文章编号: 1000_0887(2006) 06_0750_07

用于积分方程解的函数值 Padé_型逼近的正交多项式和行列式公式*

顾传青, 潘宝珍, 吴蓓蓓

(上海大学 数学系, 上海 200444)

(叶志明推荐)

摘要: 为了求解第二类 Fredholm 积分方程, 引入了一个广义线性泛函, 从而定义了一种新的函数值Padé_型逼近. 借助于积分方程解的幂级数展开式,这种逼近方法可用来构造积分方程的近似解. 定义了Padé_型逼近的正交多项式,在此基础上给出了两种形式的实用的分子行列式和分母行列式公式.

关 键 词: 广义线性泛函; 函数值; Padé_型逼近; Fredholm 积分方程; 正交多项式; 行列式公式

中图分类号: O241.83 文献标识码: A

引 言

设第二类 Fredholm 积分方程为

$$x(s) = y(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \qquad a \leqslant s, t \leqslant b, \tag{1}$$

其中 $K(s,t)$ 和 $y(s)$ 分别是正方形区域$[a,b]\times[a,b]$ 和区间$[a,b]$ 上的连续函数. 假定方程(1) 的解 $x(s)$ 可以展开为一个具有函数值系数的幂级数

$$x(s) = f(s,\lambda) = y_0(s) + y_1(s)\lambda + y_2(s)\lambda^2 + \cdots + y_n(s)\lambda^n + \cdots, \tag{2}$$

其中
$$y_i(s) = \int_a^b K^i(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t, \qquad i \geqslant 1,\ (y_0(s) = y(s)). \tag{3}$$

式(3) 中的 $K^i(s,t)$ 称为第 i 阶迭核. 在本文中, 假设 $x(s) = f(s,\lambda)$ 作为 λ 的函数在 $\lambda=0$ 是解析的, 于是, 对于足够小的$|\lambda|$, 级数(2) 是收敛的. 同时, $y_i(s)\in L^2[a,b]$ 是实平方可积函数, $y_i(s)$ 和 $y_j(s)$ 的内积定义为

$$(y_i(s), y_j(s)) = \int_a^b y_i(s)y_j(s)\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

且有范数公式

$$\| y_i(s) \| = \sqrt{(y_i(s), y_i(s))} = \left\{\int_a^b y_i^2(s)\,\mathrm{d}s\right\}^{1/2}. \tag{5}$$

---

* 收稿日期: 2004_03_30; 修订日期: 2006_02_24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271074)
作者简介: 顾传青(1955—), 男, 江苏江都人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: +86_21_66132924; E_mail: cqgu@staff.shu.edu.cn).

一般来说, 第二类 Fredholm 积分方程(1)的解通常是带有极点的非线性函数, 或称为有理函数· 由于这个原因, 国内外有些学者利用 Padé 逼近的方法来求方程(1)的解或近似解(Chisholm[1])· 近年来, 有些学者利用广义逆函数值 Padé 逼近的方法来求方程(1)的近似解, 也用来研究加速幂级数(2)的收敛性和估计积分方程的特征值的问题(Graves_Morris[2], 顾传青和李春景[3,4])· 但是, 广义逆函数值 Padé 逼近方法有一个不足之处, 就是它只能构造分母多项式的阶数为偶数阶的逼近公式· 为了弥补这个不足之处, 本文引入了一个广义线性泛函, 从而定义了一种新的函数值 Padé_型逼近· 它的特点是: 由第二类 Fredholm 积分方程的解的幂级数展开式(2), 利用函数值 Padé_型逼近方法来构造积分方程的近似解· 定义了函数值 Padé_型逼近的正交多项式, 在此基础上分别在第2节和第3节给出了逼近公式的简洁而实用的分子行列式和分母行列式公式·

1　定义和构造

Brezinski 和许多作者[5] 引入和改进了数量 Padé_型逼近· 数量 Padé_型逼近与正交多项式是紧密联系的· Draux[6]和 Salam[7] 分别将数量 Padé_型逼近推广到非代数的情形和向量的情形· 顾传青[8] 引入了矩阵 Padé_型逼近, 并将这种方法应用到多变量线性动力系统的模型简化问题·

