

具有立方对称性及两个弛豫时间的微极热弹性介质中调和时源引起的变形^{*}

R·库玛¹, P·额拉瓦尼亚²

(1. 库鲁克西察大学 数学系, 库鲁克西察, 那亚那, 印度;
2. 工程和显示技术学院 应用科学系, 索兰, 印度)

(程昌钧推荐)

摘要: 研究了具有立方对称性及两个弛豫时间的微极热弹性介质在调和时源中的响应。采用了 Fourier 变换以及数值逆变换技术。在物理域中, 得到了位移、应力、微转动和温度分布的数值结果。将微极立方晶体法向位移、法向力应力、切向耦合应力和温度分布的计算结果, 与微极各向同性固体的结果进行比较。绘制了指定材料的数值结果图形。还推断了某些特殊情况的结果。

关键词: 调和时源; 热弹性; 微极介质; 立方对称性; 微转动; Fourier 变换
中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

引 言

经典非耦合热弹性理论有两个现象与物理观察不符。其一, 该理论的热传导方程不包括任何弹性项; 其次, 抛物型的热传导方程, 意味着热传导波的速度是无限的。

1956 年 Boit^[1] 引入了耦合热弹性理论, 弥补了第一个缺陷。这一理论的控制方程是耦合的, 消除了经典理论的第一个谬误。但是, 由于耦合理论的热传导方程仍然是抛物型的, 第二个缺陷依然存在。

耦合理论已经有两方面的推广。其中一个推广是弹性耦合理论, 即大家知道的, 具有两个弛豫时间的热弹性理论或者称为温度-速率相关热弹性理论。Muller^[2] 1971 年在审视热弹性体热动力学时, 建议了一个熵生成不等式, 他利用该不等式对一类本构方程施加限制; Green 和 Laws^[3] 在 1972 年推广了该不等式。同年 Green 和 Lindsay 得到了另一种形式的本构方程^[4]。这些方程都是各自独立地得到的, 其中以 Suhubi (1975)^[5] 的更清新。该理论包含了两个常数起弛豫时间的作用, 他还改进了耦合理论的所有方程, 不仅仅是热传导方程。如果研究的介质是中心对称的, 它并不违背经典的 Fourier 热传导定律。

Eringen (1970)^[6] 和 Nowacki (1966)^[7] 在拓展微极连续介质理论的基础上, 提出了包括热效

* 收稿日期: 2005-05-23; 修订日期: 2005-08-18

作者简介: R·库玛(联系人, E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com);

P·额拉瓦尼亚(E-mail: praveen_2117@rediffmail.com)。

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校。

应的微极热弹性线性理论·

过去,人们对各种载荷作用的弹性场、夹杂和不均匀性问题、点缺陷和位错排列的相互作用能等问题的求解方法进行了广泛的讨论·通常,材料都具有弹性和各向异性的性质,也就是说工程材料的力学性质有方向性·但是,由于计算中包含的弹性常数太多,三维各向异性材料的研究较各向同性材料的研究要复杂得多·而横观各向同性和正交各向异性材料,由于无需区别平面应变和平面应力,得到了系统的研究·综观微极正交各向异性材料的文献, Iesan 在文献[8]~文献[10]中,分别分析了均匀正交各向异性弹性体平面微极应变静态问题,用微极线弹性理论研究了均匀正交各向异性圆柱的扭转问题,还研究了端点耦合的正交各向异性微极弹性梁的弯曲问题· Nakamura 等人^[11]1984年用有限元法研究了正交各向异性微极弹性体·最近, Kumar 和 Choudhary^[12~16]讨论了正交各向异性微极连续介质的各种问题·

由于一大类晶体材料,例如 W、Si、Cu、Ni、Fe、Au、Al 等属于立方对称性材料,得到了广泛使用·这些材料有9个对称面,它们分别和3个坐标轴垂直,并在坐标平面上与坐标轴成 $\pi/4$ 的夹角·沿晶体方向选择坐标系,微极立方晶体的力学性能可用4个弹性常数 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 表征·

1981年 Minagawa 等人^[17]讨论了平面谐波在立方微极介质中的传播·2003年 Kumar 和 Rani^[18]研究了导热晶体材料中的调和时源·最近, Kumar 和 Ailawalia^[19,20]讨论了具立方对称性的微极介质的某些源问题·

本文的目的,是确定具有立方对称性的微极热弹性介质中,调和时源引起的位移、微转动、应力和温度的分布·通过引入势函数进而利用积分变换技巧求得解·并用数值方法求其逆变换·

