

基础动力分析的一种半解析、半数值方法^{*}

龚文惠, 谢洪阳, 王元汉

(华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074)

(陈正汉推荐)

摘要: 提出了一种基础动力分析的半解析、半数值计算方法。采用 Lamb 解及其相应的近似公式, 建立了基础动反力和位移的关系式。从而可象静力问题那样将基础板分离出来, 将板看作上部作用已知载荷, 下部作用用挠度表示的地基反力, 因此只需要对板进行有限元分析。采用这种方法分析了不同形状、不同刚度、不同频率下的地基板的振动问题, 而且可以考虑基础埋深的影响。算例分析表明, 提出的方法是一种计算简便、精度较高、适用范围广泛的有效数值方法。

关键词: 基础动力分析; 地基板; 频率; 半解析方法; 有限元法

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

引 言

地基基础的动力分析涉及土体、基础和结构的相互作用。由于问题的复杂性, 进行解析分析十分困难^[1, 2]。目前工程实际采用的分析方法有: 一是简化方法, 将基础设为刚性板或已知反力分布, 采用质量-弹簧-阻尼模型。这种方法过于简单, 应用范围有限。二是有限元法, 对地基与基础都进行单元划分。这种方法工作量大, 地基边界需要特殊处理。三是采用边界元法。由于基础与上部结构形状复杂, 分析中需要解决边界元与有限元的耦合问题。

在地基与基础静力相互作用的分析中, Cheung 提出了一种有效的半解析、半数值方法^[3, 4]。根据弹性半空间表面作用一个集中力的 Boussinesq 解, 推导了接触面上结点反力与位移的关系式, 从而只需对基础进行有限元分析。这样不仅减少了工作量, 同时提高了计算精度。在此基础上, 我们进一步分析了 Gibson 地基, 各向异性地基以及成层地基上的基础问题^[5]。

对于弹性半空间表面作用一个竖向集中谐和力问题, 有著名的 Lamb 解^[6], 它也可称为“动力 Boussinesq 解”。该解是积分形式, 涉及到复杂的积分方程求解过程。在此基础上, Reissner 分析了弹性半空间上均布载荷下柔性圆板的竖向振动, 建立了基础振动的半空间理论^[7, 8], Quinlan^[9], Sung^[10] 进一步讨论了弹性半空间地基上圆形基础的不同应力分布情形。Hsieh^[11], Laysmer 和 Richart^[12] 提出了一种基础振动半空间理论的实用化方法, 即质量-弹簧-阻尼模型。本文利用 Lamb 解, 将 Cheung 提出的半解析、半数值方法进一步推广到地基基础的动力分析。

* 收稿日期: 2004_11_08; 修订日期: 2006_01_17

作者简介: 龚文惠(1966—), 女, 湖北英山人, 副教授, 博士(联系人, E-mail: gwh8780@sina.com)。

1 动力基础半空间理论

1.1 Lamb 解及其近似公式

弹性半空间表面在竖向集中谐和力作用下的解答是基础振动半空间理论的一个基本问题。

Lamb 首先给出其竖向表面位移的积分形式解为^{[1],[6]}

$$w(r, 0, t) = - \frac{P_0 e^{i\omega_e t}}{2\pi G_s} \int_0^\infty \frac{k^2 p \alpha}{\phi(p)} J_0(pr) dp, \quad (1)$$

式中, $P_0 e^{i\omega_e t}$ 为外加集中力, 其中 P_0 为其幅值, ω_e 为其频率; G_s 为地基剪切模量; p 是与 ω_e 和波速有关的量; $k^2 = \omega_e^2/v_s^2$, $h^2 = \omega_e^2/v_p^2$, $\alpha^2 = p^2 - h^2$, 其中 v_s 为土的剪切波速, $v_s = \sqrt{G_s/\rho_s}$; v_p 为纵波波速, $v_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_s}$, 其中 ρ_s 为土的密度。式(1)中 $\phi(p)$ 为 p 的瑞利函数, $J_0(pr)$ 为 pr 的 0 阶 Bessel 函数。

引入无量纲频率因子 a_r

$$a_r = \frac{\omega_e r}{v_s} = \omega_e r \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}}. \quad (2)$$

表面竖向位移 $w(r, 0, t)$ 可以写为以下形式

$$w(r, 0, t) = - \frac{P_0 e^{i\omega_e t}}{G_s r} (f_1 + i f_2), \quad (3)$$

式中 f_1 和 f_2 为与土的泊松比 ν_s 及无量纲频率因子 a_r 有关的位移函数。

1.2 基础竖向谐和振动

Reissner^[7,8] 通过对点载荷 Lamb 解的积分, 分析了弹性半空间上柔性圆形基础受均布载荷的振动问题。Quinlan^[9], Sung^[10] 进一步推广到刚性圆形基础以及基底压力是抛物线分布的情形。

