

基于参数变分原理的非均质材料弹塑性有限元分析的 Voronoi 单元法*

张洪武, 王 辉

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

(钟万勰推荐

摘要: 在非均质材料的有限元数值模拟中, 采用了 Voronoi 单元 (VCFEM) 以克服经典位移元的局限性。基于参数变分原理和二次规划法进行了 Voronoi 单元的二维弹塑性分析。推导了有限元列式并形成最终的二次规划求解模型。研究了非均质材料微观夹杂对整体力学性能的影响。数值算例证明了该方法的正确和可行性。

关键词: Voronoi 单元; 参数变分原理; 二次规划法

中图分类号: O344.3; O242.21 文献标识码: A

引 言

随着聚合物、陶瓷和金属基复合材料等一系列新材料在航空、汽车和核处理方面的广泛应用, 研究它们的力学性能和失效机理变得非常必要。不同的实验和数值模拟显示, 多相材料整体力学行为很大程度上受微观结构影响, 尤其是在其非均匀变形时。例如, Brockenbrough 等人^[1]模拟了任意夹杂分布的不连续强化材料。Christman 等人^[2]的研究表明聚合体能降低复合材料的流动应力和应变强化。

过去的几十年内, 在微观力学框架下建立了许多解析模型以描述小变形弹塑性情况下非均质材料的有效力学性能。大致可以分为以下几类: 基于变分原理的方法^[3], 基于统计学的方法^[4]以及自适应方法^[5, 6]等。上述方法适用于夹杂所占基体体积分数比较小且相对简单的几何构件。为了克服这一局限性, Christman 和 Bao 等人引入单胞模型^[2, 7], 即用单胞将非均质微结构中的代表体单元 (RVE) 离散。但是, 这一模型假定材料由周期性微结构 RVE 构成, 同时假定非均质单胞在微结构中均匀分布 (局部周期性假定)。由于实际的非均质材料通常具有任意的夹杂相, 为了较好地模拟非均质材料的力学性能, 单胞必须取得足够大, 这就导致了大量的计算时间, 从而使计算效率降低。

Ghosh 等人^[8]提出了以 Voronoi 单胞有限元法来描述非均质材料的力学性能, 如图 1 所示。

* 收稿日期: 2005_08_16; 修订日期: 2006_03_06

基金项目: 国家自然科学基金与创新群体基金资助项目 (10225212; 10421002; 10332010); 长江学者和创新团队发展计划资助项目; 国家基础性发展规划项目 (2005CB321704)

作者简介: 张洪武 (1964—, 男, 大连人, 教授, 博士, 博导 (联系人, Tel: + 86_411_84706249; E_mail: zhanghw@dlut.edu.cn)。

对于任意形状的 n 边 Voronoi 单元, 当 $n > 4$ 时, 传统有限元方法不能唯一地确定插值多项式的系数, 不能保证单元间的位移协调性, 同时得到的单元刚度矩阵也可能出现病态。这一问题可以通过采用 Pian 的杂交混合元思想^[9] 得到很好解决。在前期的工作基础上, Zhang 和 Katsube^[10,11] 分析了任意分布非均质材料的力学性能。Ghosh 和 Moorthy^[12] 分析了圆形和椭圆形夹杂的非均质材料的弹塑性特性。Ghosh 等人结合均匀化思想, 对非均质材料进行了多尺度分析^[13]。同时, Grujicic 和 Zhang^[14] 将该方法嵌入到大型商业软件 ABAQUS 中进行功能梯度材料的有效弹性性质预测。作为最新发展, 该方法被应用到裂纹、孔隙和复合材料破坏的分析和模拟中^[15,16]。

