

无限横观各向同性弹性圆柱中 刚性圆盘的扭转振动*

S·P·马瑞克, M·卡诺瑞, P·K·乔德辉

(加尔各答大学 应用数学系, 加尔各答 700009, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 分析了无限横观各向同性弹性圆柱中, 刚性圆盘的扭转振动问题。绘制的图形显示了材料的各向异性性质对应力强度因子的影响

关键词: 扭转振动; 横观各向同性材料; 对偶积分方程; Fredholm 积分方程; 围道积分法

中图分类号: O327; O346.11 文献标识码: A

引 言

固体中裂纹或刚性夹杂的存在, 会影响应力的分布和弹性波的传播。但是, 在所有结构材料中, 本质上都存在着裂纹或夹杂, 包括天然缺陷和材料加工过程中产生的缺陷。许多作者研究了这一问题, 包括各向同性介质中的夹杂问题, 例如 Embley 和 Sih^[1,2], Chen^[3], Srivastava 等人^[4], Shindo 等人^[5,6], Mandal 和 Chosh^[7] 的研究工作。材料固有的瑕疵, 例如裂纹、脱层和孔隙, 是冶金和不连续加工造成的, 并且不易控制。对于尖锐裂纹, 控制更加困难。最近, Mandal^[8] 等人研究了无限大各向同性材料圆柱中, 一枚状如圆盘的硬币 (rigid penny) 的扭转振动。但是最近几十年, 各向异性材料得到越来越多的应用。有些天然各向异性材料, 如锌、镁、蓝宝石、木材, 某些岩石和晶体, 还有些人造材料, 如纤维增强复合材料, 都具有各向异性性质。复合材料优于传统材料的优点是其强度、弹性和其他性能^[9]。增强材料, 从某种程度上可以看作均匀各向异性弹性介质, 它具有某种弹性对称性, 这取决于增强的对称性。某些玻璃纤维增强塑料, 可以看作横观各向同性材料。因此, 固体力学问题就不仅限于各向同性材料。各向异性材料日益增多的使用, 也要求把研究拓展到各向异性介质。鉴于此, Mondal 等人^[8] 在最近的研究中, 就考虑了横观各向同性材料。他将研究的问题的解简化为积分方程的求解并进行数值

* 收稿日期: 2005_07_01; 修订日期: 2006_03_20

作者简介: S·P·马瑞克 (1972—), 研究生 (E-mail: spbarik@yahoo.com);

M·卡诺瑞 (1955—), 讲师 (E-mail: k_mri@yahoo.com);

P·K·乔德辉 (1948—), 教授 (联系人, Tel: + 91_33_23508386; Fax: + 91_33_23519755; E-mail: pkcha@vsnl.net)。

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校。

处理, 绘制图形显示了各向异性的影响, 示出了各种横观各向同性材料的应力强度因子随无量纲频率的变化情况。

1 问题的描述

我们考虑无限大横观各向同性材料圆柱体, 并假设横切柱体的各向同性平面垂直于柱轴。圆柱的半径为 b_1 , 采用柱坐标系 (r_1, θ, z_1) , 其 z_1 轴沿圆柱轴选取, 可以方便地确定圆柱中任意点的位置。假定在 $0 \leq r_1 \leq a, z_1 = 0$ 处, 圆柱中有一半径为 a 的刚性圆盘夹杂, 刚性圆盘受迫产生围绕 z_1 轴的周期为 $2\pi/\omega$ 的简谐运动。而在其他区域, 即 $a < r_1 < b_1, z_1 = 0$, 无应力。我们的问题是研究当夹杂转动时, 横观各向同性圆柱内应力是怎样分布的。显然, 这时仅有的非零位移分量为 θ 分量 V_1 , 仅有的非零应力分量为 $\tau_{r\theta}^1$ 和 $\tau_{z\theta}^1$ 。且 $V_1, \tau_{r\theta}^1, \tau_{z\theta}^1$ 为 r_1, z_1 和 t 的函数, 而与 θ 无关。本问题横观各向同性介质的应力应变关系中, 具有 5 个独立的弹性常数 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{33}, A_{44}$, 表示如下

$$\tau_{r\theta}^1 = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1} \right) V_1, \quad \tau_{z\theta}^1 = A_{44} \frac{\partial V_1}{\partial z_1}.$$