1 问题的描述

研究一个具有立方对称性的均匀、微极热弹性体的半空间·直角坐标系 (x, y, z) 的原点放在 $y = 0$ 平面上, y -轴竖直指向介质内·我们仅考察平行于 xy -平面的平面应变问题,且位移矢量为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ 、微转动矢量为 $\phi = (0, 0, \phi_3)$,则在忽略体积力、体耦合和热源情况下,写出 Minagawa 等人(1981)^[17]和 Green-Lindsay(1972)^[4]给出的具立方对称性微极热弹性固体的场方程和本构方程如下:

$$A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (A_2 + A_4) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (A_3 - A_4) \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$A_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + (A_2 + A_4) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - (A_3 - A_4) \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$B_3 \nabla^2 \phi_3 + (A_3 - A_4) \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] - 2(A_3 - A_4) \phi_3 = \theta \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$K^* \nabla^2 T = \rho C^* \left[\frac{\partial T}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] + \nu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right], \quad (4)$$

$$t_{22} = A_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} - \nu \left[T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right], \quad (5)$$

$$t_{21} = A_4 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - \phi_3 \right] + A_3 \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \phi_3 \right], \quad (6)$$

$$m_{23} = B_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y}, \quad (7)$$

其中 t_{22}, t_{21}, m_{23} 分别为法向力应力、切向力应力和切向耦合应力; A_1, A_2, A_3, A_4, B_3 是材料的特征常数; $\nu = (A_1 + 2A_2) \alpha_T$, α_T 为线膨胀系数; ρ 为密度, 而 j 为微惯量; K^* 为传热系数; C^* 为常应变时的比热容; t_0 和 t_1 为热弛豫时间, 并且 $\cdot^{:2} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

引入如下定义的无量纲变量:

$$\begin{cases} x' = \frac{\omega^*}{c_1} x, & y' = \frac{\omega^*}{c_1} y, & u_1' = \frac{\rho c_1 \omega^*}{\mathcal{M}_0} u_1, & u_2' = \frac{\rho c_1 \omega^*}{\mathcal{M}_0} u_2, & \phi_3' = \frac{\rho c_1^2}{\mathcal{M}_0} \phi_3, \\ \left\{ \begin{matrix} t_{22}' \\ t_{21}' \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} t_{22} \\ t_{21} \end{matrix} \right\} \frac{\omega^*}{\mathcal{M}_0}, & m_{23}' = \frac{\omega^*}{c_1 \mathcal{M}_0} m_{23}, & t' = \omega^* t, & t_0' = \omega^* t_0, & t_1' = \omega^* t_1, \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\omega^{*2} = \frac{\rho C^* c_1^2}{K^*}, \quad c_1^2 = \frac{A_1}{\rho}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + \frac{A_3}{\rho c_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y'^2} + \frac{(A_2 + A_4)}{\rho c_1^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x' \partial y'} + \frac{(A_3 - A_4)}{\rho c_1^2} \frac{\partial \phi_3}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t'^2}, \quad (10)$$

$$\frac{A_3}{\rho c_1^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y'^2} + \frac{(A_2 + A_4)}{\rho c_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x' \partial y'} - \frac{(A_3 - A_4)}{\rho c_1^2} \frac{\partial \phi_3}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t'^2}, \quad (11)$$

$$\cdot^{:2} \phi_3 + \frac{(A_3 - A_4) c_1^2}{B_3 \omega^{*2}} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x'} - \frac{\partial u_1}{\partial y'} \right] - \frac{2(A_3 - A_4) c_1^2}{B_3 \omega^{*2}} \phi_3 = \frac{\rho c_1^2}{B_3} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t'^2}, \quad (12)$$

$$\cdot^{:2} T = \frac{\rho C^* c_1^2}{K^* \omega^*} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x'} + \frac{\partial u_2}{\partial y'} \right]. \quad (13)$$

在方程(10)~(13)中, 引入如下定义的势函数

$$u_1 = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_3 = \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (14)$$

其中 $q(x, y, t)$ 和 $\Psi(x, y, t)$ 为标量势函数, 故有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] q - \left[1 + t_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] T = 0, \quad (15)$$

$$\left[a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + a_{13} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \Psi + a_{14} \phi_3 = 0, \quad (16)$$

$$a_{15} \cdot^{:2} \Psi + \left[\cdot^{:2} + 2a_{15} - a_{16} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \phi_3 = 0, \quad (17)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \cdot^{:2} q + \left[\frac{\partial}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \cdot^{:2} \right] T = 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{A_2 + A_3 + A_4}{\rho c_1^2}, & a_{12} = 1 - \frac{(A_2 + A_4)}{\rho c_1^2}, & a_{13} = \frac{A_3}{\rho c_1^2}, & a_{14} = \frac{A_3 - A_4}{\rho c_1^2}, \\ a_{15} = \frac{(A_4 - A_3) c_1^2}{B_3 \omega^{*2}}, & a_{16} = \frac{\rho c_1^2}{B_3}, & \varepsilon = \frac{\nu^2 T_0}{\rho \omega^* K^*}. \end{cases} \quad (19)$$

假定时间的调和性为

$$\left\{ q, \Psi, T, \phi_3 \right\} (x, y, t) = \left\{ q, \Psi, T, \phi_3 \right\} (x, y) e^{i\omega t}, \quad (20)$$

