

文章编号: 1000-0887(2004) 05_0535_07

特殊坐标系中特殊非牛顿流 边界层方程的相似解*

M. 禹 儒 索 一

(阿夫坚考卡特裴大学 技术教育学院 力学教育系, TR_03200, 阿夫坚, 土耳其)

(周哲玮推荐)

摘要: 给出了在一个特殊坐标系中三阶流体的二维定常运动方程组。该坐标系中由无粘流体的势流确定,即以环绕任意物体的非粘性流动的流线为 ϕ 坐标,速度势线为 ψ 坐标,构成正交曲线坐标系。结果表明,边界层方程与浸没在流体中的物体的形状无关。第一次近似假定第二梯度项与粘性项和第三梯度项相比,可以忽略不计。第二梯度项的存在,将妨碍第三梯度流相似解的比例变换的导出。利用李群方法计算了边界层方程的无穷小生成元。将边界层方程组变换为常微分方程组。利用 Runge-Kutta 法结合打靶技术求解了该非线性微分方程组的数值解。

关键词: 边界层方程; 李群; 第三梯度流体

中图分类号: O357.4 文献标识码: A

引 言

Rivlin-Ericksen 流作为非牛顿流,无论在理论上还是实验上都得到了广泛的认同。在这样一个特殊的模型中,第三梯度流有着广泛的应用,并已有许多研究工作。已导出了数种不同的非牛顿流模型的边界层方程。为简便计,我们只举出几个例子: Acrivos 等^[1]和 Pakdemirli^[2]给出了幂律流的边界层方程。对于流体速率, Beard, Walters^[3]和 Astin 等^[4]的工作非常重要。Pakdemirli^[5]将多层边界层的概念应用于第二和第三梯度流。Y r soy 和 Pakdemirli^[6]研究了笛卡儿坐标系中平直薄板上第三梯度流的边界层方程。

我们选用 Kaplan^[7]首先提出的正交曲线坐标系,使边界层方程与浸没在流动中的物体的形状无关。该坐标系为一正交曲线系统,其中 ϕ 坐标为流线, ψ 坐标为流过任意二维截面的无粘流的速度势。在此坐标系中, Kevorkian 和 Cole^[8]给出了牛顿流的边界层方程。Pakdemirli 和 Suhubi^[9]导出了该坐标系中第二梯度流的边界层方程;他们^[10]还利用外推法计算了边界层方程的一般对称群。他们的结果表明,第二梯度边界层方程只需采用比例变换,并得出了相应于比例变换的相似解。Pakdemirli^[11]证明了第三梯度流增加了附加项,从而不能应用比例变换,因而不存在相似解。

* 收稿日期: 2002_10_31

作者简介: M. 禹儒索一. Tel: + 90_272_228 11 311(217); E_mail: yurusoy@aku.edu.tr.

本文原文为英文,由吴承平译,张禄坤校。

本文首先对非牛顿流模型, 利用第三梯度流导出了边界层方程。Fosdick 和 Rajagopal^[12] 给出了如下应力张量

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1, \quad (1)$$

其中, p 为压力, μ 为粘度, α_1 和 α_2 为第二梯度流项, β 为第三梯度流项, \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 为前两个 Rivlin-ericksen 张量, 满足如下关系:

$$\mathbf{L} = \text{grad}|\mathbf{v}|, \mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}_1, \quad (2)$$

其中, \mathbf{v} 为速度向量, Fosdick 和 Rajagopal^[12] 认为, 方程(1) 符合热力学规律, 并且当流体静止时, 自由能最小, 材料常数满足如下条件:

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, |\alpha_1 + \alpha_2| \leq \sqrt{24\mu\beta}. \quad (3)$$

