X}, & \text{在 } S_{\sigma} \subseteq \partial \Omega \text{ 上,} \\ f(\sigma) \leq 2\sigma_s^2. \end{cases} \quad (11)$$

式(11) 为对应下限定理的非线性规划问题, 其中 λ 表示极限荷载因子, T 为力边界 S_{σ} 上的已知外载, \mathbf{n} 为 S_{σ} 外法线方向. 不难看到, 问题(11) 也是一个凸规划. 下面建立其对偶问题. 为了便于表述, 这里不考虑体力的作用.

根据凸规划的对偶理论, 问题(11) 的对偶问题定义为

$$\min_u \max_{\lambda} \left\{ \lambda - \int_{\Omega} (\dot{\sigma}^T \sigma) \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{S_{\sigma}} (\mathbf{n}^T \sigma - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{u} dS \mid f(\sigma) \leq 2\sigma_s^2 \right\}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{u} 是对应式(11) 中平衡约束的 Lagrange 乘子, 其力学含义为虚变形速率^[11]. 将式(12) 中的极大极小问题进一步整理为

$$\min_u \Pi(\mathbf{u}) := \max_{\sigma} \left\{ \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega \mid f(\sigma) \leq 2\sigma_s^2 \right\}, \quad \text{s. t. } \begin{cases} \int_{S_{\sigma}} T \cdot \mathbf{u} dS = 1, \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = 0.5(\dot{\sigma} \mathbf{u} + \dot{\sigma}^T \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{在 } S_u \text{ 上.} \end{cases} \quad (13)$$

利用上一小节关于 Hill 最大塑性功原理对偶问题的讨论, 可给出极大极小问题(13) 中内层极大化问题的解析表达式, 从而导致:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \sqrt{2} \sigma_s \int_{\Omega} \|\mathbf{x}\| \, d\Omega, \quad \text{s. t.} \begin{cases} \int_{S_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \, dS = 1, \\ \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}, \\ \mathcal{E}(\mathbf{u}) = 0.5(\dot{\cdot} \mathbf{u} + \dot{\cdot} \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \end{cases} \quad (14)$$

式(14)就是对应上限定理的非线性规划模型。与文献[5, 6]中上限定理的非线性规划比较, 模型(14)中多出了一类变量 \mathbf{x} 和一组等式约束条件。由上一节分析, 对于平面应力问题和平面应变(或三维)问题, 变量 \mathbf{x} 可以按不同途径消去。因此, 式(14)是上限定理非线性规划模型的统一表述, 适用于任何连续体的极限分析。式(11)向式(14)的推导证明了两类非线性规划问题的对偶关系。

注意到, 问题(14)的目标函数为 Euclid 模的积分, 而约束条件为线性等式约束, 因此是一个凸规划。虽然该问题在形式上比较简单, 但有限元离散后, 极限状态下大量的单元处于刚性状态, 即目标函数中的 Euclid 模为零, 给问题的数值求解带来很大困难。在下一节里, 专门讨论此类问题的数值算法。

2 极限分析的光滑化算法

问题(14)离散化后的模型总可以表示为下述线性约束下的 Euclid 模之和的极小化问题:

$$\min F(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m \| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \|, \quad \text{s. t. } \mathbf{E}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{A}_i \in \mathcal{R}^{l \times l}$, $\mathbf{b}_i \in \mathcal{R}^l$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{E} \in \mathcal{R}^{k \times k}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^k$ 且 \mathbf{E} 为列满秩矩阵。

注意到, 在使 $\mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ 的点 \mathbf{x} 处 $F(\mathbf{x})$ 是不可微的, 为了克服该不可微性给数值求解带来的困难, 一种常见的方法是, 寻找 $F(\mathbf{x})$ 的光滑函数将其转化为一光滑优化问题来处理。

虽然通过在 $F(\mathbf{x})$ 中引入一个小参数 μ 即可给出其光滑形式 $\sum_{i=1}^m \sqrt{\| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \|^2 + \mu^2}$, 但直接利用此光滑形式并不能有效地得到问题(15)的满意解。这是因为, 如果在最优解 \mathbf{x}^* 处, 存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $\| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x}^* - \mathbf{b}_i \| = 0$, 则极小化此光滑函数时, $\| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \|^2$ 与 μ 将同步趋向于 0, 从而使相应的光滑化算法缓慢地收敛到最优解。

