

功能梯度材料有限宽板的反平面 断裂问题研究

李永东¹, 贾 斌², 张 男¹, 戴 耀¹, 唐立强³

(1. 解放军装甲兵工程学院 机械工程系 工程力学教研室, 北京 100072;

2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001;

3. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

(王银邦推荐)

摘要: 研究了功能梯度材料有限宽板中与板边平行的 III 型裂纹问题。假设材料的剪切模量沿板宽度方向呈指数规律变化, 利用 Fourier 变换将问题描述为奇异积分方程, 并进一步将未知的位错密度函数表示为 Chebyshev 多项式的级数式, 从而将奇异积分方程化为线性代数方程组进行配点数值求解。基于数值结果, 讨论了材料非均匀性参数、板和裂纹的几何参数等对应力强度因子 (SIF) 的影响。研究表明, SIF 随裂纹长度的增大而增大, 随裂纹所在区域材料刚度的增大而减小; 板越窄, SIF 对非均匀性参数的变化越敏感, 且变化规律也越复杂。随着非均匀性参数的增大, SIF 既可能增大也可能减小还可能基本保持不变, 这主要取决于板的相对宽度和裂纹的相对位置。当裂纹位于板的中央或当板较宽时, SIF 对非均匀性参数的变化都不太敏感。

关键词: 功能梯度材料; 反平面断裂; 应力强度因子; Fourier 变换; 奇异积分方程; 有限宽板

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

随着航空、航天、国防等工业的发展, 常规的均匀材料越来越难以满足这些尖端行业对材料性能的苛刻要求^[1,2]。为适应耐磨、耐热、抗冲击等工程需要, 近年来工程中设计和制造了性质连续过渡的功能梯度材料。随着功能梯度材料应用的发展, 其断裂力学分析逐渐成为断裂力学研究的热点。通过将材料性能参数假设为空间坐标的某种特定函数, 如, 指数函数^[3,4]、幂函数^[5]、线性函数^[6]等, 人们研究了功能梯度材料的各种断裂问题。在功能梯度材料断裂力学研究中, 反平面裂纹问题是工程中普遍存在的一类问题。在功能梯度涂层、功能梯度界面层、功能梯度板材等结构中, 反平面断裂是较典型的断裂模式。Erdogan 采用基于斜率描述的奇异积分方程, 研究了功能梯度双材料界面反平面断裂问题, 得到了应力强度因子随材料非均匀性参数的变化规律^[7]。Erdogan 和 Ozturk 研究了与功能梯度涂层界面垂直的周期性

收稿日期: 2005_04_08; 修订日期: 2006_02_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90305023)

作者简介: 李永东(1971), 男, 四川眉山人, 副教授, 博士(联系人, Tel/ Fax: + 86_10_66719259; E_mail: lydbeijing@163.com)

反平面裂纹问题^[8] Chan 等采用基于位移描述的超奇异积分方程,研究了功能梯度材料的反平面裂纹问题^[9];Huang 等将功能梯度涂层划分为多个子层,并假设每个子层的剪切模量呈线性变化以模拟涂层中剪切模量的任意变化,研究了功能梯度涂层的反平面断裂问题^[10] Wang 等对比研究了剪切模量的多种不同分布类型对功能梯度板条型应力强度因子的影响^[11] 本文假设材料剪切模量沿板宽度方向呈指数规律变化,推导功能梯度材料有限宽板反平面断裂问题的 Cauchy 奇异积分方程,并对奇异积分方程进行数值求解,最后基于数值结果,分析功能梯度材料非均匀性参数、板和裂纹的几何参数等对应力强度因子的影响