第三梯度流的无量纲运动方程为^[11]

$$\begin{aligned} 0.5\text{grad}|\mathbf{q}|^2 + \omega + \mathbf{q} = & -\text{grad}p + \varepsilon \cdot \cdot \cdot \mathbf{q} + \varepsilon_1(\cdot \cdot \cdot \omega \times \mathbf{q}) + \\ & \varepsilon_1\text{grad}(\mathbf{q} \cdot \cdot \cdot \mathbf{q}) + \frac{1}{4}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 + \\ & (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[\mathbf{A}_1 \cdot \cdot \cdot \mathbf{q} + 2\text{div}((\text{grad}|\mathbf{q}|)(\text{grad}|\mathbf{q}|)^T)] + \\ & \varepsilon_3\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 + \varepsilon_3|\mathbf{A}_1|^2 \cdot \cdot \cdot \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{div}\mathbf{q} = 0, \quad (5)$$

其中, \mathbf{q} 为无量纲速度向量, $\cdot \cdot \cdot$ 为 Laplace 算子, $\omega = \text{curl}\mathbf{q}$ ($\text{curl}\mathbf{q} = \text{rot}\mathbf{q}$ —编者注) 并定义无量纲系数如下:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho UL} = \frac{1}{Re}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\rho L^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{\rho L^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\beta U}{\rho L^3}, \quad (6)$$

其中 L 和 U 分别为参考长度和参考速度, ρ 为密度, Re 为雷诺数。

1 坐标系

选择一个特殊坐标系, 使边界层方程与浸没流体中的物体的形状无关。取流线为 ϕ 坐标系, 以环绕任意物体无粘流动的速度势线为 ψ 坐标系。

我们定义复变函数

$$F(z) = \phi + i\psi, \quad (7)$$

就能很方便地写出众所周知的公式

$$\mathbf{q}_0 = u_0\mathbf{i} + v_0\mathbf{j}, \quad v_0 - iv_0 = F'(z), \quad u_0 = \phi_x = \psi_y, \quad v_0 = \phi_y = -\psi_x, \quad (8)$$

其中 \mathbf{q}_0 为速度势场, 压力由 Bernoulli 方程得出

$$p = -0.5q_0^2 + C, \quad (9)$$

其中 C 为常数。坐标系的度规定义为

$$dz = \frac{dF}{F'}, \quad (dx)^2 + (dy)^2 = \frac{(d\phi)^2 + (d\psi)^2}{|F'(z)|^2} = \frac{(d\phi)^2 + (d\psi)^2}{q_0^2}. \quad (10)$$

为简化运动方程, 我们引入如下新的速度分量:

$$W_\phi = \frac{q\phi}{q_0}, \quad W_\psi = \frac{q\psi}{q_0}. \quad (11)$$

于是, 在这一坐标系中的速度和梯度算子为

$$\mathbf{q} = q_0(W_\phi\mathbf{i}_\phi + W_\psi\mathbf{i}_\psi), \quad \cdot \cdot \cdot = \left(q_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \quad q_0 \frac{\partial}{\partial \psi} \right). \quad (12)$$

Christoffel 符号为

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = -\frac{\partial Q}{\partial \phi}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = -\frac{\partial Q}{\partial \phi}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \frac{\partial Q}{\partial \phi}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \frac{\partial Q}{\partial \phi}, \quad (13)$$

其中 $Q = \lg q_0$.

2 边界层方程

现在我们已经有了必要的工具,可以用来推导特殊的第三梯度流的边界层方程. 作为第一次近似,假定第二梯度项与粘性项和第三梯度项相比可以忽略. 第二梯度项的存在,妨碍导出第三梯度流体相似解的比例变换(参见[11]). 若取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, 方程(4)变为第三梯度流方程.

设 ε_3 与 ε^2 成正比,即

$$\varepsilon_3 = k\varepsilon^2. \quad (14)$$

在推导中将用到匹配渐近展开法. 我们将在边界层内构造全部展开式,在边界层外,构造外部展开式. 令摄动参数 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们将得到无粘无旋的极限流,这里

