

三维弹性问题无网格分析的奇异 杂交边界点方法*

苗 雨, 王元汉

(华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074)

(王乘推荐)

摘要: 提出了一种求解三维线弹性问题的奇异杂交边界点方法。将修正变分原理与移动最小二乘法结合起来, 利用了前者的降维优势和后者的无网格特性。使用刚体位移法处理方法中的强奇异积分, 提出了一种自适应的积分方案, 解决了原有的杂交边界点方法中存在的“边界层效应”。在该方法中, 将基本解的源点直接布在边界上, 避免了在正则化杂交边界点法中不确定参数的选取。三维弹性力学问题算例体现了这些特点。结果表明该方法与已知的精确解符合较好, 同时研究了影响该方法精度的一些参数。

关键词: 三维弹性问题; 移动最小二乘; 无网格法; 修正变分原理; 奇异杂交边界点方法

中图分类号: O241 文献标识码: A

引 言

对于一个复杂的三维结构, 划分有限元网格非常繁琐、费时。近来, 无网格方法引起了人们的注意。无网格法最初的研究应该追溯到模拟天体物理现象的光滑质点流体动力学法 (SPH)^[1]。后来提出了不同名称的无网格方法, 比如无网格迦辽金法 (EFG)^[2] 等。

无网格的思想也被应用于边界积分方程 (BIE) 中去, 将边界积分方程方法同移动最小二乘法结合起来。它只要求求解域的表面离散分布的点的信息, 象边界点方法 (BNM)^[3]。

文献 [4] 提出了一种称为杂交边界点 (Hybrid BNM) 的边界无网格方法。该方法既不需要插值网格, 也不需要积分网格。但是它有很严重的“边界层效应”。为克服边界层效应, 文献 [5] 进一步提出了正则化杂交边界点方法 (RHBNM)。尽管将源点布在域外可以避免边界层效应, 但又带来了新的问题。比如如何安置这些源点? 在处理凹域以及裂纹问题的时候, 矛盾尤为突出。

本文提出了一种奇异杂交边界点方法, 并应用于三维弹性问题。该方法结合了移动最小二乘近似和修正变分原理^[6]。数值算例表明了该方法的有效性。

* 收稿日期: 2004_12_03; 修订日期: 2006_02_10

基金项目: 中国科学院岩土力学重点实验室资助项目 (Z110507)

作者简介: 苗雨 (1979—), 男, 山东人, 讲师, 博士 (联系人, Tel: + 86_27_87556934; E_mail: my_miaoyu@163.com)。

1 三维奇异杂交边界点法中的移动最小二乘(MLS)插值

本方法中的 MLS 插值是分别在分片光滑的边界 Γ 上独立进行的, 避免了在角点处的不连续。在本文中, 这些边界称为“面”。

为方便起见, 在该方法中, 为 MLS 插值选择了参数坐标系。

$$x = x(s_1, s_2), \quad y = y(s_1, s_2), \quad z = z(s_1, s_2), \quad (1)$$

式中, 参数坐标的取值范围定义为 $s_1, s_2 \in [0, 1]$ 。

边界 $\partial\Omega$ 上的位移 \mathbf{u} 和面力 \mathbf{t} 用 MLS 表示为

$$\mathbf{u}(s) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(s) \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{t}(s) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(s) \hat{\mathbf{t}}_i, \quad (3)$$

其中

$$\Phi_i(s) = \sum_{j=1}^m p_j(s) [A^{-1}(s) \mathbf{B}(s)]_{ji}, \quad (4)$$

矩阵 $\mathbf{A}(s)$ 和 $\mathbf{B}(s)$ 表达式为

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{i=1}^N w_i(s) \mathbf{p}(s_i) \mathbf{p}^T(s_i), \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(s) = [w_1(s) \mathbf{p}(s_1), w_2(s) \mathbf{p}(s_2), \dots, w_N(s) \mathbf{p}(s_N)], \quad (6)$$