本文给出 $F(\mathbf{x})$ 的一种新的有效光滑形式。观察到 $F(\mathbf{x})$ 可以重新表述为

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \max(0, \| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \|),$$

因此, 利用文献[8, 9]中的光滑化方法, 便得到其一致光滑近似

$$F_{\mu}(\mathbf{x}) := \mu \sum_{i=1}^m \ln \left\{ 1 + \exp \left[\| \mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} \| / \mu \right] \right\}.$$

与 $\sum_{i=1}^m \sqrt{\| \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \|^2 + \mu^2}$ 相比, 此光滑函数中的指数函数使得 $\| \mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} \|^2$ 和 μ 不再具有相同的尺度化, 从而导致 Euclid 模 $\| \mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i^T \mathbf{x} \|^2$ 的下降不会过多地依赖于光滑参数 μ 的减小, 有助于得到问题(15)的高精度最优解。

利用光滑函数 $F_{\mu}(\mathbf{x})$, 不可微优化问题(15)的求解就可以转化为解光滑问题

$$\min F_{\mu}(\mathbf{x}) \quad \text{s. t. } \mathbf{E}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}. \quad (16)$$

本文采用增广 Lagrange 函数法来求解等式约束问题(16)。定义增广 Lagrange 函数

$$L_{\mu}(\mathbf{x}, \gamma, \alpha) := F_{\mu}(\mathbf{x}) - \gamma^T (\mathbf{E}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}) + (\alpha/2) \| \mathbf{E}^T \mathbf{x} - \mathbf{c} \|^2. \quad (17)$$

该方法通过求解如下序列无约束凸极小化问题来产生问题(16)的解:

$$\min_{x \in \mathcal{R}^n} L^k(x, \gamma^k, \alpha^k), \quad (18)$$

其中 $\{\alpha^k\}$ 是单调增加的罚参数序列, $\{\mu^k\}$ 是单调减少的光滑参数序列, 乘子 γ^k 在每完成一个极小化之后根据下述公式进行修正:

$$\gamma_i^{k+1} := \gamma_i^k - \alpha^k (E^T x^k - c), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

3 数值试验

用 MATLAB 编写的程序在 PC (Pentium 4 CPU 2.4GHz, DDR 内存 256MB) 上实现上述算法, 其中问题(18)的求解是通过强 Wolfe-Powell 线搜索的有限内存 BFGS 算法^[12]实现的, 并且当

$$\| \nabla_x L^k(x^k, \gamma^k, \alpha^k) \| \leq 1.0 \times 10^{-2}$$

时, 就终止当前迭代。

3.1 平面应力问题^[5]

对图 1 所示含缺陷的正方形平板在均匀拉伸荷载作用下的极限荷载因子和坍塌速度场进行计算。取 $a = 0.25, L = 2$ 。根据对称性, 只需计算四分之一部分。消去变量 x , 将 u 用三角形三节点单元离散化, 屈服应力取 1。

图 2~4 分别展示了网格尺寸 h 为 $1/16, 1/24$ 和 $1/32$ 时的坍塌示意图, 这些变形示意图是按极限状态下流动速度乘以时间常数 ($dt = 0.25$) 并与未变形时的节点坐标叠加后绘制的, 其中填充颜色的为塑性区域。极限状态下, 四分之一平板由一条狭长的塑性流动区和两块刚性区组成, 其中左下角的刚性区沿狭长塑性区颈缩。文献[5]中计算的极限荷载因子为 0.7891。

表 1 给出本文极限荷载因子的计算结果。

表 1 不同网格大小下的极限荷载因子

h^{-1}	4	8	12	16	20	24	28	32
λ^*	0.921 599	0.861 512	0.831 476	0.815 217	0.804 933	0.797 746	0.792 318	0.788 508

