

文章编号: 1000-0887(2004) 05_0542_09

有限变形下的等效应力和等效应变问题^{*}

周 , 秦伶俐, 黄文彬, 王红卫

(中国农业大学 应用力学研究所, 北京 100083)

(沈亚鹏推荐)

摘要: 重点讨论了在有限变形条件下, 弹塑性理论中的等效应力、等效应变是否仍然成立。选择了平面应力和平面应变下的单向压缩应力状态, 对这一问题进行了探讨。在这两种应力状态下, 在众多的应力应变描述中, 对数应变与旋转 Kirchhoff 应力得到的应力应变曲线与实验数据符合良好。

关键词: 有限变形; 塑性本构; 等效应力; 等效应变; 体积不可压缩

中图分类号: O344 文献标识码: A

引 言

小变形塑性理论的一个最成功的简化就是等效应力、等效应变的概念, 将一个六维问题简化为一个一维问题, 然而等效应力、等效应变的思想在有限变形条件下是否成立? 这正是本文所要关注的问题。

在有限变形情况下, 应力应变的描述是多种多样的, 选用什么应力应变对直接影响材料参数的选择以及计算可否收敛。黄文彬等对这一问题进行了探讨^[1~3]。

在研究有限变形的塑性理论中, 人们更多的关注弹性变形与塑性变形如何分离、在塑性本构中如何消除刚体转动的影响, 而对有限变形下等效应力、等效应变的概念是否成立关注不够, 在涉及有限变形塑性有限元方法的文献中, 等效应力、等效应变的概念被广泛采用。例如: 研究塑性损伤的 Gerson 模型^[4], 孔洞的扩展和融合^[5], 界面的开裂^[6]以及金属基复合材料宏观性质等问题的文献中。由于在有限变形中, 应力、应变都有多种定义形式, 是不是对所有的应力应变对 Mises 等效都成立。

本文选择了平面应力状态和平面应变状态下的单向压缩, 在这两种应力状态下, 研究了小变形的应力应变及有限变形下的三种常用的应力应变对, 比较其等效曲线符合的程度。整个研究遵循以下思路: 做单向压缩实验, 得到压缩曲线, 对于不同的应力应变对, 根据等效应力、等效应变的思想, 预测侧向变形受约束时, 压缩实验应满足的曲线, 与实验数据进行比较, 满足好的应力应变对就是等效应力、等效应变符合好的。由于变形都比较大, 弹性变形可以忽略, 本文采用刚塑性模型。

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2003_12_18

作者简介: 周 (1962-), 女, 湖南人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_10_62336514(o); Fax: + 86_10_62336777; E_mail: fem@cau.edu.cn)。

1 压缩实验

我们用 p_1 表示单向压缩时的名义应力, 定义为 $p_1 = P_1/A_0$, u_1 表示长度方向的相对缩短, 定义为 $u_1 = -\Delta l/l_0$, 其中 P_1 为轴向压力, A_0, l_0 分别为初始截面面积和初始长度, p_1 与 u_1 的关系可由实验测得, 由于 u_1 趋向于 1 时, p_1 应趋向无穷大, 所以用下式对实验曲线进行拟合

$$p_1 = \frac{1}{1-u_1}(a + bu_1^n), \quad (1)$$

其中: $a = 13.692 \text{ MPa}$, $b = 3.535 \text{ MPa}$, $n = 0.45524$, 实验数据和拟合曲线符合很好, 如图 1 所示。

在此基础上, 我们又进行了一个方向变形受约束的压缩实验, 用 p_2 表示此时的名义应力, u_2 表示此时的长度方向的相对缩短, 测得实验数据也表示在图 1 中。

如果等效应力、等效应变的思想成立, 两个实验应该具有相同的等效应力应变曲线, 等效应力、等效应变的定义式分别如下:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}[(\alpha_x - \alpha_y)^2 + (\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]}. \quad (3)$$

