

圆外平面弹性问题的边界积分公式*

董正筑^{1,2}, 李顺才^{1,3}, 余德浩²

- (1. 中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221008;
2. 中国科学院 计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100080;
3. 徐州师范大学 工学院, 江苏 徐州 221011)

(皓江推荐)

摘要: 将边界上的应力函数及其法向导数展开为罗朗级数, 与复应力函数的罗朗级数的表达式对比, 可以确定罗朗级数的各系数, 再利用傅利叶级数和卷积的几个公式进行计算, 得到应力函数边界积分公式. 通过边界的应力函数及其法向导数的积分, 直接得到圆外应力函数值, 并给出几个算例, 表明结果用于求解单位圆外平面弹性问题十分方便.

关键词: 圆外平面弹性问题; 双调和方程; 傅利叶级数; 应力函数; 边界积分公式

中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引 言

圆内、圆外平面问题常用复变函数法^[1~3]或边界元法^[4]求解. 复变函数法中要用柯西积分才能确定其中的解析函数^[1,2], 其积分过程需要人工干预, 计算不方便; 一般的边界元法虽可以得到精度较高的数值解, 但一般很难得到解析解. 对于圆内平面弹性问题, 利用双解析函数和广义函数论的基本公式, 已经得到了可直接求解域内应力函数的边界积分公式^[4~6].

对于圆外平面弹性问题, 由于是多连通区域, 情况要复杂得多. 下面先给出复应力函数的罗朗级数的表达式, 根据该表达式, 可以得到边界上应力函数、应力函数法向导数值的罗朗级数形式的表达式. 将此表达式与已知边界上应力函数、应力函数法向导数值的罗朗级数对比, 可以确定罗朗级数的各系数, 至此是通常级数法的步骤. 下面最关键的一步是利用傅利叶级数和卷积的几个基本公式, 将确定了系数的罗朗级数, 转换为关于已知各种面力边界条件下边界上应力函数、应力函数法向导数值的一般边界积分公式, 得到应力函数的解析解答. 具体过程如下.

1 孔边受平衡载荷作用的圆外平面问题

在常体力情况下, 应力函数满足双调和方程, $\Delta^2 \varphi = 0$. 双调和函数用复变函数表示, 应力函数可设为

$$\varphi(r, \theta) = \operatorname{Re}[z \varphi_1(z) + \bar{\theta}_1(z)], \quad (1)$$

* 收稿日期: 2005_06_09; 修订日期: 2006_03_28

作者简介: 董正筑(1946—), 男, 浙江人, 教授(联系人. Tel: + 86_516_83884463; Fax: + 86_516_83888682; E_mail: dongzhengzhu@hotmail.com).

其中

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = -\frac{1+\mu}{8\pi}(X+iY)\ln z + Bz + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \\ \theta_1'(z) = \frac{3-\mu}{8\pi}(X-iY)\ln z + (B_1+iC_1)z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \end{cases} \quad (2)$$

上面两式中 X 、 Y 分别为所有内边界上 x 及 y 方向的面力之和。在不改变应力状态的条件下，可以取 $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ 。

设无穷远处的主应力为 σ_1 、 σ_2 ，主应力 σ_1 与 x 轴夹角为 α ，则公式中的 B 、 B_1 和 C_1 由下式确定

$$B = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad B_1 + iC_1 = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}. \quad (3)$$

当圆孔边受平衡载荷作用时，其面力的主矢量 $X = 0$, $Y = 0$ ，复应力函数可简化为如下形式

$$\varphi_1(z) = Bz + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (4)$$

$$\theta_1'(z) = (B_1 + iC_1)z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}. \quad (5)$$

由式(5)积分得到

$$\theta_1(z) = \frac{B_1 + iC_1}{2} z^2 + b_1 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n} b_{n+1} z^{-n} \right] + B' + iC'. \quad (6)$$

设 $z = re^{i\theta}$, $r > 1$ ，将(4)、(6)两式代入式(1)整理得到

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{a_{|n|-1}}{2} r^2 - \frac{b_{|n|+1}}{2|n|} \right] r^{-|n|} e^{in\theta} + Br^2 + \\ & \frac{B_1}{2} r^2 \cos 2\theta - \frac{C_1}{2} r^2 \sin 2\theta + b_1 \ln r + B', \end{aligned} \quad (7)$$