基底中心 ($r = 0$) 处位移可以写成类似式(3)的形式

$$w(0, 0, t) = - \frac{P_0 e^{i\omega_e t}}{G_s r_0} (f_1 + i f_2), \quad (4)$$

式中 r_0 为圆盘半径。在式(2)中令 $r = r_0$, 则对应的无量纲频率因子 a_0 为

$$a_0 = \frac{\omega_e r_0}{v_s}, \quad (5)$$

式(4)中的系数 f_1, f_2 也可类似地展开为 a_0 的级数形式。

1.3 基础振动半空间理论的实用化

令 $w(0, 0, t) = z$, 式(4)可改写为

$$z = - \frac{P_0 e^{i\omega_e t}}{G_s r_0} (f_1 + i f_2).$$

对于谐和振动, $i\omega_e z = \dot{z}$, 上式可改写为

$$P_0 e^{i\omega_e t} = - G_s r_0 F_1 - \sqrt{G_s \rho_s} r_0^2 F_2 \dot{z} \quad (6)$$

式中修正的位移函数 F_1 和 F_2 为

$$F_1 = - \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}, \quad F_2 = \frac{f_2}{a_0(f_1^2 + f_2^2)}. \quad (7)$$

Hsieh^[11] 根据 Bycroft 等的研究结果^[13-15], 列举了不同振动的位移函数值。对于不同 ν_s 情形和 $a_0 < 1.5$ 的竖向振动, F_1 和 F_2 如表 1 所示。

表 1 竖向振动的 F_1, F_2 值

泊松比 ν_s	0	0.25	0.5
F_1	$4.0 - 0.5a_0^2$	$5.3 - 1.0a_0^2$	$8.0 - 2.0a_0^2$
F_2	$3.3 + 0.4a_0$	$4.4 + 0.8a_0$	6.9

1.4 高频振动公式

前面半空间理论的级数展开式对无量纲频率较低 ($a_0 < 1.5$) 时适用, 仅满足一般动力基础的要求。对于高速 (ω_e 较高)、大型 (r_0 较大) 的动力机器基础, 需要研究相应的计算公式。

Luco 等^[16] 讨论了半空间理论 Fredholm 积分方程并对于 $0 \leq a_0 \leq 10$ 和不同 ν_s 情形进行了数值求解。根据其结果, 文献[1]给出了相应的表格。Veletson 等^[17] 采用式(6)所示的地基动反力公式, 给出了高频情形下 F_1, F_2 的计算公式

$$F_1 = \frac{4}{1 - \nu_s} k_1, \quad F_2 = \frac{4}{1 - \nu_s} c_1, \quad (8)$$

式中

$$k_1 = 1 - \frac{b_1(b_2 a_0)^2}{1 + (b_2 a_0)^2} - b_3 a_0^2, \quad c_1 = b_4 + \frac{b_1 b_2 (b_2 a_0)^2}{1 + b_2 a_0^2},$$

系数 $b_1 \sim b_4$ 见表 2。

1.5 基础埋深情形

Novak^[18] 认为埋深效应在于增加侧面的摩擦力, 因此位移函数 F_1, F_2 应进行修正

$$F_1' = F_1 + \frac{G_L}{G_s} \frac{l}{r_0} S_1, \quad F_2' = F_2 + \frac{G_L}{G_s} \frac{l}{r_0} S_2, \quad (9)$$

式中 l 为基础埋置深度, G_L 为侧填土的剪切模量。对于 $0 \leq a_0 \leq 2$ 情形, 系数 S_1, S_2 为^[17]

$$S_1 = 0.06084 + 0.2153a_0 + 2.760a_0^{3/2},$$

$$S_2 = 0.01616 + 6.059a_0 + 0.7022a_0^{3/2}.$$

表 2 高频计算公式的系数

ν_s	0	0.333	0.5
b_1	0.25	0.35	0.0
b_2	1.0	0.8	0.0
b_3	0.0	0.0	0.17
b_4	0.85	0.75	0.85

2 有限元计算

2.1 单元平衡方程

设弹性地基上的板受上部作用的外加荷载 $q(t)$ 和来自土的接触反力 $p(t)$, 单元的动力平衡方程可以写为

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = (q(t) - p(t))^e, \quad (10)$$