$$W_{\phi} = 1, \quad W_{\psi} = 0, \quad p = -0.5q_0^2 + C. \quad (15)$$

外部展开式由式(15)的第一项构成,边界层修正项为

$$\begin{cases} W_{\phi}(\phi, \psi; \varepsilon) = 1 + \beta(\varepsilon)W_{\phi}^1(\phi, \psi) + \dots, \\ W_{\psi}(\phi, \psi; \varepsilon) = \beta(\varepsilon)W_{\psi}^1(\phi, \psi) + \dots, \\ p(\phi, \psi; \varepsilon) = -\frac{1}{2}q_0^2 + C + \beta(\varepsilon)P^1(\phi, \psi) + \dots, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\beta(\varepsilon)$ 为一未知系数,由条件 $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 确定. 内部开式变量由展开的 ψ 坐标

$$\psi^* = \psi/\delta(\varepsilon). \quad (17)$$

在条件 $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 下确定. 得到的内部展开式为

$$\begin{cases} W_{\phi}(\phi, \psi; \varepsilon) = W_{\phi}(\phi, \psi^*) + \delta(\varepsilon)W_{\phi}^1(\phi, \psi^*) + \dots, \\ W_{\psi}(\phi, \psi; \varepsilon) = \delta(\varepsilon)W_{\psi}(\phi, \psi^*) + \delta^2(\varepsilon)W_{\psi}^1(\phi, \psi^*) + \dots, \\ p(\phi, \psi; \varepsilon) = P(\phi, \psi^*) + \delta(\varepsilon)P^1(\phi, \psi) + \dots \end{cases} \quad (18)$$

以上导出非平凡连续方程,且内部边界层的无粘速度将近似于表面速度,即

$$q_0(\phi, \psi) = q_B(\phi) + O(\delta^*(\varepsilon)). \quad (19)$$

若将方程(17)~(19)代入运动方程(4)~(5),并且保留每一组中的相对较大的项,可得方程

$$\begin{aligned} W_{\phi} \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + W_{\psi} \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + W_{\phi}^2 \frac{dQ_B}{d\phi} = \\ -\frac{1}{q_B^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \psi^2} + 6k \frac{\varepsilon}{\delta^4} q_B^4(\phi) \left[\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \psi^2} \right] \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} \right]^2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$0 = -\frac{1}{\delta} \frac{1}{q_B^2} \frac{\partial P}{\partial \psi} \left[O\left(\frac{1}{\delta^3}\right) \right], \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \psi} = 0, \quad (22)$$

这里,边界层厚度 δ 为一小参数, ε 为摄动参数. 利用方程 $P = -q_B^2/2 + C$ 消去方程(20)中的压力. 我们可设 ε 为 δ^2 阶, k 为 δ^2 阶. 在此假设下,可写出特殊的第三梯度流的边界层方程及其边界条件:

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} = 0, \quad (23)$$

$$W_\phi \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + W_\psi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + (W_\phi^2 - 1) \frac{dQ_B}{d\phi} = \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} + 6kq_B^4(\phi) \left(\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} \right) \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right)^2, \quad (24)$$

$$W_\phi(\phi, 0) = W_\psi(\phi, 0) = 0, \quad W_\phi(\phi, \infty) = 1, \quad (25)$$

其中, $Q'_B = q'_B/q_B$, k 为第三梯度流系数. $k = 0$ 时为牛顿流. 注意到方程中, 无粘表面速度分布 q_B 为任意的 ϕ 函数, 因此最终方程对任意截面都是有效的. 这样就可直截了当地从方程得出一般结论. 李群变换可用于研究 q_B 的特殊形式, 通过相似变换将偏微分方程化为常微分方程.

将李群理论应用于边界层方程, 方程具有比例对称性. 比例对称性可将偏微分方程组化为常微分方程组. 利用 Runge_Kutta 法并结合打靶技术, 可以求得最终非线性常微分方程组的数值解.

3 确定无穷小生成元的方程

为了求得方程(23)和(24)所有可能的精确解, 我们更喜欢采用李群一般分析方法, 而不喜欢用特殊变换群. 应用李群求解微分方程的详细论述请参见文[13]和[14].

