

文章编号: 1000-0887(2004) 05_0523_06

多尺度辛格式求解复杂介质波传问题*

马坚伟, 杨慧珠

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(钟万勰推荐)

摘要: 在哈密顿体系中引入小波分析, 利用辛格式和紧支正交小波对波动方程的时、空间变量进行联合离散近似, 构造了多尺度辛格式——MSS(Multiresolution Symplectic Scheme)• 将地震波传播问题放在小波域哈密顿体系下的多尺度辛几何空间中进行分析, 利用小波基与辛格式的特性, 有效改善了计算效率, 可解决波动力学长时模拟追踪的稳定性与逼真性

关键词: 小波变换; 多尺度; 辛算法; 波传问题

中图分类号: O382.1 文献标识码: A

引 言

传统的动力学问题, 都是在单尺度下拉格朗日体系欧氏空间中, 建立控制方程的初边值问题• 由于问题的非线性和介质边界的不规则以及控制方程阶数高, 使很难得到满意解• 在 Hamilton 体系下就可引入对偶变量, 将问题放在辛几何空间中, 利用现代数学工具解决动力学中的诸问题• 随着最优相模拟理论的建立, Hamilton 体系已被引入到应用力学、等离子体物理, 高能加速器设计和椭圆型偏微分方程等中, 导出一套哈密顿算子矩阵的本征函数向量展开求解方法, 在理论和计算机处理上都显示出很大优点^[1~5]• 一般的非辛算法往往会引入人为的耗散机制以及非 Hamilton 系统原有的干扰和歪曲• 而基于 Hamilton 系统的辛算法有一套完整的守恒规律, 将离散相流看成一系列离散辛变换, 可保持原系统的辛结构等基本特征• 保证了算法的高质量 and 逼真性, 尤其在有关结构性、整体性、稳定性及长时跟踪能力方面有不可比拟的优势• 对解决动力系统长期预测以及地震波传播问题的长时模拟均有重要意义•

小波分析是一种多尺度方法, 将问题的放在一系列嵌套空间中进行分析, 其在偏微分方程(PDEs)理论与计算方法中的研究已显示出很大的优点^[6~10]• 由于小波基具有消失矩等特性, 保证了基于小波的各类算法所得的系数阵有很大稀疏性, 且可以在光滑区域用粗网格, 在近奇异区用精细网格局部细化而不必对整个问题重新进行离散, 最大限度的优化计算效率和内存需求• 利于解决大梯度, 冲击和边界层等传统算法很难处理的问题•

在地震勘探应用中, 波传常假设无能量耗散, 此时在 Hamilton 体系下即为一个无限维哈系

* 收稿日期: 2002_09_11; 修订日期: 2003_09_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872037)

作者简介: 马坚伟(1976—), 男, 浙江东阳人, 博士(E-mail: majw98@mails.tsinghua.edu.cn);

杨慧珠(联系人, Tel: + 86_10_62783149; Fax: + 86_10_62781824; E-mail: yhz@mail.tsinghua.edu.cn).

统随时间的演化过程。此演化过程实质上是一个单参数连续的辛变换,对应的数值算法应为辛几何算法。本文在哈体系中引入小波分析,首次提出一种快速保辛的多尺度辛格式,将波传问题放在多尺度辛几何空间中进行。在辛空间中使问题进行降阶,辛算法可保证长时模拟追踪的稳定与逼真性;多尺度空间正交小波基离散,使哈密顿矩阵稀疏化,改善计算效率。文中旨在提出一种思想。

1 波传问题的多尺度 Hamilton 形式

以一维问题为例,考虑有限域变系数模型:

$$\begin{cases} a(x) \partial_t^2 u = \partial_x (a(x) \partial_x u) + s(x, t), \\ u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0, & (x \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = g(u) & (x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a(x)$ 为波阻抗, $s(x, t)$ 为震源子波, $u(x, t)$ 表示波场。记 $\partial_t = \partial_t(\cdot)$, 引入广义动量 $p(x, t) = a(x) \partial_t u(x, t)$, 并令 $(\cdot)_J$ 表示在 $0 \sim J$ 尺度上的空间变量小波变换多尺度近似解, 即如: p_J 表示 p 在正交小波基中的展开, 其由小波分解的细节子空间 $W_j (j = 1, 2, \dots, J)$ 和近似子空间 V_j 的投影之和得到:

$$p_J = \sum_{j=1}^J \sum_k d_k^j \phi_{j,k}(x) + \sum_k s_k^j \phi_{j,k}(x), \quad (2)$$