式中 m, c 和 k 分别为单元的质量、阻尼和刚度矩阵。

由式(6), 可将地基反力分为与位移与速度有关的两部分, 即

$$R_1 = -G_s r_0 F_1 z, \quad R_2 = -\sqrt{G_s \rho_s} r_0^2 F_2 z \dot{z} \quad (11)$$

如果将板划分为单元, 地基对板的总压力应该与单元的划分无关。即总压力等于各单元压力之和。例如, 对于反力的第 1 部分, 有

$$R_1 = \sum R_{1i}. \quad (12)$$

以弹性地基上的刚性基础的垂直振动为例,在整体和局部分析中,挠度 z , 剪切模量 G_s , 系数 F_1 均为常数,同时,基础整体面积应该等于各局部面积之和: $A = \sum A_i$.

考虑圆形基础的底面积为 $A = \pi r_0^2$, 当它划分为一组单元时,总的面积不变,即 $\sum A_i = \sum \pi r_i^2$, 式中 r_i 为单元面积等效半径. 考虑到基础局部面积上的接触压力与面积 A_i 成比例,即与 r_i^2 成比例,为了使式(11)的第1式成立,它应修正为

$$R_{1i} = - G_s \frac{r_i^2}{r_0} F_{1i} z_i \quad (13)$$

由式(13)可知,如果对基础进行整体分析, $r_i = r_0$, 则式(13)即为式(11)的第1式. 同时,式(13)也适合于基础划分为单元时的地基反力第1部分的计算.

基础反力的第2部分由式(11)的第2式表示. 由于该式中仅含有与长度有关的量 r_0 并且是平方项,类似上面分析,当基础划分为单元时,该式可以直接推广使用. 因此,对应地基反力的第2部分为

$$R_{2i} = - \sqrt{G_s \rho_s} r_i^2 F_{2i} z_i \quad (14)$$

在以下进行的有限元分析中,式(13)、(14)将用来进行计算地基对板的接触反力:

$$p_i(t) = - G_s \frac{r_i^2}{r_0} F_{1i} z_i - \sqrt{G_s \rho_s} r_i^2 F_{2i} z_i \quad (15)$$

在板的有限元分析中,结点力和结点位移采用向量形式表示. 对于下面考虑的垂直振动情形,可以忽略接触压力对于基础弯矩和转角的影响. 因此有

$$p(t)^e = k_s \delta^e + c_s \dot{\delta}^e, \quad (16)$$

式中 k_s 、 c_s 由式(13)、(14)得到.

2.2 板的整体平衡方程

将所有单元的平衡方程进行叠加,可得到整体平衡方程

$$M \ddot{\delta} + (C + C_s) \dot{\delta} + (K + K_s) \delta = Q(t) \quad (17)$$

对于自由振动问题,上式中的阻尼与外力可不考虑,因此可得相应的矩阵方程

$$M \ddot{\delta} + (K + K_s) \delta = 0, \quad (18)$$

式中 K_s 由 k_s 组装得到.

确定板的自振频率问题将导致求以下特征方程的解

$$((K + K_s) - \omega^2 M) \phi = 0, \quad (19)$$

式中 ω 是自由振动频率. 如求得各阶振动的频率 ω_i , 则相应模态向量 ϕ_i 就可进行计算.

3 算例

为简单计,本文采用矩形4结点单元. 设每个单元所受的地基反力相同,并且平均分配到4个结点,地基反力按式(15)计算,其中 r_0 为圆板的半径(如为其他形状板,则为等效半径), r_i 为分配到结点面积的等效半径.

由于将地基反力转化为板的位移表示,因此仅需将板进行有限元划分. 下面分别就圆板和方板、低频与高频振动、弹性半空间表面和埋置基础板等不同情况进行计算.

3.1 圆板

3.1.1 与解析结果比较

为检验本文方法的正确性,首先考虑图1所示圆板. 相关的参数为板的参数

半径 $r_0 = 1.0 \text{ m}$
 厚度 $h = 0.25 \text{ m}$
 弹性模量 $E = 2 \times 10^7 \text{ kPa}$
 泊松比 $\nu = 0.3$
 密度 $\rho = 2460 \text{ kg/m}^3$

地基参数

弹性模量 $E_s = 2.9 \times 10^4 \text{ kPa}$
 泊松比 $\nu = 0.25$
 密度 $\rho_s = 1600 \text{ kg/m}^3$