由此我们可以由压缩曲线(1)推得侧向约束时, 压缩的预测曲线, 比较预测曲线与图 1 的实验数据是否符合, 从而判断等效应力、等效应变的思想是否成立。

2 给定应力状态下应力应变的定义

在小变形时, 应力应变的定义是唯一的, 但在有限变形时则是多种多样的, 一般认为, 在本构关系中选用什么应力应变对都是可以的, 但在塑性理论中, 由于等效应力、等效应变的采用, 所以应力应变并不可以任意选择, 也就是说, 并非对所有的应力应变对等效应力等效应变的思想都成立, 本文就是要对这一问题进行讨论。

2.1 单向压缩应力状态

首先我们给出几种最常用的应力应变在单向压缩应力状态下的表达式, A_0, l_0 分别为初始截面面积和初始长度, A, l 分别为现实截面面积和现实长度, 则:

(I) 名义应力(小变形应力)、名义应变(小变形应变)

$$\alpha_{x0} = \frac{P_1}{A_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (4)$$

(II) Euler 应力、Almansi 应变

$$\alpha_{x1} = \frac{P_1}{A}, \quad \varepsilon_1 = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2}. \quad (5)$$

(III) Kirchhoff 应力、Green 应变

$$\alpha_{x2} = \frac{l_0 P_1}{l A_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2}. \quad (6)$$

(IV) 旋转 Kirchhoff 应力、对数应变

$$\alpha_{x3} = \frac{P_1}{A}, \quad \varepsilon_3 = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (7)$$

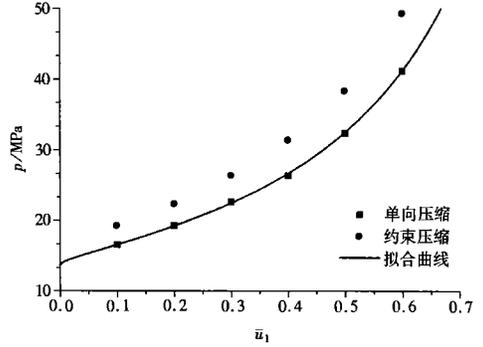


图 1 实验数据及拟合曲线

试件轴向尺寸的变化直接由实验测出, 横向尺寸的变化则是由体积不可压缩条件求出, 但如何描述体积不可压缩条件则有所分歧, 在小变形理论中, 体积不可压缩条件被表述为:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (8)$$

而在有限变形理论中体积不可压缩应被表述为:

$$J = |F| = \begin{vmatrix} x, X & x, Y & x, Z \\ y, X & y, Y & y, Z \\ z, X & z, Y & z, Z \end{vmatrix} = 1, \quad (9)$$

式中: (x, y, z) 为现实坐标, (X, Y, Z) 为初始坐标, $(\cdot, X), (\cdot, Y), (\cdot, Z)$ 分别为对 X, Y, Z 的导数, 只有对数应变, 二者是完全等价的, 对于其他应变, 虽然有限变形时(9)式是合理的, 但在塑性流动法则中, (8)式是被自然引入的, 而要引入(9)式则必须放弃传统的塑性流动法则, 并且强制(9)式成立, 因此, (8)式还在被广泛采用. 所以, 本文分别就对由(8)式和(9)式导出的结果进行讨论.

2.2 侧向约束的压缩状态

我们在单向压缩下求得不同应力应变的压缩曲线, 然后根据等效应力、等效应变的思想预测侧

向约束下的压缩曲线, 为了使问题更具有一般性, 我们在压缩的同时加入了刚体转动, 则试件各点的位移如图2所示, 长和宽分别为 l 和 a 的矩形, 变形后为 l_1 和 a_1 , 其中: $l_1 = l(1 - u_2)$, $a_1 = a(1 + v_2)$, 初始坐标为 (X, Y) 的点, 变形后为:

$$\begin{cases} x = X(1 - u_2 \cos \theta) - Y(1 + v_2 \sin \theta), \\ y = X(1 - u_2 \sin \theta) + Y(1 + v_2 \cos \theta). \end{cases} \quad (10)$$