其中, $\mathbf{p}(s)$ 是基函数向量, $w_i(s)$ 是权函数, 本文选取高斯函数作为权函数, N 是影响域内节点的个数。

2 奇异杂交边界点方法

2.1 变分原理

对于任意三维固体力学中的求解域 Ω , 其边界 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ 。

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \quad (7)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 是应力向量, \mathbf{b} 是体力向量, \mathbf{L} 是微分算子。边界条件为

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}), \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (\text{在 } \Gamma_t \text{ 上}), \quad (9)$$

横线表示已知边界条件, \mathbf{n} 是外法线矢量。

变分形式为

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{i,j} C_{ijkl} u_{k,l} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma. \quad (10)$$

为了在选择试函数时有更大的灵活性, 修正的变分原理认为域内的位移场 \mathbf{u} 和边界上的位移场 $\bar{\mathbf{u}}$ 是相互独立的(见图 1)。另外, 两个位移场在边界处必须满足位移协调条件

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}). \quad (11)$$

将协调条件通过一系列的 Lagrange 乘子 λ 引入式(10)。Lagrange 乘子 λ 可以用边界上的面力来表示。修正变分 Π 变为

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{i,j} C_{ijkl} u_{k,l} \, d\Omega - \int_{\Gamma} t_i (u_i - \bar{u}_i) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_t} t_i \bar{u}_i \, d\Gamma, \quad (12)$$

由 $\delta \Pi = 0$ 可以得到下面的积分方程

$$\int_{\Gamma} (t_i - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega = 0, \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma} (u_i - \bar{u}_i) \delta t_i d\Gamma = 0, \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma_t} (t_i - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0, \quad (15)$$

若将 $t_i = \bar{t}_i$ 在形成方程后和本征边界条件一起施加, 式(15)自动满足。

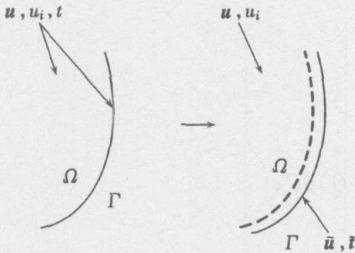


图1 求解域内和边界上变量的解耦示意图

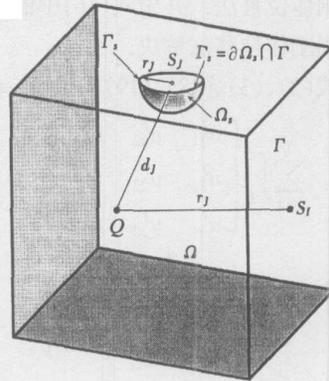


图2 节点 S_j 的子域以及基本解的源点 S_j

2.2 奇异杂交边界点理论推导

在奇异杂交边界点方法中, 基本解的源点布在求解域的边界上。从式(13)和(14)可以看出, 修正的变分原理适用于任意子域 Ω_s , 对于子域 Ω_s , 有下面的弱积分方程

$$\int_{\Gamma_s + L_s} (t_i - \bar{t}_i) h d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma_{ij,j} h d\Omega = 0, \quad (16)$$

$$\int_{\Gamma_s + L_s} (u_i - \bar{u}_i) h d\Gamma = 0, \quad (17)$$

其中, $\Gamma_s + L_s$ 为子域 Ω_s 的边界, h 是试函数。子域的尺寸和形状是任意的。于是子域 Ω_s 就取以节点 S_j 为球心的球体和求解域的交集(见图2)。

在式(16)和(17)中, 边界 Γ_s 上的 u_i 和 t_i 用式(2)和(3)定义。但 L_s 上的 u_i 和 t_i 还没有定义。于是我们特意选择试函数 h , 使得所有在 L_s 上的积分为0。注意到移动最小二乘法中的权函数, 用子域 Ω_s 半径 r_j 取代权函数中的 d_i , 那么 L_s 上的积分就等于0。因此对于节点 S_j , 其试函数为

$$h_j(Q) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_j/c_j)^2] - \exp[-(r_j/c_j)^2]}{1 - \exp[-(r_j/c_j)^2]}, & 0 \leq d_j \leq r_j, \\ 0, & d_j \geq r_j, \end{cases} \quad (18)$$