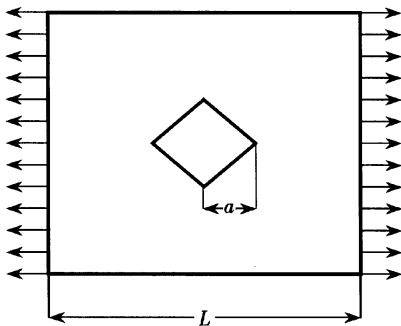


图 1 带缺陷的平板示意图

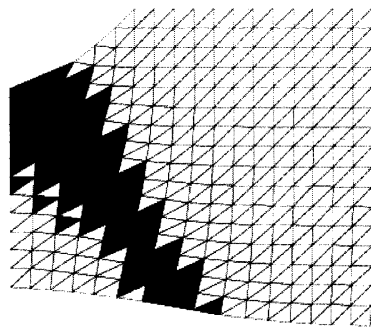


图 2 网格尺寸 h 为 $1/16$ 时坍塌状态

3.2 平面应变问题^[7, 13]

考虑图 5 所示的平面应变问题, 其含有深度为 $L - a$ 的对称无限窄切缝。由对称性, 只需计算四分之一部分。在实际计算时, 取屈服应力为 1, $L = 1, a = 1/3$ 。事先消去变量 x , 速度场 u 用矩形四节点单元离散。

图 6 展示了网格尺寸 h 为 $1/18$ 时的坍塌示意图, 该图是按极限状态下流动速度乘以常数 ($dt = 0.05$) 并与结构未变形时节点坐标叠加后绘制的, 其中填充颜色的部分为塑性区域。在极限状态下, 四分之一区域由一条狭长的塑性流动区和三块刚性区组成。表 2 给出极限荷载

因子的计算结果,同时列出了文献[13]中采用线性规划的单纯型法计算的结果和采用内点法^[7]计算的结果作为比较。

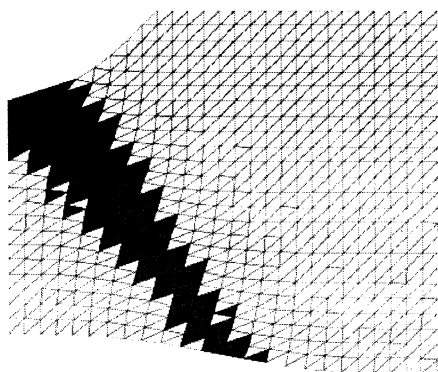


图3 网格尺寸 h 为 $1/24$ 时坍塌状态

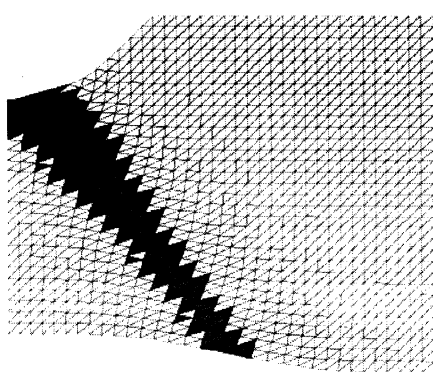


图4 网格尺寸 h 为 $1/32$ 时坍塌状态

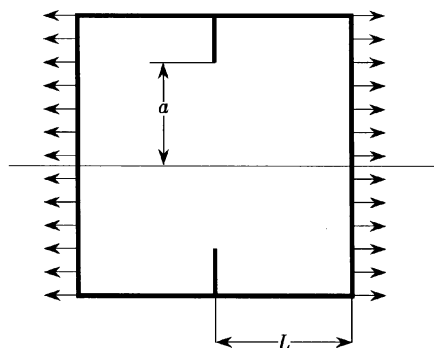


图5 平面应变问题示意图

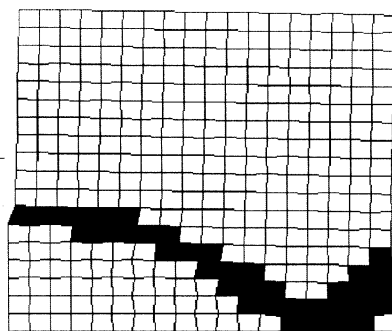


图6 网格尺寸 h 为 $1/18$ 时的坍塌示意图

表2

极限荷载因子 λ^*

h^{-1}	6	12	18
光滑化法	1.017	0.976	0.961
内点法 ^[7]	1.017	0.976	0.960
单纯型法 ^[13]	1.262	1.227	1.208