在这一应力应变状态下, 各应力应变分别为:

(I) 名义应力(小变形应力)、名义应变(小变形应变)

$$\alpha_{x0} = -p_2 \cos^2 \theta, \quad \alpha_{y0} = -p_2 \sin^2 \theta, \quad \alpha_{xy0} = -p_2 \sin \theta \cos \theta, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{x0} = (1 - u_2 \cos \theta - 1), \quad \varepsilon_{y0} = (1 + v_2 \cos \theta - 1), \quad \varepsilon_{xy0} = -0.5(u_2 + v_2 \sin \theta). \quad (12)$$

(II) Euler 应力、Almansi 应变

$$\alpha_{x1} = -\frac{p_2}{1 + v_2} \cos^2 \theta, \quad \alpha_{y1} = -\frac{p_2}{1 + v_2} \sin^2 \theta, \quad \alpha_{xy1} = -\frac{p_2}{1 + v_2} \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{(1 + v_2)^2} - \frac{\cos^2 \theta}{(1 - u_2)^2} \right], \\ \varepsilon_{y1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\cos^2 \theta}{(1 + v_2)^2} - \frac{\sin^2 \theta}{(1 - u_2)^2} \right], \\ \varepsilon_{xy1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 + v_2)^2} - \frac{1}{(1 - u_2)^2} \right] \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (14)$$

(III) Kirchhoff 应力、Green 应变

$$\alpha_{x2} = -\frac{p_2}{1 - u_2}, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{xy2} = 0 \quad (15)$$

$$\varepsilon_{x2} = 0.5[(1 - u_2)^{-2} - 1], \quad \varepsilon_{y2} = 0.5[(1 + v_2)^{-2} - 1], \quad \varepsilon_{xy2} = 0 \quad (16)$$

(IV) 旋转 Kirchhoff 应力、对数应变

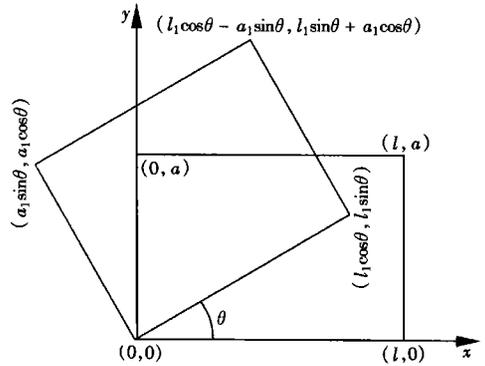


图2 单向压缩变形

$$\alpha_{x3} = -p_2(1 - u_2), \quad \alpha_{y3} = \alpha_{xy3} = 0 \quad (17)$$

$$\varepsilon_{x3} = \ln(1 - u_2), \quad \varepsilon_{y3} = \ln(1 + v_2), \quad \varepsilon_{xy3} = 0 \quad (18)$$

式中的 v_2 需根据体积不可压缩条件确定, 下面我们将就两种不同的体积不可压缩条件进行研究。

3 用 $\varepsilon_i = 0$ 作为体积不可压缩条件

本小节是以 (8) 式作为体积不可压缩条件, 由单向压缩曲线 (1) 出发, 根据不同应力应变的定义, 可以得到单向压缩时的不同的等效应力应变曲线。

在侧向受约束的压缩中, 我们由公式 (11) ~ (18) 同样可以得到用 p_2 表示的等效应力, 用 u_2 表示等效应变, 而此时的等效应力应变曲线应与单向压缩时相同, 由此可以由不同的应力应变, 求得不同的 p_2 随 u_2 的变化关系。