对变量无量纲化

$$r = \frac{r_1}{a}, \quad z = \frac{z_1}{a}, \quad b = \frac{b_1}{a}, \quad V = \frac{V_1}{a}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}^1}{G}, \quad \tau_{z\theta} = \frac{\tau_{z\theta}^1}{G},$$

其中 $G = (A_{11} - A_{12})/2$ 。无量纲应力应变关系为

$$\tau_{r\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) V, \quad (1)$$

$$\tau_{z\theta} = \delta^2 \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\text{其中} \quad \delta^2 = A_{44}/G. \quad (3)$$

运动方程为

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} = \frac{\rho a^2}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (4)$$

上式中 ρ 为材料常数。将(1)式和(2)式中的 $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ 代入(4)式得到场方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho a^2}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (5)$$

边界条件为

$$V = -\Omega e^{i\omega t}, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (6)$$

其中 Ω 为任意常数

$$\tau_{z\theta} = 0, \quad z = 0, \quad 1 < r < b, \quad (7)$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad r = b, \quad -\infty < z < \infty \quad (8)$$

2 求解方法

由于刚性圆盘作周期为 $2\pi/\omega$ 的强迫振动, 求解场方程(5)我们先分离时间变量因子, 并设 $V = v(r, z)e^{i\omega t}$, 得

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] v = -\frac{\rho a^2 \omega^2}{G} v = -k^2 v, \quad (9)$$

其中

$$k^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (9a)$$

这样时间因子 $e^{i\omega t}$ 对所有场变量是通约的, 可以略去。由于研究的问题是关于平面 $z = 0$ 几何对称的, 因此考虑 $z > 0$ 时方程(9) 的解就足够了。我们有

$$v(r, z) = \int_0^\infty A_1(\xi) J_1(\xi r) e^{-(\alpha/\delta)z} d\xi + \int_0^\infty B(\zeta) I_1(\beta r) \cos\left(\frac{\zeta}{\delta}z\right) d\zeta, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta}(r, z) = & \int_0^\infty A_1(\xi) \left[\xi J_0(\xi r) - \frac{2}{r} J_1(\xi r) \right] e^{-(\alpha/\delta)z} d\xi + \\ & \int_0^\infty B(\zeta) \left[\beta I_0(\beta r) - \frac{2}{r} I_1(\beta r) \right] \cos\left(\frac{\zeta}{\delta}z\right) d\zeta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau_{z\theta}(r, z) = -\delta \left[\int_0^\infty \alpha A_1(\xi) J_1(\xi r) e^{-(\alpha/\delta)z} d\xi - \int_0^\infty \zeta B(\zeta) I_1(\beta r) \sin\left(\frac{\zeta}{\delta}z\right) d\zeta \right], \quad (12)$$

上面 3 式中 $\alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2}$, $\beta = \sqrt{\zeta^2 - k^2}$; $A_1(\xi)$ 、 $B(\zeta)$ 为待定常数。

由边界条件(7) 和(6), 有如下对偶积分方程:

$$\int_0^\infty A(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0, \quad 1 < r < b, \quad (13)$$

$$\int_0^\infty \xi^{-1} [1 + H(\xi, \alpha)] A(\xi) J_1(\xi r) d\xi = p(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (14)$$

其中

$$A(\xi) = \alpha A_1(\xi), \quad (15)$$

$$H(\xi, \alpha) = \frac{\xi}{\alpha} - 1, \quad (16)$$

$$p(r) = - \left[\Omega r + \int_0^\infty B(\zeta) I_1(\beta r) d\zeta \right]. \quad (17)$$