4 结束语

本文利用非线性规划的理论和算法研究了连续体的塑性极限分析。通过讨论 Hill 最大塑性功原理的对偶问题,证明了上、下限分析非线性规划模型之间的对偶关系,并给出了一个统一表述的极限分析非线性规划模型(14),该模型适用于包括平面应力、平面应变及三维问题等在内的理想刚塑性连续体的极限分析;所提出的非线性规划模型在形式上属于线性等式约束下的 Euclid 模之和的极小化问题,非常适合于数值计算;针对相应目标函数的不可微性,本文提出一个有效的、易为工程人员所接受和使用的光滑化算法。算例表明本文的模型和算法能够获得很好精度的极限荷载因子和符合力学直观的塑性流动场。

[参考文献]

[1] Dorn W S, Greenberg H J. Linear programming and plastic limit analysis of structures[J]. Quart Appl Math Soc, 1957, 15(1): 155-167.

- [2] Maier G, Munro J. Mathematical programming applications to engineering plastic analysis[J]. Applied Mechanics Reviews, 1982, **35**(12): 1631—1643.
- [3] Charnes A, Lemke C, Zienkiewicz O C. Virtual work, linear programming and plastic limit analysis [J]. Proceedings of the Royal Society, London, 1959, **251**(1): 110—116.
- [4] Overton M L. Numerical solution of a model problem from collapse load analysis[A]. In: Lions J L, Glowinski R, Eds. Computing Methods in Applied Sciences and Engineering VI [C]. Amsterdam: North_Holland, 1984, 421—437.
- [5] 张丕辛, 陆明万, 黄克智. 极限分析的无搜索数学规划算法[J]. 力学学报, 1991, **23**(4): 433—441.
- [6] Liu Y H, Cen Z Z, Xu B Y. A numerical method for plastic limit analysis of 3_D structures[J]. International J Solids Structures, 1995, **32**(12): 1645—1658.
- [7] Andersen E D, Christiansen E, Conn A R, et al. An efficient primal_dual interior_point method for minimizing a sum of Euclidean Norms[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, **22**(1): 243—262.
- [8] Li X S. An entropy_based aggregate method for minimax optimization[J]. Engineering Optimization, 1992, **18**(2): 277—285.
- [9] Chen C H, Mangasarian O L. Smoothing methods for convex linear inequalities and linear complementarity problems[J]. Mathematical Programming, 1995, **71**(1): 51—69.
- [10] Rockafellar R T. Convex Analysis [M]. Princeton N J: Princeton University Press, 1970, 392—393.
- [11] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 591—599.
- [12] Byrd R H, Lu P, Nocedal J, et al. A limited memory algorithm for bound constrained Optimization [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1995, **16**(5): 1190—1208.
- [13] Christiansen E. Computation of limit loads[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, **17**(10): 1547—1570.

Nonsmooth Model for Plastic Limit Analysis and Its Smoothing Algorithm

LI Jian_yu¹, PAN Shao_hua², LI Xing_si¹

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, South China University of Technology,
Guangzhou 510641, P. R. China)

Abstract: By means of Lagrange duality theory of the convex program, a dual problem of Hill's maximum plastic work principle under Mises' yielding condition was derived and whereby a non-differentiable convex optimization model for the limit analysis were developed. With this model, it is not necessary to linearize the yielding condition and its discrete form becomes a minimization problem of the sum of Euclidean norms subjected to linear constraints. Aimed at resolving the non-differentiability of Euclidean norms, a smoothing algorithm for the limit analysis of perfect plastic continuum media was proposed. Its efficiency was demonstrated by computing the limit load factor and the collapse state for some plane stress and plain strain problems.

Key words: plastic limit analysis; duality; non-smooth optimization; smoothing method