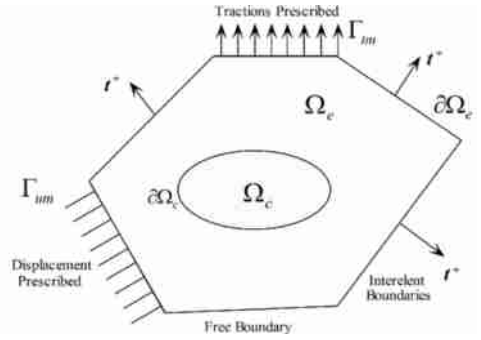


图 1 Voronoi 单元及其边界

本文工作的目的是构造基于参数变分原理的 Voronoi 弹塑性单元, 用于发展对非均质多边形微结构材料进行弹塑性分析的新模型和计算方法。参数变分原理和二次规划法由钟万勰提出^[17,18], 方法的基本原理是采用优化系统控制理论来解决连续力学中的边值问题。通过引入数学规划算法, 参数变分原理避免了迭代过程^[19,20]。对于弹塑性分析, 该方法避免了 Drucker 假定的限制。同样该方法还可以应用到非关联塑性本构模型, 非法向流动和应变软化问题中^[21]。本文推导并给出了 Voronoi 单元有限元列式, 最后的求解问题化为二次规划模型。研究工作进行了算法的程序实现, 并以此为基础研究了非均质材料微结构夹杂对整体力学性能的影响。

1 基于参数余能原理的 Voronoi 单元

对于各向同性均质材料, 参数余能泛函可表述为

$$\Pi_{\Omega}^e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} Q_{ija} \lambda_a d\Omega - \int_{\partial\Omega} T_i u_i ds, \quad Q_{ija} = \frac{\partial g_a}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

其中, Ω 为单元的积分域, σ_{ij} 为 Ω 中应力, u_i, T_i 为边界上的已知位移和外部边界力, S_{ijkl} 为本构矩阵。单元平衡方程可写为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (2)$$

b_i 为单元体力。在 Pian 的杂交元方法中, 应力只要在域内满足平衡条件, 在边界上满足力的边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = T_i, \quad (3)$$

n_j 为垂直于边界的外法向单位向量。

在杂交元方法中, 单元内平衡应力可以定义为

$$\sigma = P\beta \quad (4)$$

对于二维平面应力问题, $\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$, β 是一具有 m 个待定应力系数的向量, $\beta = \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m\}^T$, P 是一 $3 \times m$ 关于坐标 x, y 的多项式矩阵, 在平面问题中应力积分通常采用 Airy 应力函数。例如, 在没有体力时, 应力可由三阶 Airy 应力函数表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -y & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_7 \end{Bmatrix} = P_7 \beta \quad (5)$$

在上述应力多项式中, β 具有 7 个未知数。为了保证单元刚度矩阵的非奇异性, 应满足下式: $m \geq 2 \times n - 1$ 。其中, m 是向量 β 中系数个数; n 是单元节点个数; l 是刚体自由度, 对于二维问题, $l = 3$ 。因此, 等式(5)可用于节点数不超过 5 的单元。对于更多节点的单元, 有必要增加 β 中系数的个数以保证单元刚度矩阵的非奇异性。当 $5 \leq n \leq 7$ 时, β 中系数的个数应大于等于 12, 对应的 P 矩阵可写为

$$P_{12} = \begin{bmatrix} y^2 & 0 & x^2 & xy & 0 \\ P_7 & 0 & x^2 & y^2 & 0 & xy \\ 0 & 0 & -2xy & -y^2/2 & -x^2/2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

在此文中, 为了保证刚度矩阵的完备性, 我们所取的应力函数阵 P 都是完备的。由式(3)、(4), 单元边界外力 T 同样可由应力系数表示为

$$T = nP\beta = R\beta. \quad (7)$$

边界上位移 u 可通过节点位移线性插值得到

$$u = Lq, \quad (8)$$

其中, q 为节点位移。单元位移插值矩阵 L 是边界坐标的函数

$$L = \begin{bmatrix} 1 - \Delta_i & 0 & \Delta_i & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_i & 0 & \Delta_i \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中, $\Delta_i = a/l_i$, l_i 为第 i 条边的长度, a 为边界上点到节点 i 的距离。

将式(3)~(9)代入参数余能原理可得

$$\Pi_{\Omega}^e = \frac{1}{2} \beta^T H \beta + \beta^T A \lambda - \beta^T G q, \quad (10)$$

其中 $H = \int_{\Omega} P^T S P d\Omega$, $A = \int_{\Omega} P^T Q d\Omega$, $G = \int_{\partial\Omega} R^T L ds$ 。