由边界条件(8) 有

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \alpha^{-1} A(\xi) \left[\xi J_0(b\xi) - \frac{2}{b} J_1(b\xi) \right] e^{-(\alpha/\delta)z} d\xi + \\ & \int_0^\infty B(\zeta) \left[\beta I_0(b\beta) - \frac{2}{b} I_1(b\beta) \right] \cos\left(\frac{\zeta}{\delta}z\right) d\zeta = 0 \\ \Rightarrow B(\zeta) = & - \frac{2\delta}{\pi} \frac{1}{F(b\beta)} \int_0^\infty \frac{A(\xi)}{\alpha^2 + \zeta^2} \left[\xi J_0(b\xi) - \frac{2}{b} J_1(b\xi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$F(b\beta) = \beta I_0(b\beta) - \frac{2}{b} I_1(b\beta). \quad (19)$$

为求解对偶积分(13) 和(14), 我们令 $A(\xi)$ 为

$$A(\xi) = \frac{2\Omega\xi}{\pi} \int_0^\xi f(t) \sin(\xi t) dt, \quad (20)$$

这样方程(13) 自动满足。

将 $A(\xi)$ 值代入积分方程(14), 可导出第二类 Fredholm 积分方程

$$f(t) + \int_0^\infty u f(u) K(u, t) du = -2, \quad (21)$$

其中

$$K(u, t) = K_{11}(u, t) + K_{12}(u, t), \quad (22)$$

$$K_{11}(u, t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty H(\xi, \alpha) \sin(\xi u) \sin(\xi t) d\xi \quad (23)$$

$$K_{12}(u, t) = \frac{4}{\pi^2 t} \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\beta u) \text{sh}(\beta t)}{F(\beta)} \left[\xi K_0(\beta) + \frac{2}{b} K_1(\beta) \right] d\xi, \quad (24)$$

利用围道积分技巧^[10, 11] (见附录 I), 积分 $K_{11}(u, t)$ 可以转换为如下的有限积分

$$K_{11}(u, t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^k \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi u} \sin(\xi t) d\xi & u > t, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^k \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi t} \sin(\xi u) d\xi & u < t, \end{cases} \quad (25)$$

$$(26)$$

3 应力强度因子

刚性圆盘上的应力分布, 即平面 $z = 0$ 上的 $\tau_{\theta 0}(r, z)$ 的分布, 可由方程(12)求得, 即

$$\tau_{\theta 0}(r, 0) = - \delta \int_0^\infty A(\xi) J_1(\xi r) d\xi \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (27)$$

将(20)式中的 $A(\xi)$ 代入, 即得应力分布的表达式

$$\tau_{\theta 0}(r, 0) = - \frac{2\delta\Omega}{\pi} \frac{f(1)}{\sqrt{1-r^2}} + O(1). \quad (28)$$

定义应力强度因子 K_{SIF} 如下

$$K_{SIF} = \lim_{r \rightarrow 1} \left| \frac{\sqrt{1-r} \tau_{\theta 0}(r, 0)}{\Omega} \right|, \quad |r| < 1, \quad (29)$$

得

$$K_{SIF} = \frac{\sqrt{2}\delta}{\pi} |f(1)|. \quad (30)$$

4 数值结果

本问题的解要借助 Fredholm 积分方程(21)关于未知函数 $f(t)$ 的解。为确定不同 t 值的函数 $f(t)$, 我们用包含积分区间枢轴点处函数 $f(t)$ 的求积公式来表述积分方程, 给出一个联立的线性代数方程组。用正规方法求解这些代数方程, 得到枢轴点处的 $f(t)$ 。求得 $f(t)$ 后, 就可求出方程(30)中的应力强度因子 K_{SIF} 。

数值计算中, 我们考虑了若干横观各向同性介质。计算中用到的弹性常数列于表 1。

表 1 计算中的弹性常数

材料	弹性常数				
	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{33}	A_{44}
锌	1.628	0.508	0.362	0.627	0.385
蓝宝石	4.968	1.109	1.636	4.981	1.474
镁	5.970	2.620	2.170	6.170	1.640