1 力学模型

图 1 所示为宽度为 h_0 的无限长功能梯度材料板条,其中在离下表面距离为 h 的平面上有一条长为 $2a$ 的裂纹 如图建立直角坐标系,假设材料的剪切模量为坐标 Y 的如下指数函数:

$$G(Y) = G_0 e^Y, \tag{1}$$

其中, G_0 为功能梯度材料板条下表面($Y = 0$) 处的剪切模量, Y 为功能梯度材料的非均匀性参数

在以裂纹中心为原点的坐标系 xoy 中,材料的剪切模量表示为

$$G(y) = G_1 e^y, \tag{2}$$

其中, $G_1 = G_0 e^h$ 为功能梯度板条中离下表面距离为 h 的平面处的剪切模量

假设图 1 所示的无限长功能梯度板条上、下侧面受到反平面剪切载荷作用且裂纹面为自由表面,则该问题可以看作如下两个问题的叠加: (a) 上、下侧面反平面剪切载荷的作用,使得无裂纹功能梯度板条在离下表面距离为 h 的平面上产生的剪应力为 $\tau_0(x)$; (b) 在离下表面距离为 h 的平面上含有裂纹的功能梯度板条上、下侧面自由,而裂纹表面受到 $\tau_0(x)$ 作用 由于问题(a)对于裂纹尖端场没有影响,所以,在此可以仅考虑问题(b),而将 $\tau_0(x)$ 作为裂纹面已知的应力边界条件处理^[10],此时,图 1 中裂纹问题的边界条件和连续条件可表示为

$$\tau_{yz}(x, h_0 - h) = 0, \quad \tau_{yz}(x, -h) = 0, \quad x \in (-a, +a), \tag{3}$$

$$\tau_{yz}(x, +0) = \tau_{yz}(x, -0) = \tau_0(x), \quad x \in (-a, a), \tag{4}$$

$$\tau_{yz}(x, +0) = \tau_{yz}(x, -0), \quad x \in (-a, +a), \tag{5}$$

$$w(x, +0) = w(x, -0), \quad x \in (-a, a) \tag{6}$$

2 奇异积分方程的导出与求解

功能梯度材料反平面问题的本构关系为

$$\tau_{xz} = G(y) \frac{w}{x}, \quad \tau_{yz} = G(y) \frac{w}{y}; \tag{7}$$

反平面问题的平衡方程为

$$\frac{\tau_{xz}}{x} + \frac{\tau_{yz}}{y} = 0 \tag{8}$$

将(7)式代入(8)式并考虑(2)式,再对结果关于 x 作 Fourier 积分变换,可得变换域中的控制方程为

$$\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{dw}{dy} - \lambda^2 w = 0, \tag{9}$$

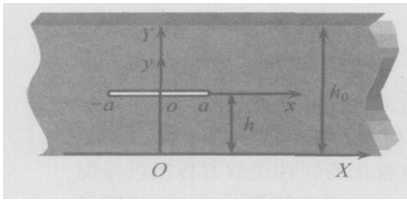


图 1 功能梯度材料板条中的反平面裂纹

其中, w 为反平面的位移 $w(x, y)$ 关于 x 的如下 Fourier 积分变换

$$w(\cdot, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i x} dx \quad (10)$$

(9) 式的解析解如下

$$w(\cdot, y) = A_j(\cdot) e^{-0.5l - p(\cdot)l y} + B_j(\cdot) e^{-0.5l + p(\cdot)l y}, \quad (11)$$

其中, $p(\cdot) = \sqrt{2 + 4\cdot^2}$; 当 $y < 0$ 时, $j = 1$; 当 $y \geq 0$ 时, $j = 2$

将(11)式代入(10)式, 并作 Fourier 逆变换, 可得反平面位移场的 Fourier 积分变换解为

$$w(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_j(\cdot) e^{-0.5l - p(\cdot)l y} + B_j(\cdot) e^{-0.5l + p(\cdot)l y}] e^{-i x} dx \quad (12)$$

将(12)式代入(7)式, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_z = - \frac{G(y)}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ A_j(\cdot) [l - p(\cdot)] e^{-0.5l - p(\cdot)l y} + \right. \\ \left. B_j(\cdot) [l + p(\cdot)] e^{-0.5l + p(\cdot)l y} \right\} e^{-i x} dx \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)式代入(3)式和(5)式, 可得

$$B_1(\cdot) = A_1(\cdot) [l - p(\cdot)]^2 e^{-h p(\cdot)} / (4\cdot^2), \quad (14)$$

$$B_2(\cdot) = A_2(\cdot) [l - p(\cdot)]^2 e^{(h_0 - h)p(\cdot)} / (4\cdot^2), \quad (15)$$

$$A_1(\cdot) = \frac{1 - e^{(h_0 - h)p(\cdot)}}{1 - e^{-h p(\cdot)}} A_2(\cdot) \quad (16)$$