其中 $\{s_k^j\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $\{d_k^j\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 分别为系数的近似与细节部分, 它可通过内积求得。即:

$$s_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi_{j,k}(x) dx, \quad d_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \phi_{j,k}(x) dx. \quad (3)$$

且满足递推公式:

$$s_k^j = \sum_{l=1}^{j-1} h_l s_{l+2k+1}^{j-1}, \quad d_k^j = \sum_{l=1}^{j-1} g_l d_{l+2k+1}^{j-1}. \quad (4)$$

简单考虑 Dirichlet 边界, (1) 可写成:

$$\begin{cases} p_J(x_m^j, t) = a_{Jx}(x_m^j) u_{Jx}(x_m^j, t) + a(x_m^j) u_{Jxx}(x_m^j, t) + s(x_m^j, t), \\ u_J(x_m^j, t) = \frac{1}{a(x_m^j)} p_J(x_m^j, t), \\ u_J(x_m^j, 0) = 0, \quad p_J(x_m^j, 0) = 0, \\ u_J(0, t) = u_J(x_b, t) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $x_m^j = \tau 2^{j-1} m$, ($m = 0, 1, \dots, N/2^{j-1}$, $j \in (0, J]$, τ, N 分别为零尺度(原信号)下的采样间隔和长度; $u_{Jx}(x_m^j) = \mathbf{D}_{Jx} \cdot \mathbf{u}_J(x_m^j)$, $a_{Jx}(x_m^j) = \mathbf{D}_{Jx} \cdot \mathbf{a}_J(x_m^j)$, $u_{Jxx}(x_m^j) = \mathbf{D}_{Jxx} \cdot \mathbf{u}_J(x_m^j)$, \mathbf{D}_{Jx} 、 \mathbf{D}_{Jxx} 分别表示微分算子 d/dx 、 d^2/dx^2 的小波基展开。本文采用 Daub4 紧支正交小波, 有较好的局部特性且利于算法实现。

引入状态向量 $\mathbf{z} = (p, \mathbf{u})^T = (p_J(x_m^j), u_J(x_m^j))^T = (p_d^j, p_s^j, \dots, p_d^1, p_s^1, u_d^j, u_s^j, \dots, u_d^1, u_s^1)$, 其中 $p_d^j, p_s^j, u_d^j, u_s^j, j \in (0, J]$ 分别表示广义动量、位移在小波域 j 尺度下的细节与近似部分系数。则(5)式可写成:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{a}(t), \quad (6)$$

其中哈密顿阵 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = a_{Jx}(x_m^j) \mathbf{D}_{Jx} + a(x_m^j) \mathbf{D}_{Jxx}$, $\mathbf{B} = \text{diag}\{1/a(x_m^j)\}$ 。这里 \mathbf{H}

为无穷小辛矩阵, 即 $\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{J}^T = -\mathbf{H}^T$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, \mathbf{I}_n 为 n 阶单位阵. $\alpha(t)$ 是由震源引起的, 对应地面激发式点震源 $s(0, t) \neq 0 (t \in [0, t_0])$, 则其只有子矩阵 (尺度) 中的第一个元素为非零. 注意到 $t > t_0$ 时, (6) 为一保守 Hamilton 正则方程.

在辛变换下, 系统在任一时刻的状态可由初始状态通过相流 G_H^t 变换得到, 即

$$\mathbf{z}(t) = G_H^t(\mathbf{z}(0)), \quad (7)$$

当然也可通过变分的方法同样得到 (6) 式, 即作用在波动方程辛流形上的 Hamilton 量可定义为:

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{u}' = \frac{1}{2} \left[\int |\mathbf{u}'|^2 dx + \int \|\mathbf{u}\|^2 dx \right]. \quad (8)$$

引入对偶变量, 并在多尺度分解中取尺度截断 ($j \leq J$), 即变为有限维 Hamilton 系统, 则有:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + f(t). \quad (9)$$

其中 $f(t)$ 与震源有关. 由 Hamilton 正则方程即可得到 (6) 式:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} + \alpha(t) = \mathbf{A} \mathbf{u} + \alpha(t), \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{B} \mathbf{p}. \quad (10)$$

式 (6) 或 (10) 即是此波传问题在多尺度 Hamilton 体系下的表达了, 问题的求解转换为小波域相空间的求解.

2 Hamilton 矩阵计算及稀疏性分析

由于波阻抗恒正, 故 \mathbf{B} 为一正定对角阵. 由于小波基的消失矩特性, 算子和函数在小波域中均具有稀疏性, 这导致了 \mathbf{A} , 也即 Hamilton 阵的稀疏, 具体如下.