由方程(15)~(18), 得

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right] q - (1 + i\alpha_1)T = 0, \quad (21)$$

$$\left[a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{13} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right] \Psi + a_{14}\phi_3 = 0, \quad (22)$$

$$a_{15} \Psi + [2a_{15} + a_{16}\omega^2] \phi_3 = 0, \quad (23)$$

$$\varepsilon i \omega q + [i\omega - t_0\omega^2 - \dots] T = 0 \quad (24)$$

对方程(21)~(24)变量 x 进行如下定义的 Fourier 变换

$$\{q, \Psi, T, \phi_3\}(\xi, y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{q, \Psi, T, \phi_3\}(x, y, \omega) e^{i\xi x} dx, \quad (25)$$

从所得的结果中消去 T 和 ϕ_3 后, 得到

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + A^* \frac{d^2}{dy^2} + B^* \right] q = 0, \quad (26)$$

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + C^* \frac{d^2}{dy^2} + D^* \right] \Psi = 0, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} A^* = -\frac{1}{a_{11}}[a_{11}(i\omega - t_0\omega^2 + \xi^2) - (\omega^2 - \xi^2) + \varepsilon i\omega(1 + i\alpha_1)], \\ B^* = \frac{1}{a_{11}}[(\omega^2 - \xi^2)(i\omega - t_0\omega^2 + \xi^2) - \varepsilon i\omega\xi^2(1 + i\alpha_1)], \\ C^* = \frac{1}{a_{13}}[a_{13}(2a_{15} + a_{16}\omega^2 - \xi^2) + \omega^2 - a_{12}\xi^2 - a_{14}a_{15}], \\ D^* = \frac{1}{a_{13}}[(\omega^2 - a_{12}\xi^2)(2a_{15} + a_{16}\omega^2 - \xi^2) + a_{14}a_{15}\xi^2]. \end{cases} \quad (28)$$

方程(26)和(27)的根为

$$q_{1,2}^2 = \frac{-A^* \pm \sqrt{A^{*2} - 4B^*}}{2}, \quad q_{3,4}^2 = \frac{-C^* \pm \sqrt{C^{*2} - 4D^*}}{2}, \quad (29)$$

方程(26)和(27)的解满足热幅射条件, 于是得到

$$q = D_1 e^{-q_1 y} + D_2 e^{-q_2 y}, \quad (30)$$

$$\Psi = D_3 e^{-q_3 y} + D_4 e^{-q_4 y}, \quad (31)$$

$$T = a_1^* D_1 e^{-q_1 y} + a_2^* D_2 e^{-q_2 y}, \quad (32)$$

$$\phi_3 = a_3^* D_3 e^{-q_3 y} + a_4^* D_4 e^{-q_4 y}, \quad (33)$$

其中

$$a_n^* = \frac{a_{11}q_n^2 - (\xi^2 - \omega^2)}{1 + i\alpha_1}, \quad a_{\ominus}^* = \frac{1}{a_{14}}(a_{12}\xi^2 - \omega^2 - a_{13}q_{\ominus}^2), \quad n = 1, 2; \quad \ominus = 3, 4 \quad (34)$$

2 边界条件

2.1 半空间界面作用力

此时, 界面 $y = 0$ 上的边界条件为

$$t_{22} = -F_0 \delta(x) e^{i\alpha x}, \quad t_{21} = 0, \quad m_{23} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} + hT = 0 \quad (35)$$

其中 $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数, F_0 为力的大小, h 为传热系数, 当 $h \rightarrow \infty$ 表示等温边界, $h \rightarrow 0$ 表示绝热边界。

对边界条件(35)使用式(25)定义的 Fourier 变换,并利用式(5)~(8)、(14)、(20)和式(30)~(33),得到具有立方对称性的微极热弹性体的位移分量、微转动、力应力、耦合应力和温度分布的表达式

$$u_1 = \frac{F_0}{\Delta} [i\xi \{ \Delta_1 e^{-q_1 y} - \Delta_2 e^{-q_2 y} \} + q_3 \Delta_3 e^{-q_3 y} - q_4 \Delta_4 e^{-q_4 y}], \quad (36)$$

$$u_2 = \frac{F_0}{\Delta} [q_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} - q_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} - i\xi \{ \Delta_3 e^{-q_3 y} - \Delta_4 e^{-q_4 y} \}], \quad (37)$$

$$\phi_3 = - \frac{F_0}{\Delta} [a_3^* \Delta_3 e^{-q_3 y} - a_4^* \Delta_4 e^{-q_4 y}], \quad (38)$$

$$t_{22} = - \frac{F_0}{\Delta} [r_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} - r_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + r_3 \Delta_3 e^{-q_3 y} - r_4 \Delta_4 e^{-q_4 y}], \quad (39)$$

$$t_{21} = - \frac{F_0}{\Delta} [s_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} - s_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + s_3 \Delta_3 e^{-q_3 y} - s_4 \Delta_4 e^{-q_4 y}], \quad (40)$$

$$m_{23} = \frac{F_0 B_3 \omega^{*2}}{\rho_1^4 \Delta} [a_3^* q_3 \Delta_3 e^{-q_3 y} - a_4^* q_4 \Delta_4 e^{-q_4 y}], \quad (41)$$