由 Mises 塑性流动法则: $\sigma_{kl} = \lambda S_{kl}$, 其中, S_{kl} 为应力偏量, 对于比例加载可得全量关系: $\varepsilon_{kl} = \lambda S_{kl}$ 。对于单向压缩情况, 等效应力为: $\sigma_i = |\alpha_{xi}|$, 等效应变为: $\varepsilon_i = |\varepsilon_{xi}|$, 对于侧向受约束压缩情况, 等效应力为

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{(\alpha_{xi} - \alpha_{yi})^2 + 4\sigma_{xyi}^2} / 2, \quad (19)$$

等效应变为:

$$\varepsilon_i = 2 \sqrt{\varepsilon_{xi}^2 - \varepsilon_{xi}\varepsilon_{yi} + \varepsilon_{yi}^2 + 3\varepsilon_{xyi}^2} / 3, \quad (20)$$

这里, i 取 0, 1, 2, 3, 分别代表不同的应力和应变, 对于不同的应力应变, 上述等效应力、等效应变的表达均成立。

3.1 名义应力与名义应变

对于单向压缩情况, 等效应力、等效应变分别为: $\sigma_0 = |\alpha_{x0}| = p_1$, $\varepsilon_0 = |\varepsilon_{x0}| = u_1$, 则应力应变曲线为:

$$\sigma_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon_0} (a + b\varepsilon_0^n) \quad (21)$$

对于侧向受约束且含刚体转动的压缩问题, 等效应力、等效应变分别为:

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} |\alpha_{x0}| = \frac{\sqrt{3}}{2} p_2, \quad (22)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[u_2 - 1 + \frac{1}{\cos\theta} \right]. \quad (23)$$

由 (23) 式可以看到, 名义应变的等效应变中包含转角 θ , 也就是说, 转动会引起等效应变, 所以, 名义应力、名义应变是绝对不适合用来描述有限变形的, 因为它无法消除刚体转动的影响, 由于等效应力应变曲线应满足 (21) 式, 由此可得:

$$p_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \left[u_2 - 1 + \frac{1}{\cos\theta} \right]} \left[a + b \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left[u_2 - 1 + \frac{1}{\cos\theta} \right] \right)^n \right]. \quad (24)$$

(24) 式即为在小变形理论下, 根据等效应力、等效应变的思想, 由单向压缩应力应变曲线预测的有侧向约束且有转动时的压缩曲线, 由于小变形理论不能消除刚体转动的影响, (24) 式中包含 θ , 所以显然不可取。

3.2 Almansi 应变与 Euler 应力

在单向压缩时:

$$\varepsilon_1 = |\varepsilon_{x1}| = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - u_1)^2} - 1 \right]. \quad (25)$$

等效应力应变曲线为:

$$\sigma_1 = |\alpha_{x1}| = p_1(1 - \varepsilon_1) = (1 - \varepsilon_1) \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} [a + b(1 - 1/\sqrt{1 + 2\varepsilon_1})^n] \quad (26)$$

对于有侧向约束的压缩问题

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{(1 - u_2)^2} - 1 \right] \quad (27)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p_2}{1 + \nu_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} p_2 \sqrt{1 - \sqrt{3}\varepsilon_1} \quad (28)$$

应与平面应力状态有同样的应力应变曲线, 所以可以得到, 平面应变压缩时的下压力与下压率的关系为:

$$p_2 = \frac{2(1 - \varepsilon_1) \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}}{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\varepsilon_1} [a + b(1 - 1/\sqrt{1 + 2\varepsilon_1})^n] \quad (29)$$

其中, ε_1 由(27)式确定。至此, 我们得到了由 Almansi 应变与 Euler 应力预测的、有侧向约束的压缩曲线。

3.3 Green 应变与 Kirchhoff 应力

在单向压缩时:

$$\varepsilon_2 = |\varepsilon_{x2}| = 0.5[1 - (1 - u_1)^2] \quad (30)$$

等效应力应变曲线为:

$$\sigma_2 = |\alpha_{x2}| = \frac{p_1}{1 - u_1} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_2} [a + b(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_2})^n] \quad (31)$$