式中, d_j 是域内任意点 Q 到节点 S_j 的距离。

象杂交边界元一样, 域 Ω 内的 u 和 t 用基本解表示为

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^N \begin{bmatrix} u_{11}^I & u_{12}^I & u_{13}^I \\ u_{21}^I & u_{22}^I & u_{23}^I \\ u_{31}^I & u_{32}^I & u_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^I \\ x_2^I \\ x_3^I \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{N_l} \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

式中, x^l 是未知参数, N_l 是边界节点总数, u'_{ij} 和 t'_{ij} 是以节点 S_l 为源点的基本解。

从基本解可以看出, 当节点 S_l 和 S_j 重合时, 式(16)和(17)将出现奇异积分。式(17)中的奇异积分为弱奇异积分, 可以直接计算。方程(16)含有强奇异积分, 为了避免直接计算, 本文采用了刚体位移法。其中式(16)中的第2项只对方程组的主对角线有贡献, 它将和强奇异积分一起用刚体位移法解决。

将式(2)、(3)、(18)、(19)和(20)一起代入(16)和(17)得

$$\sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ u'_{31} & u'_{32} & u'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} h_J(Q) d\Gamma = \sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} \Phi(s) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(s) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}'_1 \\ \hat{u}'_2 \\ \hat{u}'_3 \end{Bmatrix} h_J(Q) d\Gamma, \quad (21)$$

$$\sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} h_J(Q) d\Gamma = \sum_{l=1}^{N_l} \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} \Phi(s) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(s) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{t}'_1 \\ \hat{t}'_2 \\ \hat{t}'_3 \end{Bmatrix} h_J(Q) d\Gamma. \quad (22)$$

对于所有节点列出上面方程, 则有

$$Ux = H\hat{u}, \quad (23)$$

$$Tx = H\hat{t}, \quad (24)$$

其中

$$U_{IJ} = \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ u'_{31} & u'_{32} & u'_{33} \end{bmatrix} h_J(Q) d\Gamma,$$

$$T_{IJ} = \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix} h_J(Q) d\Gamma,$$

$$H_{IJ} = \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} \Phi(s) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(s) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(s) \end{bmatrix} h_J(Q) d\Gamma.$$

假定求解域边界在没有受到任何外力的情况下, 产生一个均匀的位移场 $u_x = 1, u_y = 0, u_z = 0$; $u_x = 0, u_y = 1, u_z = 0$ 和 $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 1$, 分别取名为 u_1, u_2 和 u_3 。对于所有

节点, 将其代入式(23)得

$$x = U^{-1}Hu, \tag{25}$$

将求得的 x 代入方程(24)得

$$Tx = H0, \tag{26}$$

式中, 0 是一个所有元素都为 0 的向量。因此, 矩阵 T 中的强奇异积分就可以通过其非对角元素求得。

在奇异杂交边界点方法中, 形函数是通过 MLS 插值得到的。因此, 类似于无网格 Galerkin 方法, 需要进行边界处理^[7]。

在 u_i 已知的边界上

$$\hat{u}_1^I = \sum_{j=1}^{N_j} R_{IJ} u_i^j = \sum_{j=1}^{N_j} R_{IJ} u_i^j. \tag{27}$$

在 t_i 已知的边界上

$$t_1^I = \sum_{j=1}^{N_j} R_{IJ} t_i^j = \sum_{j=1}^{N_j} R_{IJ} t_i^j, \tag{28}$$