$$T = - \frac{F_0}{\Delta} [a_1^* \Delta_1 e^{-q_1 y} - a_2^* \Delta_2 e^{-q_2 y}], \quad (42)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = f_1 f_2 - f_3 f_4, f_1 = s_1 g_2^* - s_2 g_1^*, f_2 = a_3^* q_3 r_4 - a_4^* q_4 r_3, \\ f_3 = r_1 g_2^* - r_2 g_1^*, f_4 = a_3^* q_3 s_4 - a_4^* q_4 s_3, \\ \Delta_{1,2} = -f_4 g_{2,1}^*, \Delta_{3,4} = -a_{4,3}^* q_4 f_1, \\ g_{1,2}^* = a_{1,2}^* (q_{1,2} - h), r_n = -\xi^2 \frac{A_2}{\rho_1^2} + q_n^2 - a_n^*, r_\Theta = -i\xi q_\Theta \left(1 - \frac{A_2}{\rho_1^2} \right), \\ s_n = i\xi q_n (A_4 + A_3), s_\Theta = [A_3 q_\Theta^2 + \xi^2 A_4 + (A_3 - A_4) a_\Theta^*], \\ n = 1, 2; \Theta = 3, 4 \end{array} \right. \quad (43)$$

2.2 热源作用

有热源作用时的边界条件为

$$\begin{aligned} t_{22} = 0, \quad t_{21} = 0, \quad m_{23} = 0, \\ \partial T / \partial y = F_0 \delta(x) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad \text{在温度梯度边界,} \quad (44)$$

或 $T(x, y = 0) = F_0 \delta(x) e^{i\omega t}$, 在温度输入边界,

式中 F_0 为作用于边界上的定常温度的大小。

对式(44)使用式(25)定义的 Fourier 变换,并利用式(5)~(8)、(14)、(20)和式(30)~(33),得到类似方程(36)~(42)给出的热源作用时的位移、力应力、切向耦合应力和温度分布的表达式,只要将式(43)中的 Δ_0 替换为 Δ_0^0 ($\nu = 1, 2, 3, 4$), 这里

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{1,2}^0 = \pm H [-a_3^* q_3 (r_2 s_1 s_4 - r_4 s_2 s_1) + a_4^* q_4 (r_2 s_1 s_3 - r_3 s_2 s_1)], \\ \Delta_{3,4}^0 = \pm H a_{4,3}^* q_4 (r_1 s_2 - r_2 s_1) \end{array} \right. \quad (45)$$

3 特殊情况

情况 3.1 忽略微极效应(即 $B_3 = j = 0$)

这时我们得到位移、应力和温度分布相应的表达式为

$$u_1 = \frac{F_0}{\Delta^*} [i\xi \{ \Delta_1^{*'} e^{-q_1 y} - \Delta_2^{*'} e^{-q_2 y} \} + q_3 \Delta_3^{*'} e^{-q_3 y}], \quad (46)$$

$$u_2 = \frac{F_0}{\Delta^*} [q_1 \Delta_1^{*'} e^{-q_1 y} - q_2 \Delta_2^{*'} e^{-q_2 y} - i\xi \{ \Delta_3^{*'} e^{-q_3 y} \}], \quad (47)$$

$$t_{22} = -\frac{F_0}{\Delta^*} [r_1 \Delta_1^{*'} e^{-q_1 y} - r_2 \Delta_2^{*'} e^{-q_2 y} + r_3 \Delta_3^{*'} e^{-q_3 y}], \quad (48)$$

$$t_{21} = -\frac{F_0}{\Delta^*} [s_1 \Delta_1^{*'} e^{-q_1 y} - s_2 \Delta_2^{*'} e^{-q_2 y} + s_3 \Delta_3^{*'} e^{-q_3 y}], \quad (49)$$

$$T = -\frac{F_0}{\Delta^*} [a_1^* \Delta_1^{*'} e^{-q_1 y} - a_2^* \Delta_2^{*'} e^{-q_2 y}], \quad (50)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta^* = g_1^* (r_2 s_3^* - r_3^* s_2) - g_2^* (r_1 s_3^* - r_3^* s_1), & \Delta_{1,2}^{*'} = -g_2^* 1 s_3^*, \\ \Delta_3^{*'} = (s_1 g_2^* - s_2 g_1^*), & r_3^* = -i\xi q_3^* (1 - A_2 / \rho c_1^2), \\ s_3^* = (A_3 q_3^2 + \xi^2 A_4), & q_3^2 = \frac{1}{a_{13}} (a_{12} \xi^2 - \omega^2). \end{cases} \quad (51)$$

情况 3. 1a 热源作用

用 $\Delta_{\Xi}^{*\sigma}$ ($\Xi = 1, 2, 3$) 替换方程(51) 中的 $\Delta_{\Xi}^{*'}$, 得到类似方程(46)~(50) 对应于热源作用引起的位移、力应力和温度分布的表达式, 这里

$$\begin{cases} \Delta_1^{*\sigma} = -H (r_2 s_3^* - r_3^* s_2), & \Delta_2^{*\sigma} = H (r_1 s_3^* - r_3^* s_1), \\ \Delta_3^{*\sigma} = -H (r_1 s_2 - r_2 s_1). \end{cases} \quad (52)$$