设 $\mathscr{P}$ 是一元多项式的集合, 而 C 是复数的集合· 设 $\Phi:\mathscr{P}\to C$ 是一个作用于多项式空间上的广义线性泛函, 定义为

$$\Phi(x^n) = y_n(s), \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{6}$$

设 $|x\lambda| < 1$, 且有展开式 $(1 - x\lambda)^{-1} = 1 + x\lambda + (x\lambda)^2 + \cdots$· 给定幂级数(2), 从广义线性泛函(6)和上面的展开式, 得到

$$\Phi((1 - x\lambda)^{-1}) = \Phi(1 + x\lambda + (x\lambda)^2 + \cdots) =$$
$$y_0(s) + y_1(s)\lambda + y_2(s)\lambda^2 + \cdots + y_n(s)\lambda^n + \cdots = f(s, \lambda)·$$

设 $v \in \mathscr{P}_n$ 是次数为 n 的一元多项式

$$v(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n, \tag{7}$$

并假定 $b_n \neq 0$· 定义具有函数值系数的多项式 W 为

$$W(s, \lambda) = \Phi\left(\frac{v(x) - v(\lambda)}{x - \lambda}\right)· \tag{8}$$

注意到 Φ 是作用于多项式空间上的广义线性泛函, 因而 W 是关于 λ 次数为 $n-1$ 的具有函数值系数的多项式· 再令

$$\tilde{v}(\lambda) = \lambda^n v(\lambda^{-1}), \quad \tilde{W}(s, \lambda) = \lambda^{n-1} W(s, \lambda^{-1})· \tag{9}$$

下面两个定理的证明是明显的(可参考文献[5])·

定理 1.1　设 $v(0) \neq 0$, 则成立

$$\tilde{W}(s, \lambda)/\tilde{v}(\lambda) - f(s, \lambda) = O(\lambda^n)·$$

定义 1.2　给定幂级数(2), 有理函数 $R_{n-1,n}(s, \lambda) = \tilde{W}(s, \lambda)/\tilde{v}(\lambda)$ 称为 $(n-1, n)$ 阶函数值 Padé_型逼近, 记为 $(n-1/n)_f(s, \lambda)$·

设 $\Phi^{(l)}:\mathscr{P}\to C$ 是一个作用于多项式空间上的广义线性泛函, 定义为

$$\Phi^{(l)}(x^k) = y_{l+k}(s), \qquad k = 0, 1, \cdots;\ l = m - n + 1 \tag{10}$$

设
$$W_l(s, \lambda) = \Phi^{(m-n+1)}\left(\frac{v(x) - v(\lambda)}{x - \lambda}\right) \tag{11}$$

和 $$W_l(s, \lambda) = \lambda^{n-1} W_l(s, \lambda^{-1})\cdot \tag{12}$$

根据构造公式(9)、(10)和(12), 定义

$$P_{mn}(s, \lambda) = v(\lambda)\sum_{i=0}^{m-n} y_i(s)\lambda^i + \lambda^{m-n+1}W_l(s, \lambda), \qquad m \geqslant n\cdot \tag{13}$$

定理 1. 3 设 $v(0) \neq 0$, 则成立

$$P_{mn}(s, \lambda)/v(\lambda) - f(s, \lambda) = O(\lambda^{m+1})\cdot$$

定义 1. 4 给定幂级数(2), 有理函数 $R_{m,n}(s, \lambda) = P_{mn}(s, \lambda)/v(\lambda)$ 称为(m, n)阶函数值 Pad _型逼近, 记为$(n/n)_f(s, \lambda)\cdot$

定理 1. 5(误差公式) 设 $v(\lambda) \neq 0$, 则成立

$$(\text{i})\ f(s, \lambda) - \left(n - \frac{1}{n}\right)_f(s, \lambda) = \frac{\lambda^n}{v(\lambda)}\phi\left(\frac{v(x)}{1 - x\lambda}\right);$$

$$(\text{ii})\ f(s, \lambda) - \left(\frac{m}{n}\right)_f(s, \lambda) = \frac{\lambda^{m+1}}{v(\lambda)}\phi^{(m-n+1)}\left(\frac{v(x)}{1 - x\lambda}\right)\cdot$$