单参数变换李群及其对应的生成元 X 定义如下.

$$\begin{cases} \phi^* = \phi + \varepsilon \xi_1(\phi, \psi, W_\phi, W_\psi), & \psi^* = \psi + \varepsilon \xi_2(\phi, \psi, W_\phi, W_\psi), \\ W_\phi^* = W_\phi + \varepsilon \eta_1(\phi, \psi, W_\phi, W_\psi), & W_\psi^* = W_\psi + \varepsilon \eta_2(\phi, \psi, W_\phi, W_\psi), \end{cases} \quad (26)$$

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \phi} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \psi} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial W_\phi} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial W_\psi}. \quad (27)$$

直接通过冗长的代数运算, 可得到无穷小生成元及方程

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(\phi), & \xi_2 = c_2(\phi)\psi + a(\phi), \\ \eta_1 = c_1(\phi)W_\phi, & \eta_2 = W_\psi(\psi c_2 + a') + W_\phi(c_1 + c_2 - \xi_2'), \end{cases} \quad (28)$$

$$2c_1 \frac{q_B}{q_B} + c_1' = 0, \quad (29)$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad (30)$$

$$c_1 + 2c_2 - \xi_1' = 0, \quad (31)$$

$$4c_2 - c_1 - \xi_1' - 4\xi_1 \frac{q_B}{q_B} = 0. \quad (32)$$

由上述方程, 可得出 $q_B' = 0$ 或 $c_1 = 0$. 这两种情况分别讨论如下:

i) $q_B = \text{const}$.

解方程(28)~(32), 可得出所谓的无穷小生成元

$$\begin{cases} \xi_1 = 2a\phi + b, & \xi_2 = a\psi + a(\phi), \\ \eta_1 = aW_\phi, & \eta_2 = -aW_\psi + W_\phi a'. \end{cases} \quad (33)$$

该结果与文[6]的结果一致.

ii) $c_1 = 0$

解方程(28)~(31), 可得出所谓的无穷小生成元

$$\begin{cases} \xi_1 = 2a\phi + b, & \xi_2 = a\psi + a(\phi), \\ \eta_1 = 0, & \eta_2 = -aW_\psi + W_\phi a'. \end{cases} \quad (34)$$

解方程(32), 得

$$q_B = c(2a\phi + b)^{1/4}. \quad (35)$$

如果考虑情况 i), 则将是传统的边界层问题。文[6]研究了该问题, 因此并没有新的内容。而情况 ii) 是一种比例变换, 从而引出了相似解, 提供了有用的新结果。

考虑到边界的限制和无穷小生成元上边界条件(25) 可得到方程(34)、(35) 的如下形式:

$$\begin{cases} \xi_1 = 2a\phi + b, \quad \xi_2 = a\phi, \quad \eta_1 = 0, \\ \eta_2 = -aW_\phi', \quad q_B = c(2a\phi + b)^{1/4}, \end{cases} \quad (36)$$

其中 c 为任意常数。只有该无穷小生成元及其比例变换 q_B , 可引出相似解, 并提供了有用的新结果。注意 q_B 不是常量, 而是抛物函数。

4 相似解

在本节, 我们将利用(36) 式给出的无穷小生成元得出相似变换和相似解。首先将方程组变换为常微分方程组, 并利用 Runge_Kutta 法结合打靶技术数值求解该方程组。

文[13]、[14] 给出了详细的求解过程, 我们仅介绍比例变换($a = 1, b = 0$)。其特征方程为

$$\frac{d\phi}{2\phi} = \frac{d\psi}{\psi} = \frac{dW_\psi}{0} = -\frac{dW_\psi}{W_\psi}. \quad (37)$$

相似变量、相似函数和 q_B 为

$$\xi = \frac{\psi}{\sqrt{\phi}}, \quad W_\psi = f(\xi), \quad W_\phi = \frac{g(\xi)}{\sqrt{\phi}}, \quad q_B = \gamma(\phi)^{1/4}, \quad (38)$$

其中 $\gamma = c2^{1/4}$ 。将方程(38) 及其导代入边界层方程(23) 和(24), 得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(f^2 - 1) + 2gf' - \xi f f' - 2f'' - 12\gamma f'^2 = 0, \\ \xi g' - 2g' = 0. \end{cases} \quad (39)$$