于是对于单位圆孔边界，有

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) = \varphi(1, \theta) = & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{1}{2} a_{|n|-1} - \frac{1}{2|n|} b_{|n|+1} \right] \cdot e^{in\theta} + B + \\ & B' + \frac{B_1}{2} \cos 2\theta - \frac{C_1}{2} \sin 2\theta, \\ \varphi_n(\theta) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} = & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[(|n|-2) \frac{a_{|n|-1}}{2} - \frac{b_{|n|+1}}{2} \right] \cdot e^{in\theta} - \\ & 2B - b_1 - B_1 \cos 2\theta + C_1 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

设边界上已知的应力函数和应力函数法向导数值的直接展开式为

$$\varphi_0(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad (8)$$

$$\varphi_n(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}, \quad (9)$$

并注意到 $\cos 2\theta = (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})/2$, $\sin 2\theta = (e^{i2\theta} - e^{-i2\theta})/2i$ ，比较上面两组展开式可得

$$\begin{cases} c_0 = B + B', \\ c_2 = \frac{B_1}{4} + \frac{a_1}{2} - \frac{b_3}{4} - \frac{C_1}{4i}, \quad n = 2, \\ c_{-2} = \frac{B_1}{4} + \frac{a_1}{2} - \frac{b_3}{4} + \frac{C_1}{4i}, \quad n = -2, \\ c_n = \frac{a_{|n|-1}}{2} - \frac{b_{|n|+1}}{2|n|}, \quad n \neq 0, \pm 2, \end{cases} \begin{cases} d_0 = -2B - b_1, \\ d_2 = -\frac{B_1}{2} - \frac{b_3}{2} + \frac{C_1}{2i}, \quad n = 2, \\ d_{-2} = -\frac{B_1}{2} - \frac{b_3}{2} - \frac{C_1}{2i}, \quad n = -2, \\ d_n = \frac{|n|-2}{2}a_{|n|-1} - \frac{b_{|n|}}{2}, \quad n \neq 0, \pm 2. \end{cases}$$

由上两式可解得用系数 c_n 及 d_n 表示的 a_n, b_n 为

$$\begin{cases} b_1 = -2B - d_0, \\ b_{|n|} = -B_1 - 2d_2 + \frac{C_1}{i}, \quad n = 2, \\ b_{|n|} = -B_1 - 2d_{-2} - \frac{C_1}{i}, \quad n = -2, \\ b_{|n|} = |n| \cdot [(|n|-2)c_n - d_n], \quad n \neq 0, \pm 2, \\ a_{|n|-1} = 2c_2 - B_1 - d_2 + \frac{C_1}{i}, \quad n = 2, \\ a_{|n|-1} = 2c_{-2} - B_1 - d_{-2} - \frac{C_1}{i}, \quad n = -2, \\ a_{|n|-1} = |n|c_n - d_n, \quad n \neq 0, \pm 2 \end{cases}$$

代入(7)式, 其中级数部分整理得到

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{a_{|n|-1}}{2}r^2 - \frac{b_{|n|+1}}{2|n|} \right] r^{-|n|} e^{in\theta} = \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(r^2 - 1)|n|c_n + c_n - \frac{1}{2}(r^2 - 1)d_n \right\} r^{-|n|} e^{in\theta} - \\ \frac{1}{2}(1 - r^2)d_0 - c_0 + \left[\frac{1}{2}r^{-2} - 1 \right] B_1 \cos 2\theta + \left[1 - \frac{1}{2r^2} \right] C_1 \sin 2\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

利用下述卷积公式^[4]: 若 $u = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, $v = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}$, 则 $u * v = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_n b_n e^{in\theta}$, 将(10)式中的级数部分改写为卷积形式,

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(r^2 - 1)|n|c_n + c_n - \frac{1}{2}(r^2 - 1)d_n \right\} r^{-|n|} e^{in\theta} = \\ \frac{1}{4\pi}(r^2 - 1) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| r^{-|n|} e^{in\theta} \right] * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \right] + \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{-|n|} e^{in\theta} \right] * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \right] - \\ \frac{(r^2 - 1)}{4\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{-|n|} e^{in\theta} \right] * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta} \right]. \end{aligned}$$

当 $r > 1$ 时, 根据傅立叶级数的基本公式^[4]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{-|n|} e^{in\theta} = \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| r^{-|n|} e^{in\theta} = \frac{2r^3 \cos \theta - 4r^2 + 2r \cos \theta}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^2}, \tag{11}$$