求 Π_{Ω}^e 关于应力系数的变分得

$$H\beta + A\lambda = Gq, \quad (11)$$

因此, β 可表示为

$$\beta = H^{-1}(Gq - A\lambda). \quad (12)$$

2 弹塑性控制方程的推导

经典弹塑性控制方程可用增量形式表述为:

平衡方程

$$d\sigma_{j,j} + db_i = 0; \quad (13)$$

协调方程

$$d\varepsilon_j = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}); \quad (14)$$

本构方程

弹性本构

$$d\sigma_j = D_{jkl}(d\varepsilon_l - d\varepsilon_{kl}^p), \quad (15)$$

屈服函数

$$f_{\alpha}(\sigma_j, \varepsilon_j^p, \kappa) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

流动法则

$$d\varepsilon_{kl}^p = \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} \lambda_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha} \begin{cases} \geq 0, & f_{\alpha} = 0, \\ = 0, & f_{\alpha} < 0; \end{cases} \quad (17)$$

边界条件

$$n_j d\sigma_j = dT_i, \quad S_p \text{ 上}, \quad (18)$$

$$du_i = du_i, \quad S_u \text{ 上}. \quad (19)$$

本构方程中屈服函数 $f_\alpha(\sigma_j, \varepsilon_j^p, \kappa)$ 可通过 Taylor 展开, 转换为如下形式

$$f_\alpha = f_\alpha^0 + N_\alpha d\sigma + M_\alpha \lambda \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (20)$$

其中
$$N_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} \right)^T, \quad M_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon^p} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} \right)^T + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \kappa} \mathbf{h}^T,$$

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T$ 为流动因子, f_α^0 为屈服函数初始值, m 表示本构关系中的屈服面个数(通常可以假定只有一种屈服面存在), \mathbf{g} 是流动势函数, \mathbf{h} 为强化模量.

对于弹塑性问题, 应变增量可以分解为弹性部分和塑性部分

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_j^e + d\varepsilon_j^p. \quad (21)$$

对于允许的位移/应变增量, 系统的总势能可写为

$$\Pi = \int_\Omega \frac{1}{2} du_{i,j} D_{ijkl} du_{k,l} d\Omega - \int_\Omega \lambda_\alpha R_{kl\alpha} du_{k,l} d\Omega - \int_\Omega d b_i du_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} dT_i du_i ds, \quad (22)$$

其中
$$R_{kl\alpha} = \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_j} \right) D_{ijkl}.$$

将等式(4)、(12)和(21)代入上述系统势能泛函表达式(22)可得

$$\Pi = \Pi_1(\sigma, \lambda) + \Pi_0(\lambda) - \int_\Omega \mathbf{b}^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^T \mathbf{u} ds, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1(\sigma, \lambda) &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left[\int_\Omega \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} d\Omega \right] \mathbf{q} - \\ &\quad \mathbf{q}^T \left[\int_\Omega (\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}) d\Omega \right] \lambda \\ \Pi_0(\lambda) &= \frac{1}{2} \lambda^T \left[\int_\Omega \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} d\Omega + \int_\Omega \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{Q} d\Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_\Omega \mathbf{Q}^T \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} d\Omega - \int_\Omega \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} d\Omega \right] \lambda. \end{aligned}$$

由于控制变量 λ 不参加变分, 所以 $\Pi_0(\lambda)$ 在变分中可忽略. 而 $\Pi_1(\sigma, \lambda)$ 可继续化简如下

$$\Pi_1(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \Phi_e \lambda, \quad (24)$$

其中
$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{G}, \quad \Phi_e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{A}.$$

不考虑体力作用, 载荷积分式可写为

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^T \mathbf{u} ds = \mathbf{P}' \mathbf{q}, \quad \mathbf{P}' = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^T \mathbf{L} ds. \quad (25)$$

将等式(4)和(12)代入约束方程等效积分弱形式得到

$$\int_\Omega (f^0 + N\sigma + M\lambda) d\Omega = \mathbf{C}_e \mathbf{q} - \mathbf{U}_e \lambda - d, \quad (26)$$

其中
$$\mathbf{C}_e = \int_\Omega \mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} d\Omega, \quad \mathbf{U}_e = \int_\Omega (\mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{M}) d\Omega, \quad d = - \int_\Omega f^0 d\Omega.$$