情况 3. 2 忽略热效应

这时我们得到位移、微转动和应力的表达式为

$$u_1 = \frac{F}{\Delta^{**}} [i\xi \Delta_1^{**} e^{-q_1 y} - q_3 \Delta_2^{**} e^{-q_3 y} + q_4 \Delta_4^{**} e^{-q_4 y}], \quad (53)$$

$$u_2 = \frac{F}{\Delta^{**}} [q_1 \Delta_1^{**} e^{-q_1 y} + i\xi \{ \Delta_3^{**} e^{-q_3 y} - \Delta_4^{**} e^{-q_4 y} \}], \quad (54)$$

$$\phi_3 = \frac{F}{\Delta^{**}} [a_3^* \Delta_3^{**} e^{-q_3 y} - a_4^* \Delta_4^{**} e^{-q_4 y}], \quad (55)$$

$$t_{22} = -\frac{F}{\Delta^{**}} [r_1^* \Delta_1^{**} e^{-q_1 y} - r_3 \Delta_3^{**} e^{-q_3 y} + r_4 \Delta_4^{**} e^{-q_4 y}], \quad (56)$$

$$t_{21} = -\frac{F}{\Delta^{**}} [s_1^* \Delta_1^{**} e^{-q_1 y} - s_3 \Delta_3^{**} e^{-q_3 y} + s_4 \Delta_4^{**} e^{-q_4 y}], \quad (57)$$

$$m_{23} = -\frac{FB_3 \omega^2}{\rho c_1^4 \Delta^{**}} [a_3^* q_3 \Delta_3^{**} e^{-q_3 y} - a_4^* q_4 \Delta_4^{**} e^{-q_4 y}], \quad (58)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta^{**} = -a_3^* q_3 (r_1^* s_4 - r_4 s_1^*) + a_4^* q_4 (r_1^* s_3 - r_3 s_1^*), \\ \Delta_1^{**} = (a_4^* q_2 s_3 - a_3^* q_3 s_4), & \Delta_{2,3}^{**} = s_1^* a_4^* q_4, \\ s_3^* = i\xi q_1 (A_4 - A_3), & r_1^* = -\xi^2 A_2 / \rho c_1^2 + q_1^2, & q_1^2 = \frac{1}{a_{11}} (\xi^2 - \omega^2). \end{cases} \quad (59)$$

情况 3. 3 微极热弹性体

情况 3. 3a 在方程(36)~(42)、(46)~(50)、(53)~(58) 中, 取

$$A_1 = \lambda + 2\mu + K, \quad A_2 = \lambda, \quad A_3 = \mu + K, \quad A_4 = \mu, \quad B_3 = \nu, \quad (60)$$

分别得到各向同性微极热弹性介质、各向同性热弹性介质和微极各向同性介质中的相应表达

式。

情况 3. 3b 将式(60)代入式(36)~(42),并用 Δv^0 ($v=1, 2, 3, 4$) 替换式(45)中的 Δv , 就得到热源作用时相应的表达式。

4 逆变换

为了得到物理域中问题的解,我们必须对方程(36)~(42)、(46)~(50)和(53)~(58)作逆变换,这些表达式是 y 的函数, Fourier 变换参数为 ξ , 因此函数形为 $f(\xi, y)$ 。为了得到物理域中的函数 $f(x, y)$, 我们运用 Fourier 逆变换:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\xi x) f_e - i \sin(\xi x) f_o] d\xi \quad (61)$$

其中 f_e 和 f_o 分别为函数 $f(\xi, y)$ 的偶函数部分和奇函数部分。这一积分的详细计算方法见 Press 等人 1986 年发表的文献[21], 其中涉及到了 Rhombert 积分和自适应步长的使用。当步长趋于 0 时, 还利用了扩展梯形法则的逐步精确结果, 随之外推极限结果。

5 数值结果和讨论

数值计算中, 我们取具有立方对称性的微极介质的相关参数值如下:

$$A_1 = 1.96 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad A_2 = 1.17 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad A_3 = 5.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ A_4 = 4.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad B_3 = 9.8 \times 10^{-10} \text{ N}$$

为了与微极各向同性固体相比较(Eringen(1984)的文献[22]以及 Dhaliwal 和 Singh(1980)的文献[23]), 我们取镁晶体类材料的相关参数值:

$$\rho = 1.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \lambda = 9.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \mu = 4.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ K = 1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \nu = 7.79 \times 10^{-10} \text{ N}, \quad j = 2.0 \times 10^{-20} \text{ m}^2, \\ C^* = 1.04 \times 10^{10} \text{ cal/(kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C)} = 4.35 \times 10^{10} \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \\ \nu = 2.68 \times 10^6 \text{ N/(m}^2 \cdot \text{K)}, \quad T_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C} = 296 \text{ K}, \\ K^* = 1.7 \times 10^4 \text{ J/(s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K)}, \quad t_0 = 6.131 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad t_1 = 8.765 \times 10^{-13} \text{ s}$$