对于有侧向约束的压缩问题

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_{x2}| = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 - (1 - u_2)^2] \quad (32)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} |\alpha_{x2}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p_2}{1 - u_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p_2}{\sqrt{1 - \sqrt{3}\varepsilon_2}} \quad (33)$$

应与平面应力状态有同样的应力应变曲线, 所以可以得到, 平面应变压缩时的下压力与下压率的关系为:

$$p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{3}\varepsilon_2}}{1 - 2\varepsilon_2} [a + b(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_2})^n] \quad (34)$$

其中, ε_2 由(32)式确定。至此, 我们得到了由 Green 应变与 Kirchhoff 应力预测的、有侧向约束的压缩曲线。

3.4 对数应变与旋转 Kirchhoff 应力

在单向压缩时:

$$\varepsilon_3 = |\varepsilon_{x3}| = -\ln(1 - u_1) \quad (35)$$

等效应力应变曲线为:

$$\sigma_3 = |\alpha_{x3}| = p_1 \exp(-\varepsilon_3) = a + b(1 - \exp(-\varepsilon_3))^n \quad (36)$$

对于有侧向约束的压缩问题

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_{x3}| = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln(1 - u_2) \quad (37)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} |\alpha_{x3}| = \frac{\sqrt{3}}{2} p_2 (1 - u_2) \quad (38)$$

应与平面应力状态有同样的应力应变曲线, 所以可以得到, 平面应变压缩时的下压力与下压率

的关系为:

$$p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}(1-u_2)} [a + b(1-u_2)^{2\sqrt{3}n}] \quad (39)$$

我们得到了由对数应变与旋转 Kirchhoff 应力预测的, 有侧向约束的压缩曲线。

4 用 $J = 1$ 作为体积不可压缩条件

在上一节中, 我们详细讨论了以(8)式作为体积不可压缩条件时, 用各种常用的应力应变对的等效应力、等效应变的思想, 预测的有侧向约束的压缩曲线, 但是, 很明显对于有限变形体积不可压缩条件应为(9)式, 可是, 由于 Misess 塑性流动法则就自然包含了(8)式, 而只有对数应变(8)式和(9)式是等价的, 对于其他应变, 要放弃(8)式就必须放弃 Misess 塑性流动法则, 为此我们提出了一个修正的 Misess 塑性流动法则, 采用 Misess 塑性流动法则的全量理论, 则有:

$$\varepsilon_i = \lambda(\alpha_i - \alpha), \quad \varepsilon_j = \lambda(\alpha_j - \alpha), \quad \varepsilon_k = \lambda(\alpha_k - \alpha), \quad (40)$$

式中, i 取不同的数值, 代表有限变形下的不同的应力应变对, α_i 在小变形或满足(8)式时为平均应力, 在有限变形时是未定值, 由体积不可压缩条件(9)式确定, 由(40)式可得, 在平面应变条件下有:

$$\alpha_{2i} = \alpha_i = \frac{\alpha_i \varepsilon_i - \alpha_j \varepsilon_j}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \quad (41)$$

在本节中, 我们将采用(9)式作为体积不可压缩条件, 预测有侧向约束且含刚体转动时的压缩曲线。

4.1 $J = 1$ 下的等效应力等效应变及塑性 Poisson 比

在小变形条件下, 塑性 Poisson 比 $\mu_p = 0.5$, 在有限变形下, 采用(9)式作为体积不可压缩条件, 则并不是所有应变的塑性 Poisson 比 μ_p 都是 $0.5^{[5]}$, 我们首先在单向压缩条件下对此进行讨论。

在单向压缩时, 根据塑性 Poisson 比 μ_p 定义有

$$\varepsilon_i = \varepsilon_k = -\mu_{pi} \varepsilon_j \quad (42)$$

由体积不可压缩条件(9)式, 及各应变的定义(4)~(7)可得:

$$\begin{cases} \mu_{p0} = \frac{1 - \sqrt{1-u_1}}{u_1 \sqrt{1-u_1}}, & \mu_{p1} = \frac{(1-u_1)^2}{2-u_1}, \\ \mu_{p2} = \frac{1}{(1-u_1)(2-u_1)}, & \mu_{p3} = 0.5 \end{cases} \quad (43)$$