材料常数取自文献[12]和文献[13]。材料锌在各种 b 值时的 K_{SIF} 值随无量纲频率的变化示于图 1。图 2、图 3 示出了不同 b 值时的材料各向异性对 K_{SIF} 的影响。

附 录 I

积分方程(23)中 $K_{11}(u, t)$ 的积分为

$$K_{11}(u, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty H(\xi, \alpha) \sin(\xi u) \sin(\xi t) d\xi, \quad (A1)$$

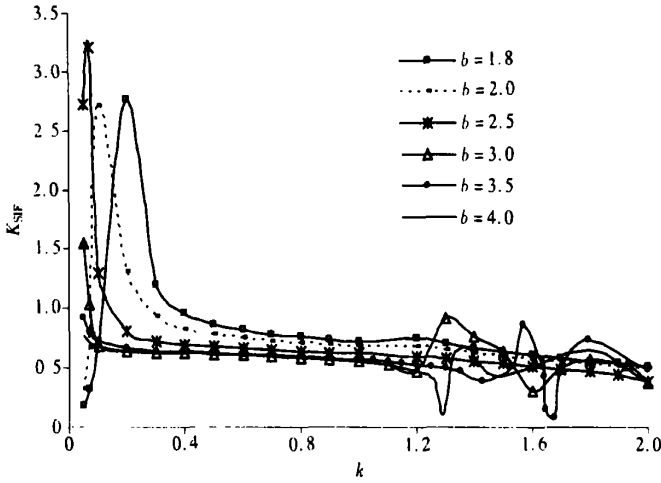


图 1 各向异性材料(锌)的应力强度因子 K_{SIF} 随无量纲频率 k 的变化

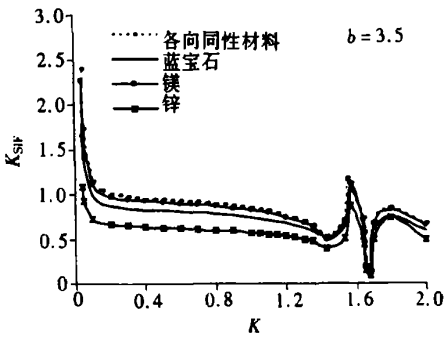


图 2 $b = 3.5$ 时, 几种各向异性材料的应力强度因子 K_{SIF} 与各向同性材料的比较

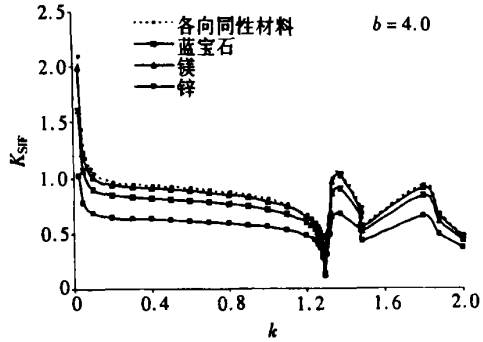


图 3 $b = 4$ 时, 几种各向异性材料的应力强度因子 K_{SIF} 与各向同性材料的比较

其中 $H(\xi, \alpha) = \frac{\xi}{\alpha} - 1, \alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2}$.

为进行(A1)的积分, 我们引入如下两个围道积分:

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} H(\xi, \alpha) e^{i\xi u} \sin(\xi y) d\xi, \quad u > t, \quad (A2)$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} H(\xi, \alpha) e^{i\xi u} \sin(\xi u) d\xi, \quad u < t, \quad (A3)$$

其中 Γ_1 和 Γ_2 为图 1 中定义的闭合围道, 两个支点为 $\pm k$. 这样 $u > t$ 和 $u < t$ 时沿围道 Γ_1 和 Γ_2 的 $K_{11}(u, t)$ 的积分可表示为

$$K_{11}(u, t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi i} \int_0^k \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi u} \sin(\xi y) d\xi, & u > t, \quad (A4) \\ \frac{2}{\pi i} \int_0^k \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi u} \sin(\xi u) d\xi & u < t, \quad (A5) \end{cases}$$