边界条件取为

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad (40)$$

其中 $\kappa = k^* \gamma^4$ 。

因为该方程是高度非线性的采用数值分析方法更好一些。虽然它是一个边值问题, 但可转化为初值问题。设计一个试验值 $f'(0)$, 利用 Runge_Kutta 法积分该方程, 并检验无穷远处是否满足边界条件。重复这一过程, 直到求得一个适当的 $f'(0)$ 值。给出了非牛顿流系数 $\kappa = 0, 10, 30$ 三种情况下的数值分析结果图形。图1 为函数 f , 图2 为函数 g , 图3 为函数 f' 。 $\kappa = 0$ 时为牛顿流, κ 越大, 表示非牛顿流特性越强。由图1 可以看出, 当非牛顿流效应增强时, 边界层厚度增大。从图2 可以看出, 速度的竖直分量在边界层内。当非牛顿流效应增强时, $g(\xi)$ 也增大。

利用坐标性质并忽略小项, 由方程(1) 计算边界剪应力。边界上的无量纲剪应力为

$$t_{\phi\psi} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \left[q_B^2 \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} + 2kq_B^6 \left(\frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} \right)^3 \right]_{\psi=0}, \quad (41)$$

其中 Re 为雷诺数。利用相似变量表达的剪应力为

$$t_{\phi\psi} = \frac{\delta^2}{\sqrt{Re}} [f'(0) + 2\kappa(f'(0))^3]. \quad (42)$$

在方程(42)中的 $f'(0)$ 已绘于图3中。由式(42)可以得出,当 $\tau = 0, \delta = 1$ 时, $t_{\phi b} \approx 0.65/\sqrt{Re}$; 当 $\kappa = 10, \delta = 1$ 时, $t_{\phi b} \approx 1.00/\sqrt{Re}$; 当 $\kappa = 30, \delta = 1$ 时, $t_{\phi b} \approx 1.25/\sqrt{Re}$ 。显然,由上述计算可以看出,随 κ 的增大,边界剪应力也增大。

5 结论和说明

提出了求解第三梯度流边界层方程的不同方法。断面的几何形状表现为边界层方程中一个任意函数,从而更容易导出一般性结果。第二梯度效应与第三梯度及粘性效应相比,可以忽略。利

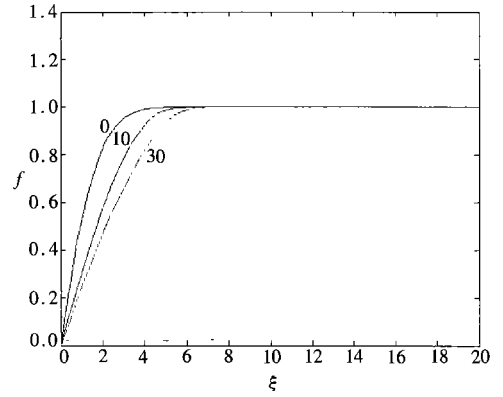


图1 不同 κ 值时的函数 f (κ 值标在曲线上)

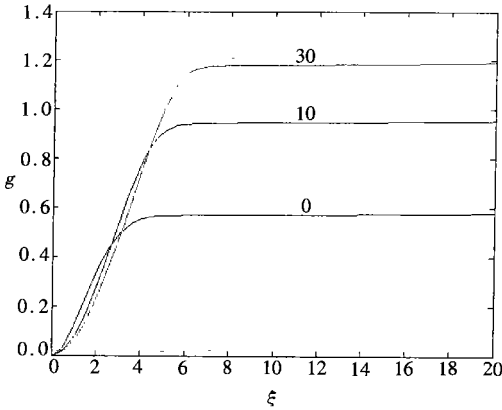


图2 不同 κ 值时函数 f 的第一阶导数(κ 值标在曲线上)