外载频率

$$\omega_e = 61 \text{ rad/s}$$

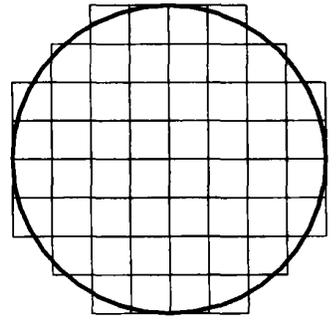


图 1 圆板及其有限元网格

如图 1 所示, 将圆板划分为 52 个相等的方形 4 结点单元, 计算所得的无量纲最小频率 ($\omega = \omega \times r_0^2 \sqrt{\rho h / D}$) 为: $\omega = 0.8263$

在文献[19]中, Bycroft 采用 Rayleigh-Ritz 法给出了无重量弹性地基上的刚性圆板自振频率的计算公式。按照该公式, 计算所得的无量纲最小频率为: $\omega = 0.8286$ 。

将两种方法的结果进行对比, 可以看出它们符合得较好。严格说来, 文献[19]考虑的是无重量的弹性地基, 即 $\rho_s = 0$, 根据式(6), 这意味着 $a_0 = 0$ 。虽然 $\rho_s = 0$ 的情况实际上并不存在, 在此可令 ω_e 取很小的值来模拟 $a_0 \rightarrow 0$ 的情形, 计算结果列于表 3。由表可见, 当 $\omega_e \rightarrow 0$ 时, 整个圆板的 a_0 值和单元的 a_{0e} 值都趋于 0, 计算的 ω 趋于稳定值: $\omega = 0.8269$ 。

结果表明, 当 $a_0 \rightarrow 0$ 时, 本文方法的计算结果更接近于文献[19]的理论值。

表 3 当 ω_e 取很小值时, 计算的无量纲最小频率

ω_e	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
a_{0e}	0.0083	0.0166	0.0248	0.0331	0.0414	0.0500	0.0580	0.0663	0.0745	0.0828
a_0	0.0587	0.1174	0.1762	0.2350	0.2936	0.3523	0.4111	0.4700	0.5285	0.5872
ω	0.8269	0.8269	0.8269	0.8269	0.8268	0.8268	0.8267	0.8266	0.8266	0.8265

注: ω_e 的单位为 rad/s 。

3.1.2 各阶频率响应

由于动力基础问题的复杂性, 目前采用一些实用化的方法计算弹性地基板的频率, 通常只能求一个最低频率^[1,2]。文献[19]虽然可以求出高阶频率, 但过程十分复杂, 并且不能应用于其他形状板。本文方法可以方便地求出从低阶到高阶的各阶频率。对于上节所给的弹性地基板, 前 10 阶无量纲频率示于表 4。

表 4 弹性地基圆板的前 10 阶频率

模态	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_i	0.8263	0.8426	5.0428	5.2151	8.5031	11.568	18.797	18.971	21.557	30.452

3.1.3 高频振动

对于高速(ω_e 较高)、大型(r_0 较大)的动力机器基础, 由于其 a_0 较高, 弹性半空间的许多近似公式(适用于 $a_0 \leq 1.5$)不再适用。

在前面 1.4 节列出了有关文献给出的高频振动的近似公式, 这些公式的精度还需要探讨。事实上, 当 a_0 很小时, 有关近似公式的精度是令人满意的。采用本文方法, 可以通过细分有限元网格, 使每个结点对应的 a_{0e} 控制在小于 1.5 的范围内。这样, 原有低频计算公式仍然适

用,同时使计算具有较高的精度。

为说明本文方法对于低频和低频振动广泛的适用性,令外载激振频率 ω_e 从 100 rad/s 变化到 800 rad/s,其他参数同前。整个圆板的无量纲频率因子 a_0 和划分单元后结点对应的无量纲频率因子 a_{0e} 的变化示于图2。由图可见,随着 ω_e 的增加, a_0 和 a_{0e} 都是线性增加的。 a_0 增加的速度很快,当 ω_e 在 150 rad/s 时就已经超过 1.5。而 a_{0e} 增加的速度很慢,即使在 ω_e 到达 800 rad/s 时, a_{0e} 仍然小于 1.5。如果 ω_e 继续增加,可以通过细分网格仍然控制在 a_{0e} 小于 1.5 的范围内。这样,低频公式同样适用。