证 只证(i)• 注意 ϕ 是作用在多项式空间上的线性泛函, 故有

$$W(s, \lambda) = \lambda^{n-1}W(s, \lambda^{-1}) = \lambda^{n-1}\phi\left(\frac{v(\lambda^{-1}) - V(x)}{\lambda^{-1} - x}\right) =$$

$$\lambda^{n-1}\phi\left(\frac{\lambda v(\lambda^{-1}) - \lambda V(x)}{1 - x\lambda}\right) = \phi\left(\frac{\lambda^n v(\lambda^{-1}) - \lambda^n V(x)}{1 - x\lambda}\right) =$$

$$v(\lambda)f(s, \lambda) - \lambda^n\phi\left(\frac{v(x)}{1 - x\lambda}\right)\cdot$$

2 $(n - 1/n)$ 型正交多项式和行列式公式

从误差公式(i), 有

$$f(s, \lambda) - \left(n - \frac{1}{n}\right)_f(s, \lambda) = \frac{\lambda^n}{v(\lambda)}\phi\left(\frac{v(x)}{1 - x\lambda}\right) =$$

$$\frac{\lambda^n}{v(\lambda)}(\phi(\lambda) + \phi(xv)\lambda + \phi(x^2 v)\lambda^2 + \dots)\cdot \tag{14}$$

注意到, 生成多项式 v 由 $n+1$ 个任意常数确定, 但是, 如果 v 用 λv 替换, $(n - 1/n)_f(s, \lambda)$ 并不改变• 故根据$(n - 1/n)_f(s, \lambda)$ 的构造方式可知, $(n - 1/n)_f(s, \lambda)$ 实际上取决于 n 个任意常数• 为此设

$$\phi(x^k v(x)) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1\cdot \tag{15}$$

定义 2. 1 满足方程(15) 的多项式 v 定义为关于广义线性泛函 ϕ 的正交多项式• 由正交多项式 v 确定的$(n - 1/n)_f(s, \lambda)$ 称为给定幂级数(2) 的函数值 Pad _型逼近•

为了下面的讨论简单起见, 将 $y_i(s)$ 记为 y_i, $i = 0, 1, \dots$• 将生成多项式(7) 中 $b_i(s)$ 记为 b_i, $i = 0, 1, \dots, n$• 在式(15) 中代入 $v(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \dots + b_n\lambda^n$, 并施加广义线性泛函 ϕ, 分别得到

$$\begin{cases} \phi(v(x)) = b_0 y_0 + b_1 y_1 + \dots + b_n y_n = 0, \\ \phi(xv(x)) = b_0 y_1 + b_1 y_2 + \dots + b_n y_{n+1} = 0, \\ \dots\dots \\ \phi(x^{n-1}v(x)) = b_0 y_{n-1} + b_1 y_n + \dots + b_n y_{2n-1} = 0\cdot \end{cases} \tag{16}$$

将式(16) 的两边分别关于幂级数 $f(s, \lambda)$ 的系数 $y_0(s)$ 作内积, 并与 $v(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \dots$

$+\ b_n\lambda^n$ 一起组成线性方程组, 从而得到

$$\begin{bmatrix} (y_0, y_1) & (y_0, y_2) & \cdots & (y_0, y_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (y_0, y_{n-1}) & (y_0, y_n) & \cdots & (y_0, y_{2n-1}) \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

记

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_n(c_0) = \begin{bmatrix} (y_0, y_0) & \cdots & (y_0, y_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_0, y_{n-1}) & \cdots & (y_0, y_{2n-2}) \end{bmatrix}, \\ \alpha_{(n-1/n)} = ((y_0, y_n), (y_0, y_{n+1}), (y_0, y_{2n-1}))^{\mathrm{T}}, \\ \gamma_{(n-1/n)} = \left(0, y_0\lambda^{n-1}, \cdots, \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}\lambda^i\right), \quad \beta = (\lambda^n, \lambda^{n-1}, \cdots, \lambda). \end{cases} \tag{18}$$