并根据(8)式、(9)式, 将(10)式中的级数部分改写和整理可得到

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(r^2 - 1)|n|c_n + c_n - \frac{1}{2}(r^2 - 1)d_n \right\} r^{-|n|} e^{in\theta} = f(r, \theta), \tag{12}$$

其中

$$f(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(r^2 - 1)^2 r \cos(\theta - \theta') - 1/2}{2\pi[1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')]^2} \varphi_0(\theta') - \frac{(r^2 - 1)^2}{4\pi[1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')]^2} \varphi_n(\theta') \right\} d\theta', \quad (13)$$

把(12)式、(13)式代入(10)式,再代入(7)式,并注意到 $d_0 = -(2B + b_1)$, $c_0 = B + B'$, 得到应力函数

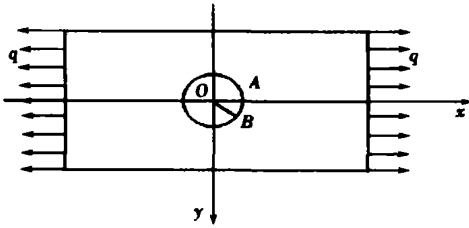
$$\varphi(r, \theta) = \left[\frac{B_1}{2} \cos 2\theta - \frac{C_1}{2} \sin 2\theta \right] (r^{-2} + r^2) - B_1 \cos 2\theta + C_1 \sin 2\theta + b_1 \ln r - \frac{(r^2 - 1)}{2} b_1 + f(r, \theta), \quad r > 1, \quad (14)$$

其中 B 、 B_1 及 C_1 由(3)式确定, $\varphi_0(\theta)$ 、 $\varphi_n(\theta)$ 需由圆孔边的已知面力确定, $b_1 = -d_0 - 2B$, 且 d_0 可由式(9)关于 θ 的积分得到

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta) d\theta, \quad (15)$$

(14)式即为孔边受平衡载荷作用时的开孔无限大板平面问题应力函数的边界积分公式·

算例 1 如图 1 开孔无限大板在无穷远处单向受拉问题·



分析 本问题中大板在无穷远处受到 x 方向的均布载荷, 其集度为 q , 可知无穷远处的主应力为 $\sigma_1 = q$, $\sigma_2 = 0$, $\alpha = 0^\circ$ 由(3)式得到

$$B_1 = -\frac{q}{2}, \quad C_1 = 0, \quad B = \frac{q}{4},$$

又孔边界无面力作用, 即 $\varphi_0(\theta) = 0$, $\varphi_n(\theta) = 0$, 则由(13)式知

$$f(r, \theta) = 0,$$

图 1 无限大板在无穷远处单向受拉

同时

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta) d\theta = 0, \quad b_1 = -2B - d_0 = -2B = -\frac{q}{2}.$$

以上各式代入式(14)得到应力函数为

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{q}{4} \cos 2\theta (r^{-2} + r^2) + \frac{q}{2} \cos 2\theta - \frac{q}{2} \ln r + \frac{q}{2} \frac{(r^2 - 1)}{2}.$$

由应力公式得到本问题的应力解答与普通解法^[1]完全一致·

算例 2 开孔无限大板在孔边受一对单位压力问题(图 2)·

分析 选取孔边任意一点 A 点为基点, 令

$$\varphi_A = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_A = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_A = 0,$$

则对孔上任一点 B , 有

$$\varphi_0(\theta) = \begin{cases} -\sin \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad \varphi_n(\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

代入(13)式积分得到

$$f(r, \theta) = -\frac{r \sin \theta}{2} - \frac{r}{\pi} \sin \theta \cdot \arctan \left[\frac{2r \sin \theta}{r^2 - 1} \right] - \frac{r^2 - 1}{2\pi}.$$

根据无穷远处无面力作用, 由(3)式得到

$$B = B_1 = C_1 = 0,$$

再由(15)式计算得到

$$d_0 = \frac{1}{\pi}, \quad b_1 = -d_0 = -\frac{1}{\pi},$$

以上各式再代入式(14)式得到应力函数为

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{r \sin \theta}{2} - \frac{r}{\pi} \sin \theta \cdot \arctan \left(\frac{2r \sin \theta}{r^2 - 1} \right) - \frac{1}{\pi} \ln r.$$