当采用关联塑性流动准则时, $N = Q$, 可得

$$\Phi_e^T = \mathbf{C}_e. \quad (27)$$

上述势能泛函变分和约束方程等效积分弱形式可合写为

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q} - \lambda \Phi_e - \mathbf{P}' = \mathbf{0}, \quad (28)$$

$$\begin{cases} C_e q - U_c \lambda - d + v = 0, \\ v^T \lambda = 0, \quad v \geq 0, \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

上述算法已经在通用有限元分析与优化设计软件 JIFEX 程序中实现。

3 数值算例

根据前述基于参数变分原理的 Voronoi 单元法进行程序编制, 将算例结果与位移元结果和 ANSYS 结果进行比较以验证本文方法的正确性。除非特别指出, 下面算例中材料的弹性模量取为 $E = 1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, Poisson 比 $\mu = 0.3$, 初始屈服应力 $\sigma_s = 5.0 \text{ N/mm}^2$, 采用线性强化准则, 强化模量为 $h = 5.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, 本文采用 Mises 屈服准则。

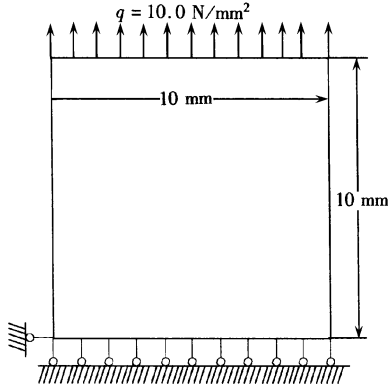
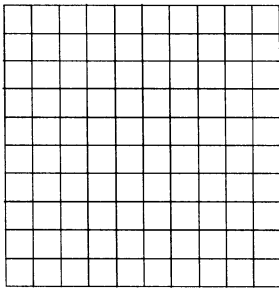


图2 受均布载荷的平面应力问题

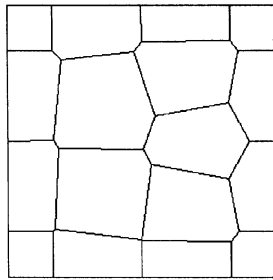
算例1 考虑一个顶端受均布拉力 $q = 10.0 \text{ N/mm}^2$ 的二维平板($10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ 的平面应力问题。固定板左下端点, 限制板下端的 y 向位移, 如图2所示。分别采用规则四边形单元(100 个单元和 Voronoi 单元(分别为 17 和 499 个单元对结构进行剖分, 对应的网格如图3所示。采用经典四边形等参元和 Voronoi 元进行计算。

图4给出了由不同网格剖分计算所得的单向拉力作用下的平均应力应变曲线, 从中可以看出所有曲线都与解析解相同。

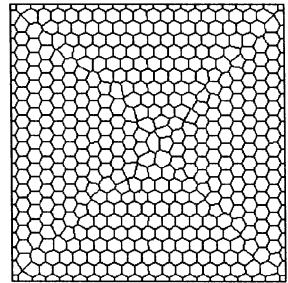
算例2 考虑一个 $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ 的平板, 中心有一个半径 $R = 3.0 \text{ mm}$ 的开孔。在上下两端施加一均布拉力 q



(a) 100 个规则四边形



(b) 17 个 Voronoi 单元



(c) 499 个 Voronoi 单元

图3 不同单元剖分结构对应的网格

$= 10.0 \text{ N/mm}^2$, 如图5所示。由于对称性, 取四分之一进行分析。采用 Voronoi 单元对结构进行剖分, 单元数为 123。同时采用 ANSYS 对本算例进行计算, 单元数为 566。对应的网格如图6(a)和6(b)所示。

计算结果显示初始屈服都发生在底端最左节点。图7给出了最终所获得的板上端 y 向位移比较。从中可以看出, 采用 Voronoi 单元和 ANSYS 计算结果基本一致。

算例3 为了验证本文中 Voronoi 单元的适用性, 对一含夹杂非均质材料在单向受拉情况下的弹塑性力学性能进行预测。材料几何尺寸及边界约束如图8所示。由于材料的各向异性, 分别在竖向和横向两个方向上施加载荷及约束。采用任意多边形网格剖分, 如图9(a)所示。夹杂材料弹性模量和 Poisson 比取为 $E_c = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\mu_c = 0.3$, 屈服应力为 $\sigma_{sc} = 10.0 \text{ N/mm}^2$ 。采用 Mises 屈服准则和线性强化本构模型, 强化模量为 $h_c = 10 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 。