式中, $R_{IJ} = [\Phi_j(S_I)]^{-1}$ 。

对一个适定问题, 或是边界位移 u_i 已知, 或是边界面力 t_i 已知。通过重排式(23)和(24), 就可以得到以 x 为未知量的线性代数方程组。

2.3 内点位移和应力的计算

求解域内点 P 的位移 u 和应力 σ 用传统边界积分方程求得

$$u(P) = \int_{\Gamma} u(Q, P) t(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t(Q, P) u(Q) d\Gamma = \sum_{\text{面数}} \int_{\Gamma_s} u(Q, P) t(Q) d\Gamma - \sum_{\text{面数}} \int_{\Gamma_s} t(Q, P) u(Q) d\Gamma, \tag{29}$$

$$\sigma(P) = \int_{\Gamma} -\sigma(Q, P) t(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} t(Q, P) u(Q) d\Gamma = \sum_{\text{面数}} \int_{\Gamma_s} -\sigma(Q, P) t(Q) d\Gamma - \sum_{\text{面数}} \int_{\Gamma_s} t(Q, P) u(Q) d\Gamma, \tag{30}$$

式中, $u(Q, P)$ 、 $t(Q, P)$ 和 $\sigma(Q, P)$ 是以 Q 和 P 分别为场点和源点时的基本解。“面数”表示组成整个边界的面的个数。每个面在参数坐标系中就是一个单位正方形, 现在提出一种自适应积分方案来计算这些面上的积分, 首先, 将正方形等分为 4 份(见图 3), 对于每一份, 计算其对角线长度 l 和计算点同中心点的距离 d 。如果 l 小于 d , 这个积分域就称为是正则的, 否则继续将这个域等分为 4 份, 直到所有的积分域都变成正则的。最后, 对所有积分域进行高斯积分, 即使计算点非常靠近边界, 式(29)和(30)也能得到非常精确的结果。

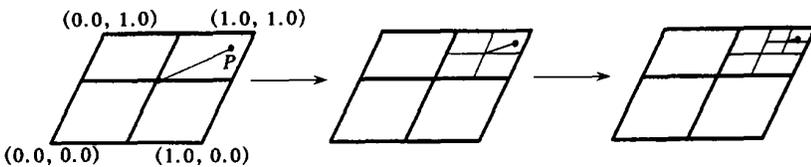


图 3 对于计算点 P 在参数坐标系中面的划分示意图

3 数值算例

本节给出几个标准算例来验证该方法的有效性,并且研究影响该方法精度的参数。

计算中权函数影响域半径 d_i 取为 $10.0h$, 其中 h 为相邻节点之间最小距离, 参数 c_i 取值使得 $d_i/c_i = 3.0$ 。从计算结果来看, 子域半径的取值对精度影响很大, 太小会造成结果不准确, 太大会导致计算中含有过多的奇异积分。本文取 $r_j = 0.8h$, 参数 c_j 取值使得 $r_j/c_j = 0.2$ 。为计算积分方程(23)和(24), 将子域 Γ_i 映射到参数平面内的单位圆上, 然后将单位圆分成8部分, 径向分2段, 周向分4段。每部分用 5×5 个高斯点进行积分。

3.1 分片试验

分片试验是指边界上所有节点按照某一线性位移场约束, 被检验的几何体是一正方体, 其表面所在平面分别为 $x = \pm 1, y = \pm 1$ 和 $z = \pm 1$ 。在每个面上均匀分布20个节点。其线性位移场为

$$u_x = \frac{2x + y + z}{2}, \quad u_y = \frac{x + 2y + z}{2}, \quad u_z = \frac{x + y + 2z}{2}. \quad (31)$$

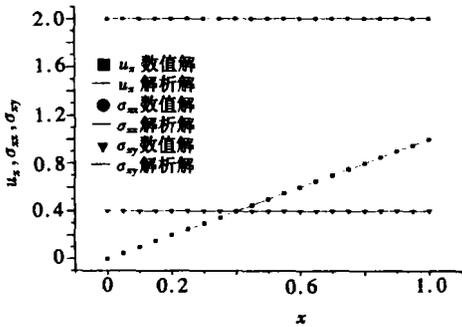


图4 立方体内 x 轴向上 $u_x, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}$

立方体内 x 轴上 x 方向位移 (u_x)、正应力 (σ_x) 和剪应力 (σ_{xy}) 示于图4中。从图中可以看到, 奇异杂交边界点方法能十分精确的通过分片试验。