2 孔边受非平衡载荷作用的圆外平面问题

圆外平面问题当其孔边受非平衡载荷作用时, 不失一般性, 我们讨论孔边 x 方向主矢量 f_x 不为 0, y 方向主矢量 f_y 为 0, 且无穷远处无面力作用的情况. 此时, 由(3)式得到

$$B = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

则(4)式、(5)式简化为

$$\varphi_1(z) = -\frac{1+\mu}{8\pi} f_x \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (4')$$

$$\theta_1(z) = \frac{3-\mu}{8\pi} f_x \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}. \quad (5')$$

在不改变应力状态的条件下, 可以取 $a_0 = 0, b_0 = 0$. (5)'式积分后得到

$$\theta_1(z) = \frac{3-\mu}{8\pi} f_x z (\ln z - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n} b_{n+1} z^{-n} \right] + b_1 \ln z + B' + iC',$$

其中, B', C' 为积分常数. 设 $z = r e^{i\theta}, r > 1$, 将上式及(5)'式代入(1)式并整理得到

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & -\frac{r}{2\pi} f_x \theta \sin \theta + \frac{1}{8\pi} f_x \cos \theta [(2-2\mu) \ln r - (3-\mu)] + \\ & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{a_{|n|-1}}{2} r^2 - \frac{b_{|n|+1}}{2|n|} \right] r^{-|n|} e^{in\theta} + b_1 \ln r + B', \end{aligned} \quad (16)$$

于是对于单位圆孔边界, 有

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) = \varphi(1, \theta) = & -\frac{1}{2\pi} f_x \theta \sin \theta - \frac{1}{8\pi} f_x \cos \theta (3-\mu) + \\ & B' + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{a_{|n|-1}}{2} - \frac{b_{|n|+1}}{2|n|} \right] e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(\theta) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} = & \frac{1}{2\pi} f_x \theta \sin \theta + \frac{1}{8\pi} (1+\mu) f_x \cos \theta + \\ & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{|n|-2}{2} a_{|n|-1} - \frac{b_{|n|+1}}{2} \right] e^{in\theta} - b_1, \end{aligned} \quad (18)$$

设

$$\varphi_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} - \frac{1}{2\pi} f_x \theta \sin \theta, \quad (19)$$

$$\varphi_n(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta} + \frac{1}{2\pi} f_x \theta \sin \theta. \quad (20)$$

类似上节的推导过程, 分别对比(17)式与(19)式、(18)式与(20)式两边的系数, 从中解出 a_n, b_n 各系数, 将系数 a_n, b_n 代入(16)式, 再次应用傅立叶级数的基本公式(11), 并根据(19)式、(20)式, 得到

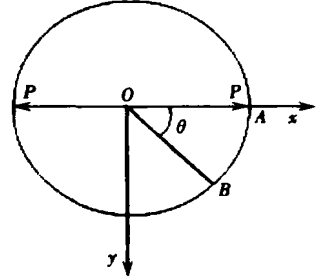


图2 开孔无限大板孔边对径受压

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & -\frac{r}{2\pi} f_x \theta \sin \theta + \frac{1}{8\pi} f_x \cos \theta [(2-2\mu) \ln r - (3-\mu)] + \\ & \frac{f_x r^{-1}}{4\pi} \cos \theta \left[r^2 + \frac{1-\mu}{2} \right] + f_1(r, \theta) + f(r, \theta) - d_0 \ln r - \frac{1-r^2}{2} d_0, \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $f(r, \theta)$ 与(13)式相同, 而

$$f_1(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{(r^2-1)^3}{4\pi [1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]^2} \frac{f_x}{2\pi} \theta' \sin \theta' d\theta'. \quad (22)$$

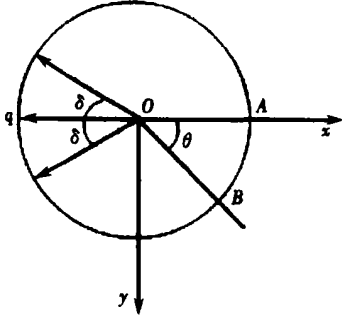


图3 开孔无限大板在孔边受一段分布压力作用

对比(21)式及(14)式, 可见孔边受不平衡载荷作用时的应力函数, 比孔边受平衡载荷时应力函数式多了前4项, 体现了不平衡力作用的影响。

算例3 如图3所示, 开孔无限大板在孔边受一段分布压力 q 作用, 其合力水平向左, 设 $f_x = -1$, 即此时分布载荷的集度 $q = 1/(2\sin \delta)$ 。