我们研究在绝热边界条件下, 受法向力作用的具有立方对称性的微极热弹性固体(MTECC)和微极热弹性各向同性固体(MTEIS)的法向位移 $U_2(= u_2/F_0)$ 、法向力应力 $T_{22}(= t_{22}/F_0)$ 、切向耦合应力 $M_{23}(= m_{23}/F_0)$ 和温度分布 $T^*(= T/F_0)$ 。在图 1~ 图 8 中示出了这些量随 x 的变化情况。图中实线和带符号的实线表示 MTECC 的结果, 虚线和带符号的虚线表示 MTEIS 的结果。频率分别取 $\omega = 0.25$, $\omega = 0.50$, $\omega = 0.75$ 。图中示出了微极热弹性立方晶体和微极热弹性各向同性体的比较。计算在 $y = 1.0$ 和 $0 \leq x \leq 10.0$ 条件下进行。

6 各种情况的讨论

6.1 外力

对某一特定频率值, MTECC 和 MTEIS 法向位移大小的变化在性质上是类似的。两种固体的法向位移值在 $0 \leq x \leq 2.0$ 时急剧下降, 并且 $\omega = 0.5$ 和 $\omega = 0.75$ 时较 $\omega = 0.25$ 时下降程度更甚, 见图 1。

由图 2 可以看出, 在 $0 \leq x \leq 2.0$ 区间内, 法向力应力值(对各 ω 值) 都随 x 增大而急剧增

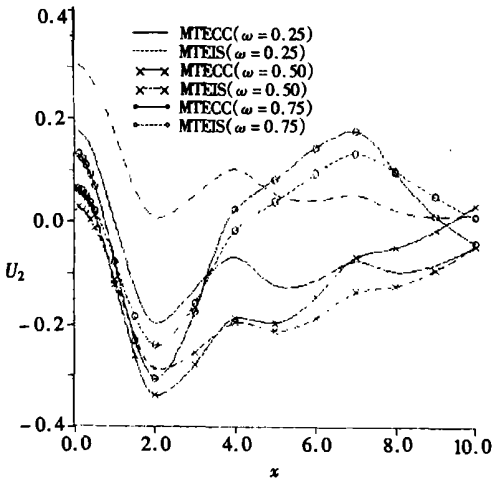


图1 外力作用引起的法向位移

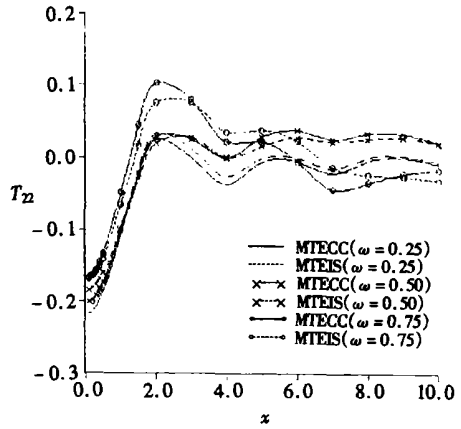
$$U_2 (= u_2 / F_0) \text{ 随 } x \text{ 的变化}$$


图2 外力作用引起的法向力应力

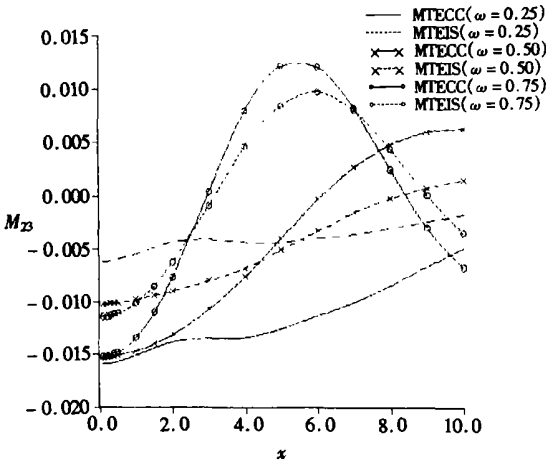
$$T_{22} (= t_{22} / F_0) \text{ 随 } x \text{ 的变化}$$


图3 外力作用引起的切向耦合应力

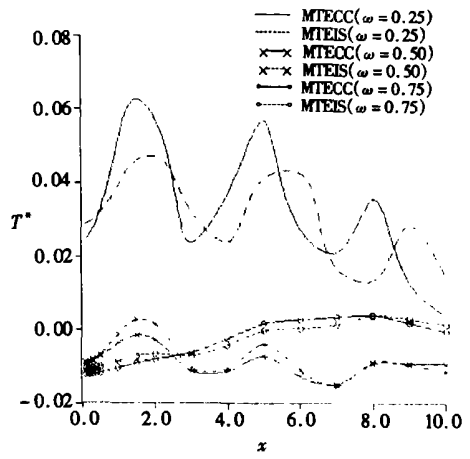
$$M_{23} (= m_{23} / F_0) \text{ 随 } x \text{ 的变化}$$