由(43)式可见, 并不是所有的 μ_p 都恒等于 0.5, 只有对数应变的 μ_p 恒等于 0.5, 而(8)式等价于 $\mu_p = 0.5$, 因此, 除了对数应变外, 对于其他的应变(8)式不再成立。

相应的等效应力、等效应变为

$$\sigma_i = |\alpha_i|, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \mu_{pi} |\varepsilon_i|) \quad (44)$$

对于带刚体转动的有侧向约束的压缩问题相应的等效应变为

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + 3\varepsilon_{xy}^2}, \quad (45)$$

等效应力为

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[\alpha_x^2 - \alpha_y^2 + (\sigma_y - \alpha_x)^2 + (\alpha_x - \alpha_x)^2 + 6\tau_{xy}^2]}, \quad (46)$$

由(9)式可得 $(1-u_2)(1+v_2) = 1$, 令 $c = 1-u_2$, 则 $1+v_2 = 1/c$ 。

4.2 Almansi 应变与 Euler 应力

在单向压缩时:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2}{3}(1 + \mu_{p1} | \varepsilon_1 |) = \frac{1}{3}(1 + \mu_{p1} \left[\frac{1}{(1 - u_1)^2} - 1 \right]) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(1 - u_1)^2} - (1 - u_1) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

求解方程(47), 可得合理解为

$$u_1 = 1 + \varepsilon_1 - \sqrt[3]{0.5 - \varepsilon_1^3} + \sqrt{0.25 - \varepsilon_1^3} + \sqrt[3]{0.5 - \varepsilon_1^3} - \sqrt{0.25 - \varepsilon_1^3}. \quad (48)$$

将(48)代入(43)式可得 Poisson 比随等效应变的变化曲线, 等效应力为

$$\sigma_1 = | \alpha_{11} | = p_1(1 - u_1) = a + bu_1^n, \quad (49)$$

式中 u_1 由(48)式确定, (49)即给出了等效应力应变曲线。

对于带刚体转动的有侧向约束的压缩问题将(14)代入(45)可得

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - c^2}{3c^2} \sqrt{1 + c^2 + c^4}. \quad (50)$$

将(13)、(14)式代入(41)式可得

$$\alpha_{21} = -\frac{p_2 c^3}{1 + c^2}. \quad (51)$$

将(13)和(51)式代入(46)式可得

$$\sigma_1 = p_2 \frac{c \sqrt{1 + c^2 + c^4}}{1 + c^2}. \quad (52)$$

应与平面应力状态有同样的应力应变曲线, 所以可以得到, 平面应变压缩时的下压力与下压率的关系为:

$$p_2 = \frac{1 + c^2}{c \sqrt{1 + c^2 + c^4}} (a + bu_1^n), \quad (53)$$

式中, u_1 由(48)式及(50)式确定, 由此可得由 Almansi 应变与 Euler 应力预测的、有侧向约束的压缩问题的下压力 p_2 与下压率 u_2 之间的关系。

4.3 Green 应变与 Kirchhoff 应力

在单向压缩时:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{2}{3}(1 + \mu_{p2} | \varepsilon_2 |) = \frac{1}{3}(1 + \mu_{p2} [1 - (1 - u_1)^2]) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 - u_1} - (1 - u_1) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

方程的合理解为:

$$u_1 = 1 - \sqrt[3]{0.5 + \sqrt{\varepsilon_2^3 + 0.25}} + \sqrt[3]{0.5 - \sqrt{\varepsilon_2^3 + 0.25}}. \quad (55)$$