考虑夹杂体积分数为 5%、10%、15% 和 20% 4 种情况下的应力应变关系。为便于比较, 将本算例中所用 Voronoi 网格用 ANSYS 进行细剖计算。对应网格如图 9(b) 所示。

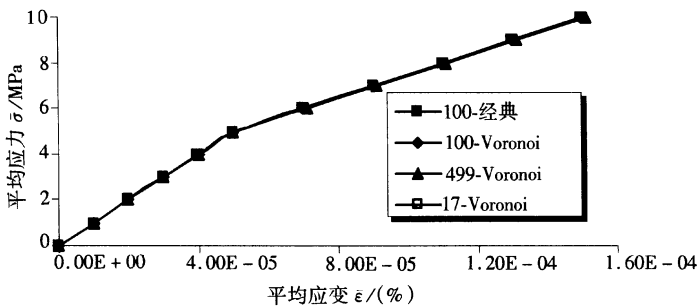


图 4 受均布载荷平板的平均应力应变关系曲线

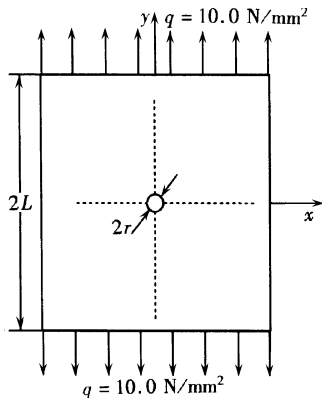
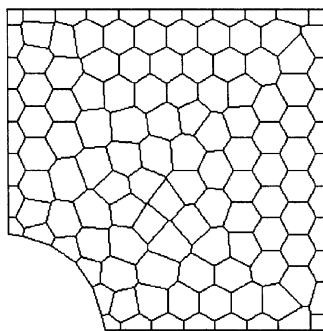
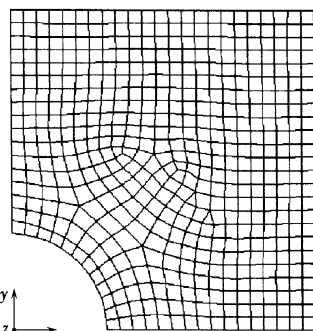


图 5 中心带孔板受均匀拉力载荷



(a) Voronoi 单元



(b) 四边形和三角形网格

图 6 采用不同单元剖分网格

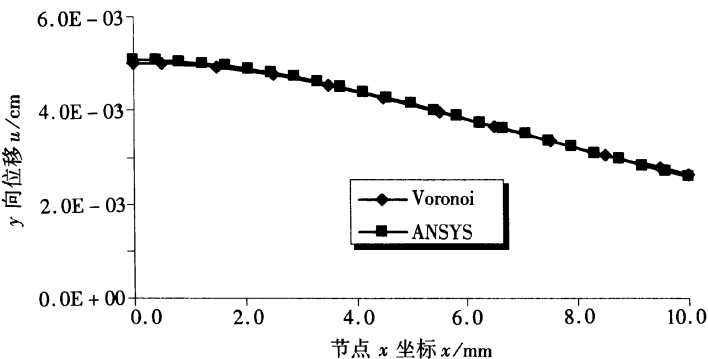


图 7 板上端最终 y 向位移

图 10 给出了竖向约束载荷时, 本程序和 ANSYS 对应不同体积分数的应力应变关系曲线。可以看出, 两者计算所得应力应变曲线相差很小, 非均质材料所表现出来的力学性能介于基体材料和夹杂材料两者之间。随着夹杂体积分数的增加, 材料有效弹性模量向夹杂相靠近。图 11 给出了横向约束载荷时, 由本程序和 ANSYS 所获得的对应不同体积分数情况下的应力应变关系曲线。