为了导出求解上述问题的奇异积分方程, 引入如下的位错密度函数

$$g(x) = \frac{w(x, +0)}{x} - \frac{w(x, -0)}{x}; \quad (17)$$

利用该位错密度函数可以将连续条件(6)式表示为

$$g(x) = 0, \quad x \in (-a, a) \quad (18)$$

对(17)式两边关于 x 作 Fourier 变换, 并结合(18)式, 可得

$$\int_{-a}^a g(x) e^{i x} dx = w(\cdot, +0) - w(\cdot, -0) \quad (19)$$

将(11)式代入(19)式, 并结合(14)~(16)式, 可得

$$A_2(\cdot) = \frac{4\cdot^2 [e^{h p(\cdot)} - 1]}{\left\{ 4\cdot^2 + [l - p(\cdot)]^2 \right\} (e^{h_0 p(\cdot)} - 1)} \int_{-a}^a g(s) e^{i s} ds \quad (20)$$

可见, 只要能求出未知函数 $g(x)$, 就可以确定 4 个未知函数 $A_1(\cdot)$ 、 $B_1(\cdot)$ 、 $A_2(\cdot)$ 和 $B_2(\cdot)$, 从而使问题得以求解. 令 $y = 0$, 将(20)式、(14)~(16)式代入(13)式, 可得

$$\sigma_z(x, 0) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(s) K(x, s) ds, \quad (21)$$

其中,

$$K(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\cdot) e^{i(s-x)} d\cdot;$$

$$k(\cdot) = G_1 \frac{[l - p(\cdot)] [e^{(h_0 - h)p(\cdot)} - 1] [e^{h p(\cdot)} - 1]}{\left\{ 4\cdot^2 + [l - p(\cdot)]^2 \right\} [e^{h_0 p(\cdot)} - 1]}$$

由于 $\lim_{\cdot \rightarrow 0} k(\cdot) = - (1/4) G_1 \text{sgn}(\cdot)$, 根据 Riemann-Lebesgue 公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(\cdot) e^{i(s-x)} d\cdot = -2/(s-x)$ 可知, 当 $\cdot \rightarrow 0$ 时, $k(\cdot)$ 中会导致(21)式出现奇异积分的项为 $-G_1 \text{sgn}(\cdot)/4$, 将该项从 $k(\cdot)$ 中分离出来, 则剩余项 $k(\cdot) + G_1 \text{sgn}(\cdot)/4$ 在 $\cdot \rightarrow 0$ 时不会引起(21)式出现奇异积分, 于是可得

$$K(x, s) = \frac{G_1}{2} \frac{1}{s-x} + i \int_0^+ \left[k(\xi) + \frac{G_1}{4} \operatorname{sgn}(\xi) \right] e^{i(s-x)\xi} d\xi$$

因为 $e^{i(s-x)\xi} = \cos[\xi(s-x)] + i \sin[\xi(s-x)]$, 且 $k(\xi) + G_1 \operatorname{sgn}(\xi)/4$ 是关于 ξ 的奇函数, 所以

$$K(x, s) = \frac{G_1}{2} \frac{1}{s-x} + 2 \int_0^+ \left[k(\xi) + \frac{G_1}{4} \operatorname{sgn}(\xi) \right] \sin[\xi(x-s)] d\xi,$$

$$y_z(x, 0) = \frac{G_1}{2} \int_{-a}^a \frac{g(s)}{s-x} ds + \frac{1}{-a} \int_{-a}^a K_1(x, s) g(s) ds, \quad x \in (-a, +a), \quad (22)$$