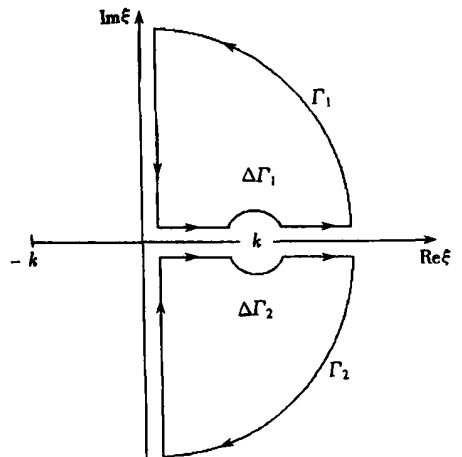


图 A1 方程(A1)中积分的围道

[参 考 文 献]

- [1] Sih G C, Embley G T. Response of a penny_shaped crack to impact waves[A]. Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference[C], 6, 1972, 473—487.
- [2] Sih G C, Embley G T. Sudden twisting penny_shaped crack[J]. J Appl Mech, 1972, 39(2): 395.
- [3] Chen E P. Elastodynamics response of a penny_shaped crack in a cylinder of finite radius[J]. Internat J Engg Sci, 1979, 17(4): 379—385.
- [4] Srivastava K N, Palaiya R M, Gupta O P. Interaction of elastic waves with a penny_shaped crack in an infinitely long cylinder[J]. J Elasticity, 1982, 12(1): 143—152.
- [5] Shindo Y, Nozaki H, Higaki H. Impact response of a finite crack in an orthotropic strip[J]. Acta Mechanica, 1986, 63: 87—104.
- [6] Shindo Y, Nozaki H. Impact response of a transversely isotropic cylinder with a penny_shaped crack[J]. Internat J Solids and Mechanics, 1987, 23(1): 187—199.
- [7] Mandal S C, Ghosh M L. Diffraction of torsional elastic waves by rigid annular disk at a bimaterial interface[J]. Engng Trans, 1993, 41(1): 97—116.
- [8] Manna S K, Ghosh S G, Mandal S C. Torsional oscillation of a rigid disk in an infinite cylinder[J]. J Tech Phys, 2003, 44: 343—347.
- [9] Lekhnitskii S G. Theory of Elastic of an Anisotropic Body [M]. Moscow: Mir Publication, 1981.
- [10] Sarkar J, Ghosh M L, Mandal S C. Diffraction of elastic waves by two parallel rigid strips embedded in an infinite orthotropic medium[J]. Internat J Engg Sci, 1995, 33(13): 1943—1958.
- [11] Jain D L, Kanwal R P. Diffraction of elastic waves by two coplanar and parallel rigid strips[J]. Internat J Engg Sci, 1972, 10(11): 961—975.
- [12] Brock L M. The coupled thermoelastic transversely isotropic bimaterial: Interface crack extension[J]. J Appl Mech, 2005, 72(1): 68—75.
- [13] Lusher C P, Hardy W N. Axisymmetric free vibrations of a transversely isotropic finite cylindrical rod[J]. J Appl Mech, 1988, 55(4): 855—862.

Torsional Oscillation of a Rigid Disk in an Infinite Transversely Isotropic Elastic Cylinder

Sakti Pada Barik, Mridula Kanoria, P. K. Chaudhuri
(Department of Applied Mathematics, University of Calcutta,
92, A. P. C. Road, Kolkata_700 009, India)

Abstract: In the present analysis torsional oscillation of a rigid disk in an infinite transversely isotropic elastic cylinder has been considered. The effects of anisotropy in the stress intensity factor have been shown graphically.

Key words: torsional oscillation; transversely isotropic material; dual integral equation; Fredholm integral equation; contour integration