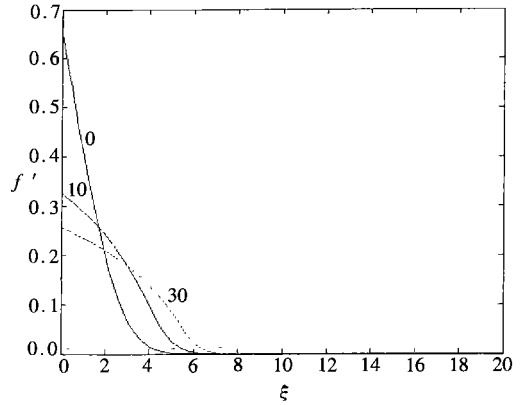


图3 不同 κ 值时的函数 f' (κ 值标在曲线上)

用李群分析法,我们首先求得偏微分方程组的一般对称性。然后通过相似变换将偏微分方程组化为常微分方程组。最后,数值求解得到的常微分方程组。当非牛顿流特性增强时,边界层变厚。

[参 考 文 献]

- [1] Acrivos A, Shah M J, Petersen E E. Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surface[J]. A I Ch E JI, 1960, **6**: 312—317.
- [2] Pakdemirli M. Boundary layer flow of power-law past arbitrary profile[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1993, **50**: 133—148.
- [3] Beard D W, Walters K. Elastico-viscous boundary layer flows[J]. Proc Camb Phil, 1964, **60**: 667—674.
- [4] Astin J, Jones R S, Lockyer P. Boundary layer in non-Newtonian fluids[J]. J Mec, 1973, **12**: 527—539.
- [5] Pakdemirli M. Conventional and multiple deck boundary layer approach to second and third grade fluids[J]. Internat J Engng Sci, 1994, **32**(1): 141—154.
- [6] Y r soy M, Pakdemirli M. Exact solutions of boundary layer equations of a special non-Newtonian fluid over a stretching sheet[J]. Mechanics Research Communications, 1999, **26**(2): 171—175.

- [7] Kaplan S. The role of coordinate systems in boundary layer theory [J]. ZAMP, 1954, **5**: 111—135.
- [8] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation Method in Applied Mathematics [M]. New York: Springer, 1981.
- [9] Pakdemirli M, Suhubi E S. Boundary layer theory second order fluids [J]. Int J En gn g Sci, 1992, **30** (4): 523—532.
- [10] Pakdemirli M, Suhubi E S. Similarity solutions of boundary layer equations for second order fluids [J]. Int J En gn g Sci, 1992, **30**(5): 611—629.
- [11] Pakdemirli M. The boundary layer equations of third grade fluids [J]. Int J Non Linear Mech, 1992, **27**(5): 785—793.
- [12] Fosdick R L, Rajagopal K R. Thermodynamics and stability of fluids of third grade [J]. Proc R Soc, 1980, **339**: 351.
- [13] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer, 1989.
- [14] Stephani H. Differential Equations: Their Solution Using Symmetries [M]. England: Cambridge U niveristy Press, 1989.

Similarity Solutions of Boundary Layer Equations for a Special Non-Newtonian Fluid in a Special Coordinate System

Muhammet Y r soy

(Department of Mechanical Education , Faculty of Technical Education ,
Ahmet Necdet Sezer Camp us , Afyon Kocatepe University , TR_03200, Afyon , Turkey)

Abstract: Two dimensional equations of stede motion for third order fluids are expressed in a special coordinate system generated by the potential flow corresponding to an inviscid fluid. For the inviscid flow around an arbitrary object, the streamlines are the ϕ coordinates and velocity potential lines are ψ coordinates which form an orthogonal curvilinear set of coordinates. The outcome, boundary layer equations, is then shown to be independent of the body shape immersed into the flow. As a first approximation, assumption that second grade terms are negligible compared to viscous and third grade terms. Second grade terms spoil scaling transformation which is only transformation leading to similarity solutions for third grade fluid. By using Lie group methods, infinitesimal generators of boundary layer equations are calculated. The equations are transformed into an ordinary differential system. Numerical solutions of outcoming nonlinear differential equations are found by using combination of a Runge-Kutta algorithm and shooting technique.

Key words: boundary layer equation; Lie group; third grade fluid