2.1 $D_{j_x}, D_{j_{xx}}$ 的计算

将微分算子 \mathbf{O} 在二维正方块正交小波基下展开, 并取尺度截断 $j \leq J$, 得到

$$\mathbf{O} = \left\{ \{A_j, B_j, C_j\}_{j=1}^J, T_j \right\} \quad (11)$$

其中 $A_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{O} \mathbf{Q}_j$, $B_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{O} \mathbf{P}_j$, $C_j = \mathbf{P}_j \mathbf{O} \mathbf{Q}_j$, $T_j = \mathbf{P}_j \mathbf{O} \mathbf{P}_j$. $\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j = \mathbf{P}_{j-1} - \mathbf{P}_j$ 分别表示子空间 V_j, W_j 的投影算子.

令 $\alpha_{il}^j, \beta_{il}^j, \gamma_{il}^j, r_{il}^j$ 分别代表矩阵 $A_j, B_j, C_j, T_j = \mathbf{P}_j \mathbf{O} \mathbf{P}_j$ 的元素, 则对算子 d/dx 有

$$\begin{cases} \alpha_{il}^j = 2^{-j} \alpha_{i-1}^j, \beta_{il}^j = 2^{-j} \beta_{i-1}^j, \\ \gamma_{il}^j = 2^{-j} \gamma_{i-1}^j, r_{il}^j = 2^{-j} r_{i-1}^j. \end{cases} \quad (12)$$

由双尺度差分方程, 进一步写成:

$$\begin{cases} \alpha_i = 2 \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} g_n g_m r_{2i+n-m}, \beta_i = 2 \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} g_n h_m r_{2i+n-m}, \\ \gamma_i = 2 \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} g_n g_m r_{2i+n-m}, r_i = 2 \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} h_n h_m r_{2i+n-m}. \end{cases} \quad (13)$$

可见, 算子在小波基的展开完全由 r_l , 即 V_0 子空间的表示所决定. 对 (13) 的最后一式推导得到:

$$r_l = 2 \left[r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right], \quad (14)$$

$$\sum_l r_l = -1, \quad r_{-l} = -r_l, \quad r_0 = 0, \quad (15)$$

其中, $a_n = 2 \sum_{i=0}^{L-1-n} h_i h_{i+n}$ ($n = 1, \dots, L-1$) 表示 $H = \{h_k\}_{k=0}^{L-1}$ 的自相关系数。

采用 Daub4 小波 ($M = 4$, 由(14)、(15) 联立解得 $\{r_l\}_{l=1}^{L-2}$ ($L = 2M$), 进一步求得(13) 中的各系数, 图 1 中 1~ 4 图线分别表示 a_l, c_l, b_l, r_l 在正半轴的值。类似得到算子 d^2/dx^2 的各系数, 如图 2。

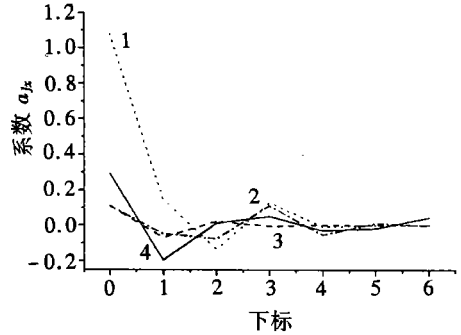
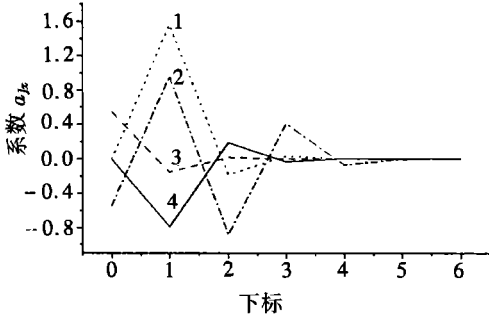


图 1 V_0 子空间中一阶微分算子矩阵的系数

图 2 V_0 子空间中二阶微分算子矩阵的系数

根据(12) 即可求子空间(子矩阵) A_j, B_j, C_j, T_j 中的元素 $a_{il}, \beta_{il}, \gamma_{il}, r_{il}$ 了。由多尺度分解理论知, 元素下标的取值范围应为 $i, l \in [0, N/2^j]$, 但由于(15) 中 $l \in [-2M+2, 2M-2]$, 导致了(12) 中元素为非零值时, 须 $|i-l| \in [-2M+2, 2M-2]$ 。所以, 实际上 A_j, B_j, C_j, T_j 都只是一个带宽为 $4(M-1)$ 的窄带矩阵。图 3 和图 4 分别给出 $J = 3$ 时 D_{Jxx} 的分解结构及未经阈值处理的窄带稀疏示意图。