图4 外力作用引起的温度分布

$$T^* (= T / F_0) \text{ 随 } x \text{ 的变化}$$

大,而在 $2.0 \leq x \leq 10.0$ 区间中出现振荡。十分靠近力的作用点处,法向力应力值随 ω 增大而增大,但增大幅度很小。

切向耦合应力在其值域中随频率 ω 的增大而增大。 $\omega = 0.75$ 时, MTECC 和 MTEIS 的切向耦合应力的变化均呈钟形曲线,见图 3。力作用点附近, MTECC 和 MTEIS 的温度分布值都随频率 ω 的增大而减小,并且当 $\omega = 0.5$ 和 $\omega = 0.75$ 时,两种材料在力作用点处的温度值相差很少,而 $\omega = 0.25$ 时,温度分布的变化更为振荡,见图 4。

6.2 热源

在区间 $0 \leq x \leq 2.0$ 内,法向位移值随频率急剧增加,而在区间 $2.0 \leq x \leq 10.0$ 内,法向位移值的呈振荡变化。对任意点,任意频率, MTECC 和 MTEIS 的法向位移值都非常接近。热源作用引起的法向位移的变化示于图 5。我们得到的法向力应力的变化和法向位移的变化很大程度上正好相反。与法向位移变化相似的是,在任意点上两种材料的法向力应力值很相近。

法向力应力的变化示于图 6。

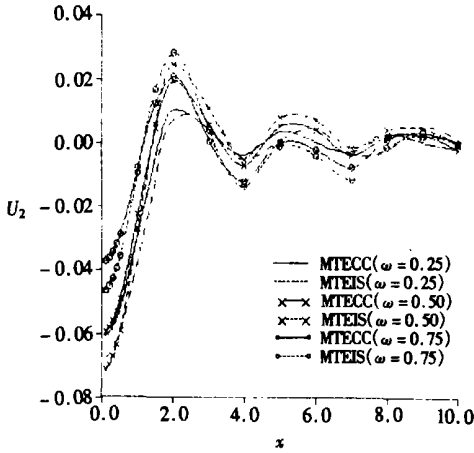


图 5 热源作用引起的法向位移
 $U_2 (= u_2/F_0)$ 随 x 的变化

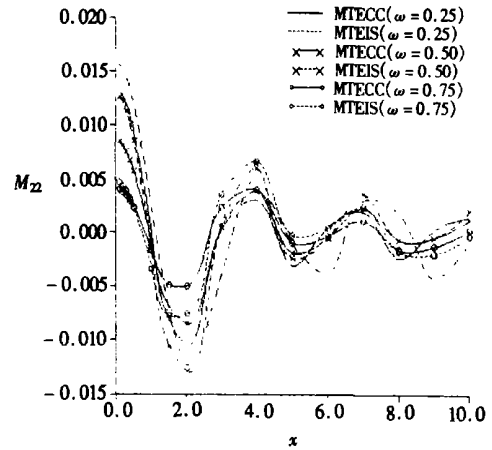


图 6 热源作用引起的法向力应力
 $M_{22} (= t_{22}/F_0)$ 随 x 的变化

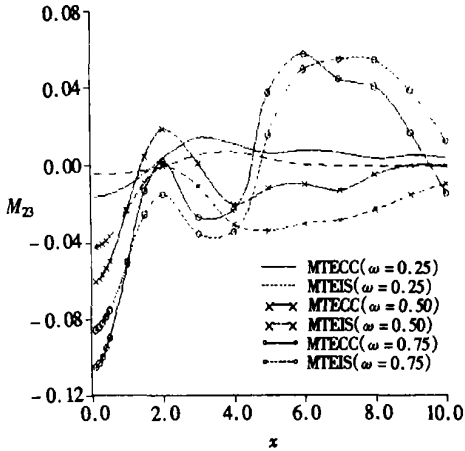


图 7 热源作用引起的切向耦合应力
 $M_{23} (= m_{23}/F_0)$ 随 x 的变化

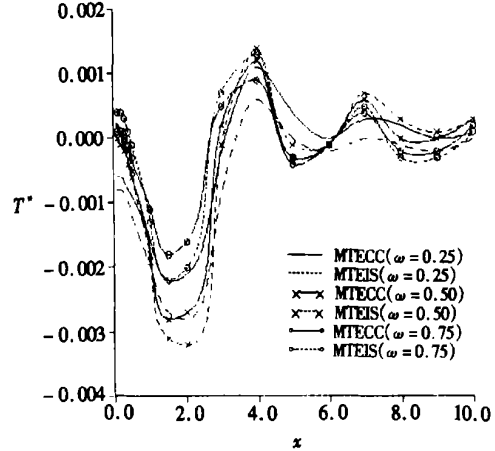


图 8 热源作用引起的温度分布
 $T^* (= T/F_0)$ 随 x 的变化

图 7 出示了热源作用点附近, 切向耦合应力值随频率值增大而减小的情况。其振荡幅度却随频率 ω 的增大而加大, 即在 $\omega = 0.25$ 时, 切向耦合应力值局限于很小的范围。图中两种材料各频率的切向耦合应力值已放大了 100 倍。