其中, Fredholm 核

$$K_1(x, s) = 2 \int_0^+ \left[k(\xi) + \frac{G_1}{4} \operatorname{sgn}(\xi) \right] \sin[\xi(x-s)] d\xi \quad (23)$$

将(22)式代入裂纹面的应力边界条件(4)式, 并引入线性变换 $s = s/a, x = x/a$, 可得如下的 Cauchy 奇异积分方程

$$\frac{G_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{g(s)}{s-x} ds + \frac{a}{-1} \int_{-1}^1 K_1(x, s) g(s) ds = \sigma_0(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (24)$$

其中 $g(s) = g(as); K_1(x, s) = K_1(ax, as); \sigma_0(x) = \sigma_0(ax)$

另外, 位移单值条件可用 $g(s)$ 表示为

$$\int_{-1}^1 g(s) ds = 0 \quad (25)$$

依据 Erdogan 所建立的数值解法^[12], $g(s)$ 可用 Chebyshev 多项式表示为如下级数

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \sum_{j=0}^m C_j T_j(s) \quad (26)$$

其中, C_j 为待定系数, $T_j(s) = \cos(j \arccos s)$ 为第一类 Chebyshev 多项式

将 s 和 x 作如下的离散化处理

$$\begin{cases} s_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, & (k = 1, 2, \dots, n), \\ x_r = \cos \frac{r\pi}{n}, & (r = 1, 2, \dots, n-1), \end{cases} \quad (27)$$

则可以在此离散点集上, 将方程(24)和(25)表示为如下代数方程

$$\sum_{k=1}^n g(s_k) \sqrt{1-s_k^2} [G \sqrt{(s_k-x_r)} + 2a K_1(x_r, s_k)] = 2n \sigma_0(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^n g(s_k) \sqrt{1-s_k^2} = 0 \quad (29)$$

(28)式与(29)式联立组成了含有 n 个未知数和 n 个线性无关代数方程的方程组, 由此可解出未知函数 $g(s)$ 在 n 个求积节点 s_k 所构成的离散点集上的值 $g(s_k) (k = 1, 2, \dots, n)$

3 数值结果与讨论

图 1 中裂纹尖端 $x = a$ 处的 II 型应力强度因子定义为 $K_{II} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} y_z(x, 0)$,

将(22)式代入该定义式, 并且利用(26)式和 Chebyshev 第一类多项式 $T_j(s)$ 的如下性质

$$\frac{1}{-1} \int_{-1}^1 \frac{T_j(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} ds = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{x^2-1}} [x - \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2-1}]^n,$$

$$j = 0, |x| > 1,$$

可得裂纹尖端 $x = a$ 处的 I 型应力强度因子为

$$K = - \frac{G_1}{2} \sqrt{a} \sum_{j=0}^m C_j \quad (30)$$

实际计算时, 应力强度因子都用 $\sigma_0 \sqrt{a}$ 进行归一化处理, 即, $\hat{K} = K / (\sigma_0 \sqrt{a})$

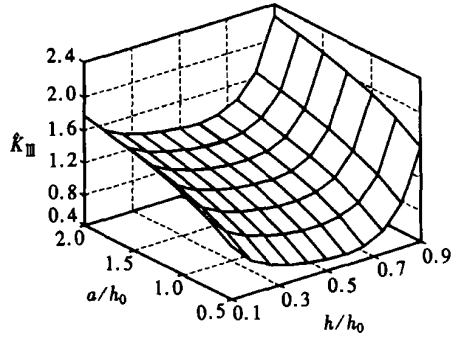
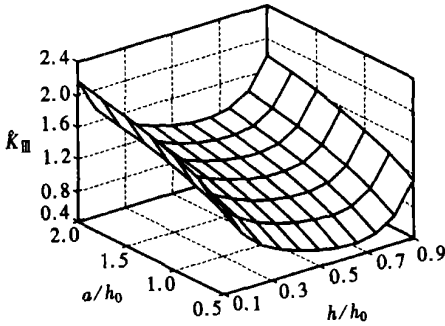


图2 裂纹长度和位置对 \hat{K} 的影响 ($\gamma > 0$) 图3 裂纹长度和位置对 \hat{K} 的影响 ($\gamma < 0$)