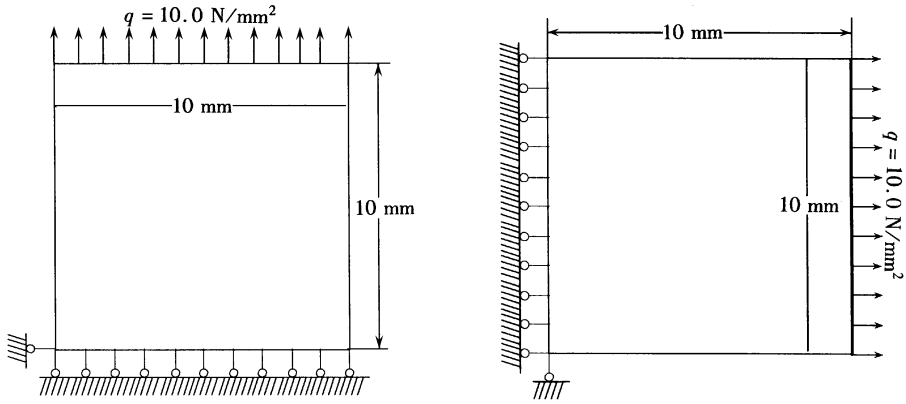
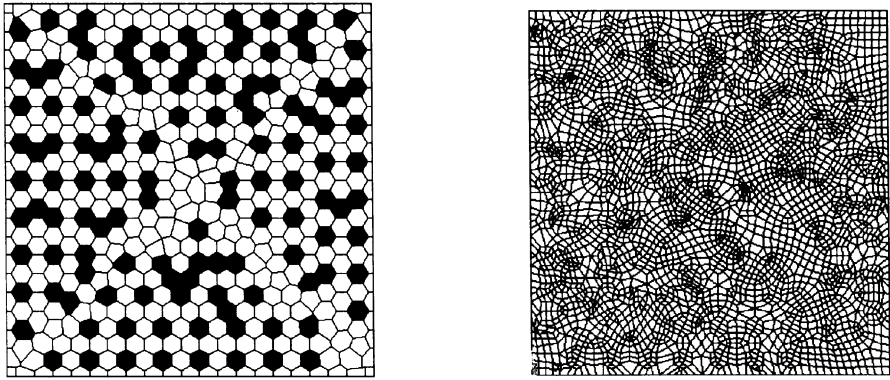


图 8 平板受均布载荷作用及边界条件



(a) Voronoi 单元

(b) 四边形和三角形网格

图 9 采用不同单元剖分的网格

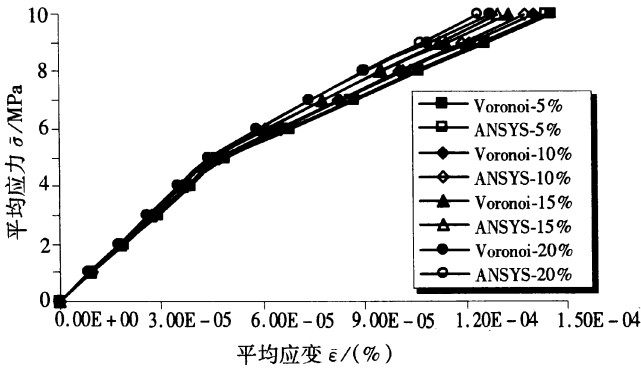


图 10 竖向载荷作用下平板平均应力应变曲线

4 结 论

本文有新意的工作归纳如下:

- 1 采用参数余能原理推导了 Voronoi 单元并通过其变分求得应力系数表达式;
- 2 在余能原理公式的基础上结合参数最小势能原理, 推导了 Voronoi 单元法弹塑性参数二次规划算法公式;
- 3 进行了程序编制和多个例题的计算。

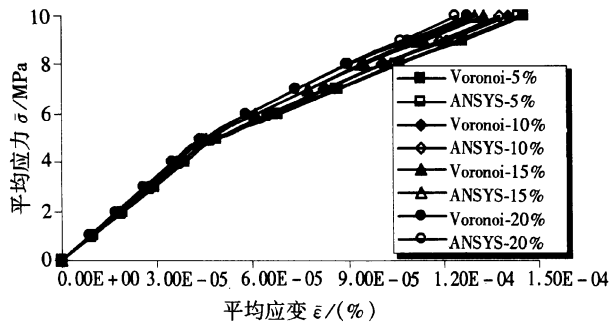


图 11 横向载荷作用下平板平均应力应变曲线

通过一系列的算例计算表明,文中采用的方法能很好地进行结构与材料的弹塑性计算。这也是参数变分原理的另一应用,同时也为进一步对带夹杂的 Voronoi 元弹塑性计算打下基础。