定理 2.2　设 $\det\{h_n(c_0)\} \neq 0$, 则 $(n-1/n)_f(s, \lambda)$ 存在, 且成立

$$(n-1/n)_f(s, \lambda) = p_{n-1,n}(s, \lambda)/q_{n-1,n}(\lambda), \tag{19}$$

式中分母多项式和分子多项式分别表示为

$$q_{n-1,n}(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_n(c_0) & \alpha_{(n-1/n)} \\ \beta & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$p_{n-1,n}(s, \lambda) = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_n(c_0) & \alpha_{(n-1/n)} \\ \gamma_{(n-1/n)} & \sum_{i=1}^{n-1} y_i\lambda^i \end{bmatrix}. \tag{21}$$

证　从方程组(17) 用 Gramer 法则解出 $v(\lambda)$, 它的行列式可以表示为

$$v(\lambda) = \det\begin{bmatrix} (y_0, y_0) & (y_0, y_1) & \cdots & (y_0, y_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (y_0, y_{n-1}) & (y_0, y_n) & \cdots & (y_0, y_{2n-1}) \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

由此得到 $v(\lambda) = \lambda^n v(\lambda^{-1})$, 令 $q_{n-1,n}(\lambda) = v(\lambda)$, 即为式(20). 根据 $(n-1/n)_f(s, \lambda)$ 的定义, 并设 $p_{n-1,n}(s, \lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1}$, 其中 p_i 表示 $p_i(s)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. 展开 $v(\lambda)f(s, \lambda) = q_{n-1,n}(\lambda)f(s, \lambda)$, 推出

$$\begin{aligned} & v(\lambda)f(s, \lambda) = q_{n-1,n}(\lambda)f(s, \lambda) = \\ & \quad (b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n)(y_0 + y_1\lambda + y_2\lambda^2 + \cdots) = \\ & \quad y_0b_n + (y_1b_n + y_0b_{n-1})\lambda + \cdots + \\ & \quad (b_ny_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} + \cdots + b_1y_0)\lambda^{n-1} + O(\lambda^n) = \\ & \quad p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + O(\lambda^n) = \\ & \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\lambda^i\right)b_n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}\lambda^i\right)b_{n-1} + \cdots + (y_0\lambda^{n-1})b_1 + O(\lambda^n). \end{aligned} \tag{22}$$

比较式(22) 与式(17) 中关于 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 的系数, 用解方程组(17) 同样的方法解出式(22), 即得式(21). 因 $\det\{h_n(c_0)\} \neq 0$, 即为 $q_{n-1,n}(0) = v(0) \neq 0$, 故 $q_{n-1,n}(\lambda) = v(\lambda)$ 存在, 由式(22) 知 $p_{n-1,n}(s, \lambda)$ 亦存在. 从而, $(n-1/n)_f(s, \lambda) = p_{n-1,n}(s, \lambda)/q_{n-1,n}(\lambda)$ 存在且唯一.

例 2.3　设积分方程

$$x(s) = f(s, \lambda) = \sin s + \lambda\int_0^{\pi/2} \sin(s)\cos(t)x(t)\mathrm{d}t. \tag{23}$$

求 $(0/1)_f(s, \lambda)$. 函数 $f(s, \lambda)$ 幂级数展开式是

$$f(s, \lambda) = \sin(s)\left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{8} + \cdots\right).$$

根据行列式(20)、(21), 得(0/1)型的函数值 Pad_型逼近为

$$(0/1)_f(s, \lambda) = \frac{p_{0,1}(\lambda)}{q_{0,1}(\lambda)} = \frac{2}{2-\lambda}\sin s, \qquad |\lambda| < 2,$$

其中

$$q_{0,1}(\lambda) = \begin{vmatrix} (y_0, y_0) & (y_0, y_1) \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\lambda,$$

$$p_{0,1}(\lambda) = \begin{vmatrix} (y_0, y_0) & (y_0, y_1) \\ 0 & y_0 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{4}\sin s.$$

可以发现 $(0/1)_f(s, \lambda)$ 与准确解 $y(s) = 2\sin s/(2-\lambda)$ 完全相等.