在 h_0 和 γ 给定的条件下, 图2和3给出了裂纹半长 a 和位置 h 对 \hat{K} 的影响, 其中 a 和 h 都用板宽 h_0 作了归一化处理。图2中 $\gamma > 0$, 图3中 $\gamma < 0$ 。可见:

(A) \hat{K} 随裂纹尺寸 a/h_0 的增大而呈现出稳定的增长

(B) 在其它条件不变的情况下, 裂纹越靠近板边(即, $h/h_0 = 0.1$ 或 0.9), 则应力强度因子 \hat{K} 随裂纹位置的变化越显著。当裂纹位于板的刚度较小的一侧(如, 图2中 $0.1 < h/h_0 < 0.3$ 或图3中 $0.7 < h/h_0 < 0.9$) 时, 应力强度因子随裂纹位置而变化的幅度高于当裂纹位于板的刚度较大的一侧(如, 图2中 $0.7 < h/h_0 < 0.9$ 或图3中 $0.1 < h/h_0 < 0.3$) 时的情况。相对而言, 裂纹越靠近板的中部(即, $h/h_0 \approx 0.5$), 应力强度因子的值越低, 且应力强度因子随裂纹位置而变化的幅度也越小。

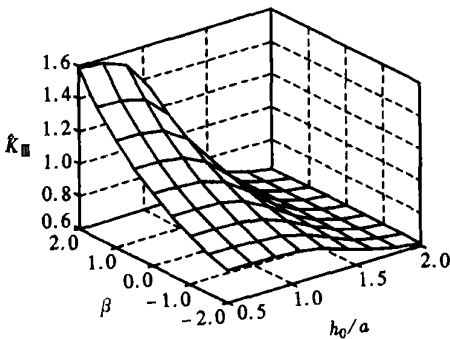


图4 非均匀性参数 B 和板宽对 \hat{K} 的影响 ($h/h_0 = 0.2$)

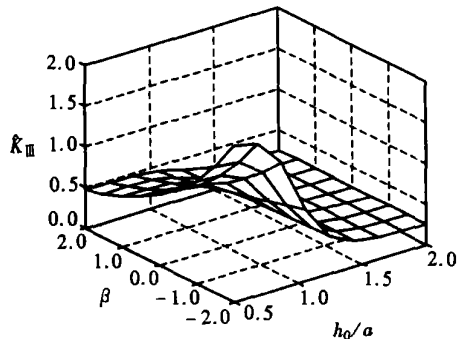


图5 非均匀性参数 B 和板宽对 \hat{K} 的影响 ($h/h_0 = 0.8$)

在裂纹半长 a 和裂纹相对位置 h/h_0 给定的情况下, 图4~图6给出了 \hat{K} 随 B 和 h_0 而变化的情况, 其中 h_0 用 a 进行了归一化处理。可见:

当裂纹靠近板边(如图4中 $h/h_0 = 0.2$ 或图5中 $h/h_0 = 0.8$) 时, B 和 h_0 对 \hat{K} 的影响较为复杂, 且这两方面影响总是耦合在一起。对不同宽度的板而言, 靠近板边的裂纹的应力强度因子随 B 的变化呈现出不同的规律。

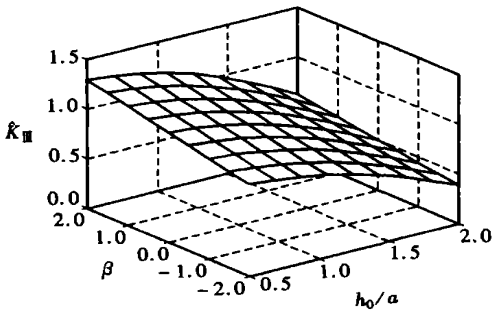


图6 非均匀性参数 B 和板宽对 K 的影响 ($h/h_0 = 0.5$)