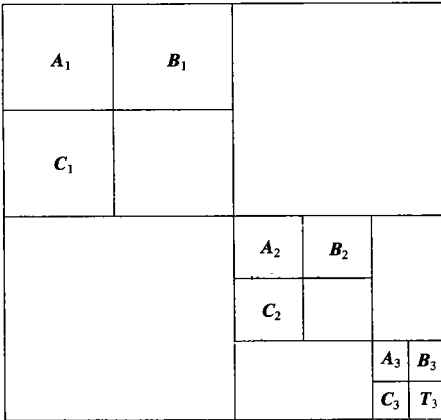


图 3 D_{Jxx} 的分解结构

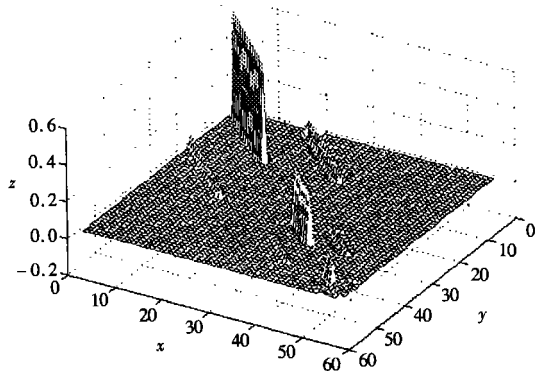


图 4 窄带稀疏矩阵

2.2 $a_{Jx}(x_m^j)$ 的计算

子矩阵 A 中的系数 $a_{Jx}(x_m^j) = D_{Jx} \cdot a_J(x_m^j)$ 的计算可快速实现:

$$\begin{cases} d_k^j = \sum_l A_{k+l}^j d_{k+l}^j + \sum_l B_{k+l}^j s_{k+l}^j, \\ s_k^j = \sum_l C_{k+l}^j d_{k+l}^j, \end{cases} \quad j \in [0, J]. \quad (16)$$

最粗尺度下, 则

$$\begin{cases} \hat{d}_k^j = \sum_l A_{k+l}^j d_{k+l}^j + \sum_l B_{k+l}^j s_{k+l}^j, \\ \hat{s}_k^j = \sum_l C_{k+l}^j d_{k+l}^j + \sum_l T_{k+l}^j s_{k+l}^j, \end{cases} \quad (17)$$

\hat{d}, \hat{s}, d, s 分别表示 a_{kx}, a_j 的细节与近似系数。由于小波基的消失矩特性,保证了上述得到的向量仍为稀疏^[5]。经阈值处理后哈密顿阵 H 和状态向量 z 可进一步稀疏化,这也是 MSS 快速实现的关键。

3 多尺度 Hamilton 系统的辛格式

对可分 Hamilton 系统,即 $H(p, q) = V(q) + T(p)$ 有 n 阶显示辛格式^[3]:

$$S_n(\tau) = \prod_{i=1}^n S_T(c_i \tau) S_V(d_i \tau) + O(\tau^n), \quad (18)$$

其中 τ 为步长, $S_T(c_i \tau), S_V(d_i \tau)$ 为 $(p, q) \rightarrow (p', q')$ 的辛映射:

$$\begin{cases} S_T(c_i \tau) : q' = q + c_i \tau \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right), p' = p, \\ S_V(d_i \tau) : q' = q, p' = p - d_i \tau \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right). \end{cases} \quad (19)$$

参数 c_i, d_i 可确定,对 $S_2(t)$ 有 $c_1 = c_2 = 0.5, d_1 = 1, d_2 = 0$ 。采用二阶梯形格式:

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\tau}{2} (H z^n + H z^{n+1}) + \frac{\tau}{2} (\alpha(t^{n+1}) + \alpha(t^n)). \quad (20)$$

其中 $t^n = n\tau, z^n = z(t^n)$ 。将上式写成递推形式:

$$z^{n+1} = F_\tau z^n + f(\alpha), \quad F_\tau = \phi \left(-\frac{\tau}{2} H \right), \quad \phi(\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad f(\alpha) = \frac{\tau}{(2I - \tau H)}. \quad (21)$$