3 (m/n) 型正交多项式和行列式公式

从误差公式(ii), 成立

$$f(s, \lambda) - (m/n)_f(s, \lambda) = \frac{\lambda^{m+1}}{v(\lambda)}\phi^{m-n+1}\left(\frac{v(x)}{1-xz}\right) =$$

$$\frac{\lambda^n}{v(\lambda)}\left(\phi^{(m-n+1)}(v) + \phi^{(m-n+1)}(xv)\lambda + \phi^{(m-n+1)}(x^2v)\lambda^2 + \cdots\right). \tag{24}$$

同样, 根据 $(m/n)_f(s, \lambda)$ 的构造方式可知, $(m/n)_f(s, \lambda)$ 实际上取决于 m 个任意常数. 为此设

$$\phi^{(m-n+1)}(x^k v(x)) = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{25}$$

定义 3.1 满足方程(25)的多项式 v 定义为关于高阶广义线性泛函 $\phi^{(m-n+1)}$ 的正交多项式. 由正交多项式 v 确定的 $(m/n)_f(s, \lambda)$ 称为给定幂级数(2)的函数值 Pad_型逼近.

在式(25)中代入 $v(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n$, 施加高阶线性泛函 $\phi^{(m-n+1)}$, 并将得到的方程两边分别关于幂级数 $f(s, \lambda)$ 的系数 y_{m-n+1} 作内积, 并与 $v(\lambda)$ 一起组成线性方程组, 从而得到

$$\begin{bmatrix} (y_{m-n+1}, y_{m-n+1}) & \cdots & (y_{m-n+1}, y_{m+1}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (y_{m-n+1}, y_m) & \cdots & (y_{m-n+1}, y_{m+n}) \\ 1 & \cdots & \lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

记

$$\boldsymbol{h}_n(c_{m-n+1}) = \begin{bmatrix} (y_{m-n+1}, y_{m-n+1}) & \cdots & (y_{m-n+1}, y_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (y_{m-n+1}, y_m) & \cdots & (y_{m-n+1}, y_{m+n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{(m/n)} = \left((y_{m-n+1}, y_{m+1}), (y_{m-n+1}, y_{m+2}), (y_{m-n+1}, y_{m+n})\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_{(m/n)} = \left(\sum_{i=n}^{m} y_{i-n}\lambda^i, \sum_{i=n-1}^{m} y_{i-n+1}\lambda^i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} y_{i-1}\lambda^i\right).$$

定理 3.2 设 $\det\{h_n(c_{m-n+1})\} \neq 0$, 则 $(m/n)_f(s, \lambda)$ 存在, 且成立

$$(m/n)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)=p_{m,n}(s,\lambda)/q_{m,n}(\lambda),\tag{27}$$

式中分母多项式和分子多项式分别表示为

$$q_{m,n}(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_n(c_{m-n+1}) & \alpha_{(m/n)}\\ \beta & \mathbf{1}\end{bmatrix},\tag{28}$$

$$p_{m,n}(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_n(c_{m-n+1}) & \alpha_{(m/n)}\\ \gamma_{(m/n)} & \sum_{i=0}^{m}y_i\lambda^i\end{bmatrix}.\tag{29}$$

证　分母数量多项式(28)的证法与式(20)的证法相同. 根据$(m/n)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)$的定义,并设

$$p_{m,n}(s,\lambda)=p_0+p_1\lambda+\cdots+p_m\lambda^m.$$

展开$q_{m,n}(\lambda)f(s,\lambda)$,并参考(22)式的证明可得

$$\begin{aligned}q_{m,n}(\lambda)f(\lambda)&=p_0+p_1\lambda+\cdots+p_m\lambda^m+O(\lambda^m)=\\&\left(\sum_{i=0}^{m}y_i\lambda^i\right)b_n+\left(\sum_{i=1}^{m}y_{i-1}\lambda^i\right)b_{n-1}+\cdots+\\&\left(\sum_{i=n-1}^{m}y_{i-n+1}\lambda^i\right)b_1+\left(\sum_{i=n}^{m}y_{i-n}\lambda^i\right)b_0+O(\lambda^m).\end{aligned}\tag{30}$$

比较式(28)与式(26)中关于$b_0, b_1, \cdots, b_n$的系数,解出式(30),即得式(29). 因$\det\left\{h_n(c_{m-n+1})\right\}\neq 0$,即为$q_{m,n}(0)\neq 0$,故$q_{m,n}(\lambda)$存在,由式(30)知$p_{m,n}(s,\lambda)$亦存在. 从而,$(m/n)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)=p_{m,n}(s,\lambda)/q_{m,n}(\lambda)$存在且唯一.