等效应力应变曲线为:

$$\sigma_2 = | \alpha_{22} | = \frac{p_1}{1 - u_1} = \frac{1}{(1 - u_1)^2} (a + bu_1^n). \quad (56)$$

(56)为等效应力应变曲线, 式中 u_1 由(55)式确定。

对于带刚体转动的有侧向约束的压缩问题

$$\varepsilon_2 = \frac{1 - c^2}{3c^2} \sqrt{1 + c^2 + c^4}. \quad (57)$$

将(15)、(16)式代入(41)式可得

$$\alpha_2 = - \frac{p_2}{c(1+c^2)} \quad (58)$$

将(15)和(57)式代入(46)式可得

$$\alpha_2 = \frac{p_2}{c(1+c^2)} \sqrt{1+c^2+c^4} \quad (59)$$

应与(56)相同,所以可以得到:

$$p_2 = \frac{(a + bu_1^n)}{(1-u_1^2)} \frac{c(1+c^2)}{\sqrt{1+c^2+c^4}} \quad (60)$$

式中的 u_1 由(55)式确定, (55)式中的 ε_2 由(57)式确定, 而 $c = 1 - u_2$, 所以, (60)式给出了由 Green 应变与 Kirchhoff 应力预测的, 侧向约束时下压力与下压率的关系。

5 结 果

图3给出了分别以(8)式和(9)式作为体积不可压缩条件时, 由单向压缩实验数据得到的不同应力应变对的等效应力等效应变曲线, 由图中可以看到, 不同的应力应变对的曲线完全不同, 在单向压缩时, 只有 $\sigma_3-\varepsilon_3$ 和以(9)式作为体积不可压缩条件时的 $\sigma_1-\varepsilon_1$ 的应力应变曲线可以用幂硬化拟合, 其他的应力应变曲线则无法用幂硬化函数拟合, 如果发生了误用, 会引起很大的误差。