分析 选取 A 点为基点, 则对孔边上任一点 B , 有

$$\varphi_0(\theta) = \varphi_B =$$

$$\begin{cases} \int_{\pi-\delta}^{\theta} qR \sin(\theta-\alpha) d\alpha = -\frac{1+\cos(\theta+\delta)}{2\sin \delta}, & \pi-\delta \leq \theta \leq \pi+\delta, \\ \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} qR \sin(\theta-\alpha) d\alpha = \sin \theta, & \pi+\delta \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$\varphi_n(\theta) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_B = \begin{cases} \frac{1+\cos(\theta+\delta)}{2\sin \delta}, & \pi-\delta \leq \theta \leq \pi+\delta, \\ -\sin \theta, & \pi+\delta \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

代入(13)式得到

$$\begin{aligned} f(r, \theta) = & -\frac{(r^2-1)^3}{2\sin \delta} \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \frac{1+\cos(\delta+\theta')}{4\pi [1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]^2} d\theta' + \\ & \int_{\pi+\delta}^{2\pi} \frac{(r^2-1)^3 \sin \theta'}{4\pi [1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]^2} d\theta', \end{aligned}$$

由(22)式得到

$$f_1(r, \theta) = -\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-1)^3 \theta' \sin \theta'}{8\pi^2 [1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]^2} d\theta',$$

由(20)式可确定 d_0

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\varphi_n(\theta) - \frac{1}{2\pi} f_x \theta \sin \theta \right] d\theta = \frac{\delta}{2\pi \sin \delta}.$$

在上例中若 $\delta \rightarrow 0$, 即分布力转化为一单位集中力 $f_x = -1$, 此时

$$d_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{2\pi \sin \delta} = \frac{1}{2\pi}$$

$$f(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \left[2r \sin \theta \arctan \left(\frac{2r \sin \theta}{r^2-1} \right) + r^2 - 1 - r \pi \sin \theta \right],$$

$$f_1(r, \theta) = -\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-1)^3}{4\pi [1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]^2} \frac{1}{2\pi} \theta' \sin \theta' d\theta',$$

以上各式代入(21)式得到应力函数后,进一步可求出应力分布。

3 结 语

本文得到了在孔边分别受平衡和非平衡载荷作用的圆外平面弹性问题的边界积分公式,可直接从边界条件得到圆外平面弹性问题应力函数的一般积分形式的解析表达式,为圆外平面弹性问题提供了一种直观、简单的求解方法,对于简单问题可得到解析解,对于复杂边界条件问题,通过数值积分进行计算也是十分方便的。

感谢 作者感谢中科院计算数学与科学工程计算研究所(AMTV20032C05)的资助。

[参 考 文 献]

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990, 101, 118—133, 213.
- [2] 武际可, 王敏中, 王炜. 弹性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000, 167—168.
- [3] 唐寿高, 曹志远. 半无限及含孔无限平面在各种边界条件下的复位势基本解[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(4): 311—319.
- [4] 余德浩. 自然边界元法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 93, 202.
- [5] 郑神州, 郑学良. 双解析函数、双调和函数和平面弹性问题[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(8): 797—802.
- [6] 董正筑, 李顺才, 余德浩. 圆内平面弹性问题的边界积分公式[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(5): 556—560.

Boundary Integral Formula for the Elastic Plane Problem of Exterior Circular Domain

DONG Zheng_zhu^{1,2}, LI Shun_cai^{1,3}, YU De_hao²

(1. College of Science, China University of Mining & Technology, Xu Zhou,

Jiangsu 221008, P. R. China;

2. Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China;

3. Industrial School, Xuzhou Normal University,

Xuzhou, Jiangsu 221011, P. R. China)

Abstract: After the stress function and its normal derivative on the boundary for the plane problem of exterior circular domain are expanded into Laurent series, comparing them with the Laurent series of the complex stress function and making use of some formulas in Fourier series and in the convolutions, the boundary integral formula of the stress function is derived further. Then the stress function can be obtained directly by the integration of the stress function and its normal derivative on the boundary. Some examples are given. It shows that the boundary integral formula of the stress function is convenient to be used for solving the elastic plane problem of exterior circular domain.

Key words: elastic plane problem of exterior circular domain; bi-harmonic equation; Fourier series; stress function; boundary integral formula