3.2 三维 Lamé 问题

三维 Lamé 问题是一个受内压的厚度均匀的厚壁球壳。几何尺寸示于图5。 $a = 1.0, b = 4.0$, 材料常数取为 $E = 1.0, \nu = 0.25$ 。边界条件为

$$\sigma_r = -p_i, \quad \sigma_{\theta} = 0 \quad \text{当 } r = a, \quad (32)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_{\theta} = 0 \quad \text{当 } r = b. \quad (33)$$

该问题位移和应力的解析解为

$$u_r = \frac{\pi a^3 r}{E(b^3 - a^3)} \left[(1 - 2\nu) + (1 + \nu) \frac{b^3}{2r^3} \right], \quad (34)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\pi a^3 (b^3 - r^3)}{r^3 (a^3 - b^3)}, \quad (35)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\pi a^3 (b^3 + 2r^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)}. \quad (36)$$

按照式(32)和(33)在球壳的表面施加面力边界条件。为消除刚体位移, 将节点(0.0, 4.0, 0.0)的 x, y 和 z 方向位移约束为0; 节点(0.0, 0.0, 4.0)的 x 和 z 方向位移约束为0; 节点(4.0, 0.0, 0.0)的 z 方向位移约束为0。球壳内 x 方向上 u_r, σ_{rr} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 的奇异杂交边界点解同解析解的对比如图6所示。可以看出, 由该方法得出的结果可以精确的再现解析解, 和杂交边界点方法相比, 没有出现边界层效应。

3.3 三维 Kirsch 问题

三维 Kirsch 问题是中心带一个空心小球的无限大立方体在单向拉伸载荷作用下的应力集中问题, 如图7所示。材料常数取为 $E = 1.0, \nu = 0.25$, 图中 $a = 1.0, b = 10.0$ 。在平面 $z = 0$ 内, 正应力 σ_z 的解析解在球坐标系内的表达式为

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 \left[1 + \frac{4 - 5\nu}{2(7 - 5\nu)} \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \frac{9}{2(7 - 5\nu)} \left(\frac{a}{r} \right)^5 \right]. \quad (37)$$

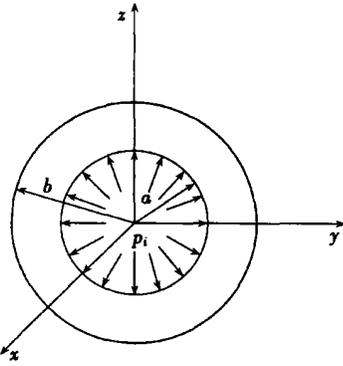


图5 三维 Lamé 问题

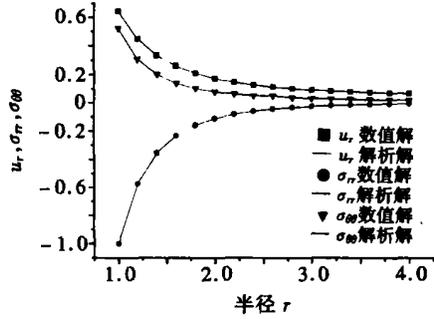


图6 球壳内 u_r 、 σ_{rr} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 解析解与数值解的比较

计算时, 假定 $\sigma_0 = 1$ 。内边界均布 72 个节点, 外边界均布 96 个节点。x 正半轴部分上正应力的数值解和解析解对比如图 8 所示。图中可以看到, 数值解与解析解吻合的很好, 没有出现边界层效应。