两种材料在各频率下的温度分布变化非常相似。这些温度分布曲线随水平距离 x 的增大, 先是急剧下降然后呈现振荡, 并且振荡幅度逐步减小。温度分布的变化示于图 8。

7 结 论

一个物体的性质很大程度上取决于该物体结构上的对称性。在物体的变形研究中, 频率有着重要的作用。由于热源作用求得的各量值, 比之外力作用物体界面时求得的各量值要小, 当物体在热源作用下变形, 这些量值的变化也更平缓。

[参 考 文 献]

- [1] Biot M. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. J Appl Phys, 1956, **27**(3): 240—253.
- [2] Muller J M. The coldness of universal function in thermoelastic bodies[J]. Arch Ration Mech Anal, 1971, **41**(5): 319—332.
- [3] Green A E, Laws N. On the entropy production inequality[J]. Arch Ration Mech Anal, 1972, **45**(1): 47—53.
- [4] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. J Elasticity, 1972, **2**: 1—5.
- [5] Suhubi E S. Thermoelastic solids[A]. In: Eringen A C, Ed. Continuum Physics [C]. Vol 2. Part 2, Chapter 2. New York: Academic Press, 1975.
- [6] Eringen A C. Foundations of Micropolar Thermoelasticity [M]. Intern Cent for Mech Studies. Course and Lectures. No 23. Wien: Springer-Verlag, 1970.
- [7] Nowacki M. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity[A]. In: Parkus H, Sedov L I, Eds. Proc IUTAM Symposia [C]. Vienna: Springer-Verlag, 1966, 259—278.
- [8] Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids[J]. Arch Mech, 1973, **25**(3): 547—561.
- [9] Iesan D. Torsion of anisotropic elastic cylinders[J]. Z Angew Math Mech, 1974, **54**(12): 773—779.
- [10] Iesan D. Bending of orthotropic micropolar elastic beams by terminal couples[J]. An St Uni Iasi, 1974, **20**(2): 411—418.
- [11] Nakamura S, Benedict R, Lakes R. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity[J]. Internat J Engg Sci, 1984, **22**(3): 319—330.
- [12] Kumar R, Choudhary S. Influence and Green's function for orthotropic micropolar continua[J]. Archives of Mechanics, 2002, **54**(4): 185—198.
- [13] Kumar R, Choudhary S. Dynamical behavior of orthotropic micropolar elastic medium[J]. Journal of Vibration and Control, 2002, **8**(8): 1053—1069.
- [14] Kumar R, Choudhary S. Mechanical sources in orthotropic micropolar continua[J]. Proc Indian Acad Sci (Earth Planet Sci), 2002, **111**(2): 133—141.
- [15] Kumar R, Choudhary S. Response of orthotropic micropolar elastic medium due to various sources[J]. Meccanica, 2003, **38**(3): 349—368.
- [16] Kumar R, Choudhary S. Response of orthotropic micropolar elastic medium due to time harmonic sources [J]. Sadhana, 2004, **29**(1): 83—92.
- [17] Minagawa S, Arakawa K, Yamada M. Dispersion curves for waves in a cubic micropolar medium with reference to estimations of the material constants for diamond[J]. Bull JSME, 1981, **24**(187): 22—28.
- [18] Kumar R, Rani L. Elastodynamics of time harmonic sources in a thermally conducting cubic crystal[J]. Internat J Appl Mech Engg, 2003, **8**(4): 637—650.
- [19] Kumar R, Ailawalia P. Behaviour of micropolar cubic crystal due to various sources[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, **283**(3/5): 875—890.
- [20] Kumar R, Ailawalia P. Deformation in micropolar cubic crystal due to various sources[J]. Internat J Solids Struct, 2005, **42**(23): 5931—5944.
- [21] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [22] Eringen A C. Plane waves in non-local micropolar elasticity[J]. Internat J Engg Sci, 1984, **22**(8/10): 1113—1121.
- [23] Dhaliwal R S, Singh A. Dynamic Coupled Thermoelasticity [M]. New Delhi, India: Hindustan Publication Corporation, 1980, 726.

[24] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. J Math Mech , 1966, 15(6): 909—923.

Deformation Due to Time Harmonic Sources in Micropolar Thermoelastic Medium Possessing Cubic Symmetry With Two Relaxation Times

Rajneesh Kumar¹, Praveen Ailawalia²

(1. Department of Mathematics, Kurukshetra University,
Kurukshetra, Haryana, India, 136119;

2. Department of Applied Sciences, Institute of Engineering and Emerging Technologies,
Makhanumajra, Baddi, Distt. Solan, H. P., India, 173205)

Abstract: The response of a micropolar thermoelastic medium possessing cubic symmetry with two relaxation times due to time harmonic sources has been investigated. Fourier transform was employed and the transform was inverted by using a numerical inversion technique. The components of displacement, stress, microrotation and temperature distribution in the physical domain were obtained numerically. The results of normal displacement, normal force stress, tangential couple stress and temperature distribution were compared for micropolar cubic crystal and micropolar isotropic solid. The numerical results were illustrated graphically for a particular material. Some special cases were also deduced.

Key words: time harmonic; thermoelastic; micropolar medium; cubic symmetry; microrotation; Fourier transform