这里演化矩阵 F_τ 为辛矩阵,故(21)即为多尺度二阶辛算法。相空间中状态向量的求解已转化为小波域中重要系数的求解了,它可由重构得到。基于 Hamilton 体系的辛算法保证了每次迭代过程都是辛变换,从而避免了人为耗散等缺点,可逼真反映原物理过程。

设 z^n 已得到,求 z^{n+1} 。引入 $\hat{z}^{n+1} = z^{n+1} + z^n = (\hat{p}^{n+1}, \hat{u}^{n+1})$,由(21)两边同加 z^n 得:

$$\begin{cases} \hat{p}_J^{n+1} = 2p_J^n + \frac{\tau}{2} A \hat{u}_J^{n+1} + \frac{\tau}{2} [\alpha(t^{n+1}) + \alpha(t^n)] \\ \hat{u}_J^{n+1} = 2u_J^n + \frac{\tau}{2} B \hat{p}_J^{n+1} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (22)$$

消去得到:

$$A_0 \hat{u}_J^{n+1} = b^n \quad (23)$$

其中 $A_0 = B^{-1} - (\tau^2/4) A, b^n = \tau p_J^n + 2B^{-1} u_J^n + (\tau^2/4) [\alpha(t^{n+1}) + \alpha(t^n)]$ 。 A_0 仍为窄带稀疏阵,至此(23)式可采用传统的稀疏阵快速算法求解了。进一步, \hat{u}_J^{n+1} 回代入(22)得到 \hat{p}_J^{n+1} ,即可求得 z^{n+1} 了(具体实例另文给出)。

4 结 论

本文在 Hamilton 体系中引入小波分析,提出一种小波—辛格式自适应混合算法。旨在提出一种多空间分析问题的思想,为波传问题的模拟提供了一条新途径,并可应用于其它学科领域。进一步,可以采用高阶辛格式,对多维问题可用多辛算法^[11],即在空间某方向也同时用辛

格式离散·引入插值小波、第二代小波变换等技术来更好处理复杂域一般边界、不规则采样等问题也是我们需深入研究的课题·

[参 考 文 献]

- [1] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [2] XU Xin_sheng, ZHONG Wan_xie, ZHANG Hong_wu. The Saint_Venant problem and principle in elasticity[J]. Int J Solids Structures, 1997, **34**(22): 2815—2827.
- [3] Hirono I, Lui W W, Yokoyama K. Time_domain simulation of electromagnetic field using a symplectic integrator[J]. IEEE Trans Microwave and Guided Wave Lett, 1997, **7**(9): 79—281.
- [4] 马坚伟, 徐新生, 杨慧珠, 等. 平面流体扰动与哈密顿体系[J]. 应用力学学报, 2001, **18**(4): 82—86.
- [5] Beylkin G. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets[J]. SIAM J Numer Anal, 1992, **29**(6): 1716—1740.
- [6] MA Jian_wei, ZHU Ya_ping, YANG Hui_zhu. Multiscale_combined seismic waveform inversion using orthogonal wavelet transform[J]. Electron Lett, 2001, **37**(4): 261—262.
- [7] 马坚伟, 杨慧珠. 多尺度有限差分法模拟复杂介质波传问题[J]. 物理学报, 2001, **50**(8): 1415—1420.
- [8] Dahmen W. Wavelet methods for PDEs_some recent developments [J]. J Comput Appl Math, 2001, **128**(1/2): 133—185.
- [9] Holmstrom M. Solving hyperbolic PDEs using interpolating wavelets [J]. SIAM J Sci Comput, 1999, **21**(2): 405—420.
- [10] Vasilyev O, Bowman C. Second generation wavelet collocation method for the solution of PDEs[J]. J Comput Phys, 2000, **165**(2): 660—693.
- [11] Reich S. Multi_symplectic Runge_Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations[J]. J Comput Phys, 2000, **157**(2): 473—499.

Multiresolution Symplectic Scheme for Wave Propagation in Complex Media

MA Jian_wei, YANG Hui_zhu

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: A fast adaptive symplectic algorithm named multiresolution symplectic scheme (MSS) was first presented to solve the problem of the wave propagation in complex media, using the symplectic scheme and Daubechies' compactly supported orthogonal wavelet transform to respectively discretise the time and space dimension of wave equation. The problem was solved in multiresolution symplectic geometry space under the conservative Hamiltonian system rather than the traditional Lagrange system. Due to the fascinating properties of the wavelets and symplectic scheme, MSS is a promising method because of little computational burden, robustness and reality of long time simulation.

Key words: wavelet transform; multiresolution; symplectic; wave propagation