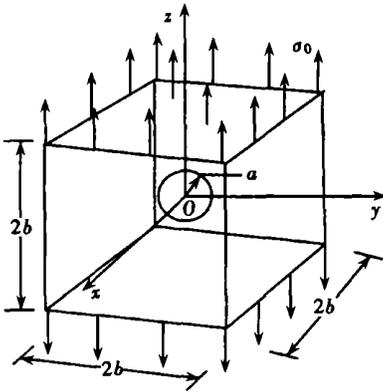


图7 三维 Kirsch 问题

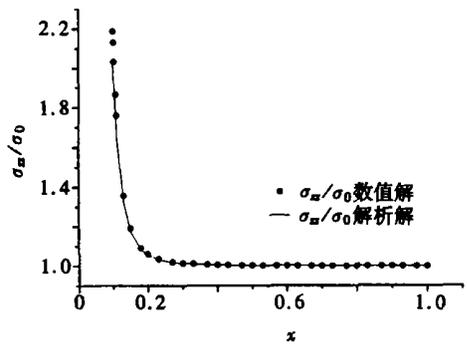


图8 三维 Kirsch 问题中 x 正半轴部分上正应力分布

4 结 论

本文将移动最小二乘方法与杂交位移变分原理结合起来, 详细推导了三维弹性力学的奇异杂交边界点理论。该方法在构造形函数时不需要任何网格, 且具有降维优势。它是一种纯无网格方法, 既不需要插值网格, 也不需要积分网格, 所有的积分都是在规则域和边界上进行的。

使用刚体位移法处理强奇异积分, 奇异积分的处理使矩阵 U 和 T 变成强对角阵, 大大地提高了计算的效率和稳定性。提出了一种自适应的积分方案, 避免了传统杂交边界点方法中出现的边界层效应。

数值算例表明了该方法的有效性, 结果表明该方法不仅计算精度高, 而且收敛性好。该方法是一种边界无网格方法, 很大程度上减少了前处理的工作量, 适应于形状复杂的实际工程问题。

[参 考 文 献]

- [1] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *Astronomic Journal*, 1977, **18**(12): 1013—1024.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element_free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **137**(2): 229—256.
- [3] Mukherjee Y X, Mukherjee S. The boundary node method for potential problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **40**(5): 797—815.
- [4] Zhang J M, Yao Z H, Li H. A hybrid boundary node method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(5): 751—763.
- [5] Zhang J M, Yao Z H. The meshless regular hybrid boundary node method for 2D linear elasticity[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, **27**(3): 259—268.
- [6] DeFigueredo T G B, Brebbia C A. A new hybrid displacement variational formulation of BEM for elastostatics[A]. In: Brebbia C A, Conner J J, Eds. *Advances in Boundary Elements [C]*. Southampton: Computational Mechanics Publication, 1989, **1**(1): 47—57.
- [7] Atluri S N, Kim H G, Cho J Y. A critical assessment of the truly meshless local Petrov_Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods[J]. *Computational Mechanics*, 1999, **24**(2): 348—372.

Meshless Analysis for Three_Dimensional Elasticity With Singular Hybrid Boundary Node Method

MIAO Yu, WANG Yuan_han

(School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: The singular hybrid boundary node method (SHBNM) is proposed for solving three-dimensional problems in linear elasticity. The SHBNM represents a coupling between the hybrid displacement variational formulations and moving least squares (MLS) approximation. The main idea is to reduce the dimensionality of the former and keep the meshless advantage of the later. The rigid movement method was employed to solve the hyper_singular integrations. The ‘boundary layer effect’, which is the main drawback of the original hybrid BNM, was overcome by an adaptive integration scheme. The source points of the fundamental solution were arranged directly on the boundary. Thus the uncertain scale factor taken in the regular hybrid boundary node method (RHBNM) can be avoided. Numerical examples for some 3_D elastic problems were given to show the characteristics. The computation results obtained by the present method are in excellent agreement with the analytical solution. The parameters that influence the performance of this method were studied through the numerical examples.

Key words: three_dimensional elasticity; moving least squares; meshless method; modified variational principle; singular hybrid boundary node method