例 3.3　考虑下列第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(s)=f(s,\lambda)=\frac{6}{5}(1-4s)+\lambda\int_0^1(s\ln t-t\ln s)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\tag{31}$$

它的连续核$K(s,t)=s\ln t-t\ln s$, $0\leqslant s, t\leqslant 1$. 方程(31)的准确解是

$$\varphi(s)=\frac{6}{5}(1-4s)+\frac{\lambda^2(2s+(1/4)\ln s)+\lambda\ln s}{1+(29/48)\lambda^2}.$$

求$(2/2)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)=p_{2,2}(s,\lambda)/q_{2,2}(\lambda)$. $f(s,\lambda)$的幂级数展开式前几项是

$$\begin{aligned}\varphi(s)=&\frac{6}{5}(1-4s)+\lambda\ln s+\left(\frac{1}{4}\ln s+2s\right)\lambda^2-\frac{29}{48}\ln s\,\lambda^3-\\&\frac{29}{48}\left(\frac{1}{4}\ln s+2s\right)\lambda^4+\cdots.\end{aligned}$$

现在取$m=2$, $n=2$,根据行列式公式(28)和式(29),得$(2/2)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)$的分母和分子多项式分别为

$$q_{2,2}(\lambda)=-\frac{29}{12}\left(1+\frac{29}{48}\lambda^2\right),$$

$$p_{2,2}(s,\lambda)=\frac{6}{5}(1-4s)\left(\frac{841}{576}\lambda^2-\frac{29}{12}\right)-\frac{9}{12}\left(\lambda\ln s+\left(\frac{\ln s}{4}+2s\right)\lambda^2\right),$$

通过验证$(2/2)_{\mathrm{f}}(s,\lambda)=p_{2,2}(s,\lambda)/q_{2,2}(\lambda)$与准确解完全相等.

[参 考 文 献]

[1] Chisholm J S R. Solution of integral equations using Pad approximants[J]. J Math Phys, 1963, **4**(12): 1506—1510.

[2] Graves_Morris P R. Solution of integral equations using generalised inverese, function_valued Pad approximants[J]. J Comput Appl Math, 1990, **32**(1): 117—124.

[3] 顾传青, 李春景. 用于积分方程解的广义逆函数值 Pad 逼近的计算公式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(9): 952—958.

[4] 李春景, 顾传青. 用于积分方程解的广义逆函数值 Pad 逼近的 ε_算法和 η_算法[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(2): 197—204.

[5] Brezinski C. Pad _Type Approximation and General Orthogonal Polynomials [M]. Basel: Birkh¾user, 1980.

[6] Draux A. the Pad approximants in a non_commutative algebra and their applications[A]. In: Werner H, B nger H J, Eds. Pad Approximation and Its Applications [C]. LNM Vol **1071**, Berlin: Springe_Verlag, 1984, 117—131.

[7] Salam A. Vector Pad _type approximants and vector Pad approximants[J]. J Approx Theory, 1999, **97**(1): 92—112.

[8] GU Chuan_qing. Matrix Pad _type approximant and directional matrix in the inner product space[J]. J Comput Appl Math, 2004, **164_165**(1): 365—385.

Orthogonal Polynomials and Determinant Formulas of Function_Valued Pad _Type Approximation Using for Solution of Integral Equations

GU Chuan_qing, PAN Bao_zheng, WU Bei_bei

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: To solve Fredholm integral equations of the second kind, a generalized linear functional is introduced and a new function_valued Pad _type approximation was defined. By means of the power series expansion of the solution, this method can construct an approximate solution to solve the given integral equation. On the basis of the orthogonal polynomials, two useful deter_minant expressions of the numerator polynomial and the denominator polynomial for Pad _type approximation were explicitly given.

Key words: generalized linear functional; function_valued; Pad _type approximation; Fredholm integral equation; orthogonal polynomial; determinant formula