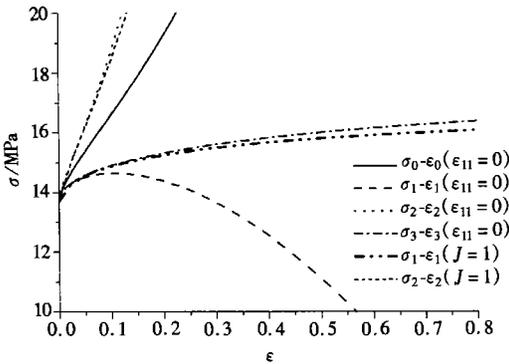


图3 由单向拉伸实验得到的等效应力等效应变曲线

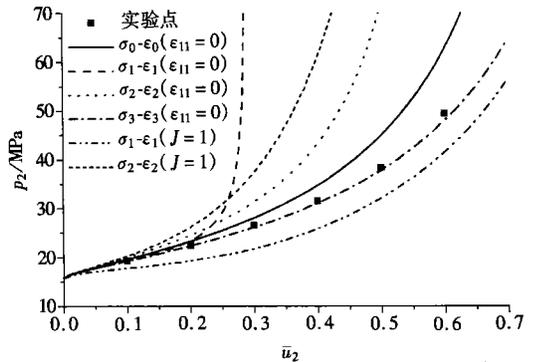


图4 由不同算法预测的有侧向约束时的压缩曲线与实验的比较

图4给出了分别以(8)式和(9)式作为体积不可压缩条件时, 由单向压缩实验曲线, 根据不同应力应变对的等效应力、等效应变的思想, 预测的有侧向约束时的压缩曲线, 由图中可以看到, 不同的应力应变对的曲线完全不同, 与实验数据进行比较, 我们可以看到, 旋转 Kirchhoff 应力和对数应变的预测曲线与实验曲线最为符合, 以(8)式作为体积不可压缩条件时, $\sigma_1-\varepsilon_1$ 及 $\sigma_2-\varepsilon_2$ 曲线的变形都受到限制, $\sigma_1-\varepsilon_1$ 的 $u_2 \leq 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293$, $\sigma_2-\varepsilon_2$ 的 $u_2 \leq 1 - \sqrt{1-\sqrt{3}/2} = 0.634$, 即当下压率超过这一限制则无法求出问题的解, 但是, 在变形不太大时, 与实验数据符合较好, 特别是 $\sigma_1-\varepsilon_1$ 。以(9)式作为体积不可压缩条件时, $\sigma_1-\varepsilon_1$ 和 $\sigma_2-\varepsilon_2$ 都可求出全程解, 但与实验数据符合的都不是很好, 而且, 即使是变形不太大时就已经符合的不是很好, 即当下压率小于0.2时, (9)式作为体积不可压缩条件时的结果还没有(8)式的结果好, 说明应力应变对 $\sigma_1-\varepsilon_1$ 和 $\sigma_2-\varepsilon_2$ 的等效应力、等效应变的理论都不成立, 图中 $\sigma_0-\varepsilon_0$ 的曲线我们给出的是 $\theta = 0$ 时的情况, 可以看到预测结果在没有旋转的情况下并不明显的比有限变形除对数应变的其它结果差, 但由(27)式可以看到, 若包含转动则会明显恶化, 我们令其边压缩, 边做刚体转动, $u_2 =$

0.5 时, $\theta = 45^\circ$, 则其结果已比其他有限变形的结果都差。只有 σ_3 、 ε_3 在全程都与实验数据符合良好, 而且, 对数应变的体积不可压缩条件(8)式与(9)式等价, 所以, 小变形塑性理论的成果都可无障碍地推广至有限变形。

6 结 论

综上所述, 由于除对数应变以外的其他应变, 在进行塑性计算时都存在两个重大问题, (I) 体积不可压缩条件(8)式在有限变形时不成立, 所以, 小变形塑性理论中的塑性流动法则必须放弃, 本文在一维情况下提出了一种修正方案, 但要应用至三维还有障碍; (II) 等效应力等效应变的思想在有限变形范围不再成立。由于上述两个问题的存在, 现有的小变形塑性理论无法推广至有限变形, 如果要使用上述应力应变对则必须建立全新的有限变形塑性理论。而选用对数应变和旋转 Kirchhoff 应力则无上述问题, 小变形塑性理论的成果都可无障碍地推广至有限变形。由此可见, 建立有限变形塑性理论的最佳途径就是选用对数应变和旋转 Kirchhoff 应力。

[参 考 文 献]

- [1] 黄文彬、杨青春. 杆件在大变形时的弹性系数[J]. 力学与实践, 1996, 18(6): 12—14.
- [2] 黄文彬、杨青春. 杆件有限变形时的泊松比[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 30—31.
- [3] 徐春晖、黄文彬, 王红卫, 等. 金属有限变形问题中应力应变的选择[J]. 中国农业大学学报, 2000, 5(4): 30—34.
- [4] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth—Part I: Yield criteria and flow rules for porous ductile materials[J]. ASME J Eng Mater Tech, 1977, 99(1): 2—15.
- [5] Miyamoto H, Kikuchi M, Kubo M. Some contribution to process zone fracture mechanics[J]. Computational Mechanics, 1990, 6(2): 423—433.
- [6] Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding[J]. J Appl Mech, 1987, 54(3): 525—531.

Effective Stress and Strain in Finite Deformation

ZHOU Zhe, QIN Ling_li, HUANG Wen_bin, WANG Hong_wei

(Applied Mechanics Institute, China Agricultural University,
Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: Whether the concept of effective stress and strain in elastic plastic theory is still valid under the condition of finite deformation was mainly discussed. The uni_axial compression experiments in plane stress and plane strain states were chosen for study. In the two kinds of stress states, the stress_strain curve described by logarithm strain and rotated Kirchhoff stress matches the experiments data better than the curves defined by other stress_strain description.

Key words: finite deformation; plastic constitutive; effective stress; effective strain; volume invariability