[参 考 文 献]

- [1] Brockenbrough J R, Suresh S, Wienecke H A. Deformation of metal matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape[J]. *Acta Metall Mater*, 1991, **39**(5): 735—752.
- [2] Christman T, Needleman A, Suresh S. An experimental and numerical study of deformation in metal ceramic composites[J]. *Acta Metall Mater*, 1989, **37**(11): 3029—3050.
- [3] Hashin Z, Strikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials[J]. *J Mech Phys Solids*, 1963, **11**(2): 127—140.
- [4] Chen H S, Acrivos A. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non dilute concentrations[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1978, **14**(3): 349—364.
- [5] Hill R. A self consistent mechanics of composite materials[J]. *J Mech Phys Solids*, 1965, **13**(4): 213—222.
- [6] Hori M, Nemat Nasser S. Double inclusion model and overall moduli of multiphase composites[J]. *J Mech Phys Solids*, 1993, **14**(2): 189—206.
- [7] Bao G, Hutchinson J W, McMeeking R M. Plastic reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep[J]. *Acta Metall Mater*, 1991, **39**(5): 1871—1882.
- [8] Ghosh S, Mukhopadhyay S N. A material based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1993, **104**(3/4): 211—247.
- [9] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution[J]. *AAIA J*, 1964, **2**(5): 1333—1336.
- [10] Zhang J, Katsube N. Problems related to application of eigenstrains in a finite element analysis[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1994, **37**(18): 3185—3193.
- [11] Zhang J, Katsube N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed rigid inclusions[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1995, **38**(10): 1635—1653.
- [12] Ghosh S, Moorthy S. Elastic plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi cell finite element method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, **121**(1/4): 373—409.
- [13] Ghosh S Lee K, Moorthy S. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1995, **32**(1): 27—62.
- [14] Grujicic M, Zhang Y. Determination of effective elastic properties of functionally graded materials using Voronoi cell finite element method[J]. *Materials Science and Engineering, Ser A*, 1998, **251**(1): 64—76.

- [15] Lee K, Ghosh S. A microstructure based numerical method for constitutive modeling of composite and porous materials[J]. *Materials Science and Engineering, Ser A*, 1999, **272**(1): 120—133.
- [16] Raghavan P, Li S, Ghosh S. Two scale response and damage modeling of composite materials[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, **40**(12): 1619—1640.
- [17] 钟万勰. 岩土力学中的参变量最小余能原理[J]. *力学学报*, 1986, **18**(3): 253—258.
- [18] 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学技术出版社, 1997.
- [19] Zhang H W, Xu W L, Di S L, et al. Quadratic programming method in numerical simulation of metal forming process[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, **191**(49): 5555—5578.
- [20] Zhang H W, Zhang X W, Chen J S. A new algorithm for numerical solution of dynamic elastic-plastic hardening and softening problems[J]. *Computers and Structures*, 2003, **81**(17): 1739—1749.
- [21] Zhang H W, Schrefler B A. Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localization analysis of saturated and partially saturated porous media: one dimensional model[J]. *European Journal of Solid Mechanics A/Solids*, 2000, **19**(3): 503—524.

Parametric Variational Principle Based Elastic-Plastic Analysis of Heterogeneous Materials With Voronoi Finite Element Method

ZHANG Hong_wu, WANG Hui

(Department of Engineering Mechanics,

State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China

Abstract: The Voronoi cell finite element method (VCFEM) is adopted to overcome the limitations of the classic displacement based finite element method in numerical simulation of heterogeneous materials. The parametric variational principle and quadratic programming method were developed for elastic-plastic Voronoi finite element analysis of two-dimensional problems. Finite element formulations were derived and a standard quadratic programming model was deduced from the elastic-plastic equations. Influence of microscopic heterogeneities on the overall mechanical response of heterogeneous materials is studied in detail. Numerical examples are presented to demonstrate the validity and effectiveness of the method developed.

Key words: Voronoi finite element; parametric variational principle; quadratic programming method