著地减小#

4 结 论

- 1) K 随裂纹半长 a 的增加而平稳增长#
- 2) 在板宽 h_0 和材料非均匀性参数 B 给定的条件下, 裂纹越靠近板边, 则应力强度因子 K 随裂纹位置的变化越显著#
- 3) 较窄的板对材料非均匀性参数 B 的变化非常敏感, 且 K 随 B 的变化较复杂)) K 既可能随 B 的增大而增大, 也可能随 B 的增大而减小, 具体主要取决于板的相对宽度 h_0/a 和裂纹的相对位置 h/h_0 #
- 4) 当裂纹位于板的中央或当板较宽时, K 对材料非均匀性参数 B 的变化都不太敏感#

[参 考 文 献]

- [1] 李永东, 张丙喜. 压剪载荷作用下界面裂纹尖端场的研究[J]. 力学学报, 2003, 35(1): 85) 89.
- [2] 唐立强, 李永东, 刘长海. 弹性-幂硬化蠕变性材料 θ 型界面裂纹准静态扩展的渐近分析[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(2): 206) 212.
- [3] Erdogan F. Fracture mechanics of functionally graded materials[J]. Composites Engineering, 1995, 5(7): 753) 770.
- [4] Chen Y F, Erdogan F. The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1996, 44(7): 771) 787.
- [5] Sang_Pyo J, Yoshinobu T. Axisymmetrical elastic behavior and stress intensity factor for a nonhomogeneous medium with a penny-shaped crack[J]. JSME International Journal Series A, 1998, 41(4): 457) 464.
- [6] HUANG Gan_yun, WANG Yue_sheng, YU Shou_wen. Fracture analysis of a functionally graded interfacial zone under plane deformation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(3/4): 731) 743.
- [7] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading [J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(4): 823) 828.
- [8] Erdogan F, Ozturk M. Periodic cracking of functionally graded coatings[J]. International Journal of Engineering Science, 1995, 33(15): 2179) 2195.
- [9] Chan Y S, Paulino G H, Fannjian A C. The crack problem for nonhomogeneous materials under an-

Structures, 2001, 38(17): 2989) 3005.

- [10] HUANG Gan_yun, WANG Yue_sheng, Dietmar G. Fracture analysis of functionally graded coatings: antiplane deformation[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2002, 21(3): 391) 400.
- [11] WANG Bao_lin, MAI Yu_wing, SUN Yu_guo. Anti_plane fracture of a functionally graded material strip[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2003, 22(3): 357) 368.
- [12] Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1972, 29(4): 525) 534.

A n t i _ P l a n e F r a c t u r e A n a l y s i s o f a F u n c t i o n a l l y G r a d i e n t
M a t e r i a l I n f i n i t e S t r i p W i t h F i n i t e W i d t h

LI Yong_dong¹, JIA Bin², ZHANG Nan¹, DAI Yao¹, TANG Li_qiang³

(1. Division of Engineering Mechanics, Department of Mechanical Engineering,

Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, P. R. China;

2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology,

Harbin 150001, P. R. China;

3. College of Civil Engineering, Harbin Engineering University,

Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The special case of a crack under mode I conditions was treated, lying parallel to the edges of an infinite strip with finite width and with the shear modulus varying exponentially perpendicular to the edges. By using Fourier transforms the problem was formulated in terms of a singular integral equation. It was numerically solved by representing the unknown dislocation density by a truncated series of Chebyshev polynomials leading to a linear system of equations. The stress intensity factor (SIF) results were discussed with respect to the influences of different geometric parameters and the strength of the non-homogeneity. It was indicated that the SIF increases with the increase of the crack length and decreases with the increase of the rigidity of the material in the vicinity of crack. The SIF of narrow strip is very sensitive to the change of the non-homogeneity parameter and its variation is complicated. With the increase of the non-homogeneity parameter, the stress intensity factor may increase, decrease or keep constant, which is mainly determined by the strip width and the relative crack location. If the crack is located at the midline of the strip or if the strip is wide, the stress intensity factor is not sensitive to the material non-homogeneity parameter.

Key words: functionally gradient material; anti_plane fracture; stress intensity factor; Fourier transform; singular integral equation; finite_width strip