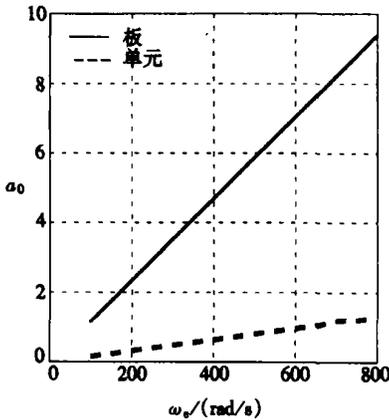


图2 激振频率与圆板和单元的无量纲频率因子的关系

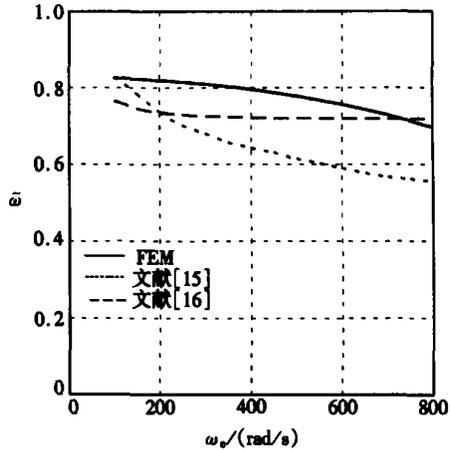


图3 不同激振频率对无量纲频率的影响

采用本文提出的有限元法,以及 1.4 节介绍的高频振动近似公式所得的圆板最小无量纲自然振动频率 ω 示于图3。由图可见,随着外载激振频率 ω_e 的增加,不同方法计算的 ω 都逐渐减小。虽然总的趋势相同,但不同方法的计算结果仍有差异。

Bycroft 的方法^[15]适用于 a_0 较小 ($a_0 < 1.5$), 即 ω_e 较小的情况; 而 Lucio 等^[16]的方法可以适用于 a_0 较大 ($0 \leq a_0 \leq 10$), 即 ω_e 较大的情形。由图3可以看出,当 ω_e 较小时,本文方法与文献[15] 接近; 而 ω_e 较大时,本文方法与文献[16] 接近。由此可见,本文方法对于不同 ω_e 值,都有较好的精度。

3.1.4 基础埋深的影响

由 1.5 节可知,埋深效应增加基础侧面的摩擦,相应的位移函数 F_1, F_2 要进行修正。修正系数与侧填土与底层土的剪切模量比 G_L/G_s , 埋置深度与板的等效半径比 l/r_0 以及无量纲频率因子 a_0 有关。

令圆板厚度为 0.4 m, 埋置深度 $l = 0.0 \text{ m} \sim 0.4 \text{ m}$, 取侧填土与底层土的剪切模量相同,其他参数同前,圆板单元划分仍如图1所示。计算所得的最小无量纲频率 ω 如图4所示。由图可见,随着 l/r_0 的增加, ω 也逐渐增加,它们近似呈线性关系。

3.2 方板

采用方板探讨不同网格划分对于收敛性的影响较为方便。令方板边长为: $L = 2 \text{ m}$, 其他参数同前。将方板最小的无量纲频率表示为: $\omega = \omega \times L^2 \sqrt{\rho h/D}$ 。

将方板划分为 $N \times N$ 的网格,其中 N 为沿 x 或 y 方向的单元数目。当 N 从 2 变化到 10 时,计算的结果示于图5。由图可见,随着 N 的增加,计算的 ω 趋于其稳定值。也就是说,只要

单元数不是太少, 计算结果总是令人满意的。

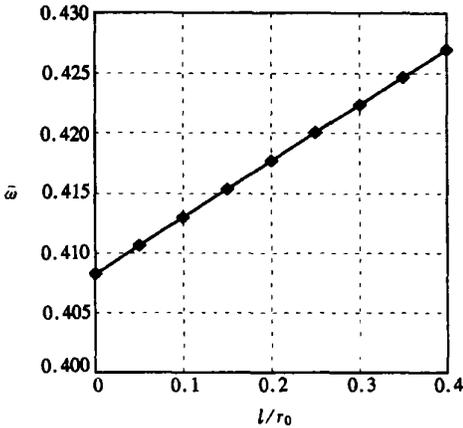


图 4 圆板埋深比与无量纲频率的关系图

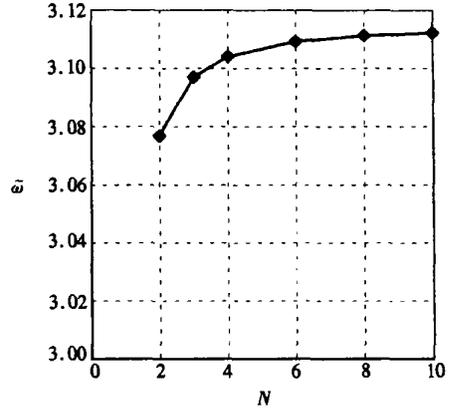


图 5 网格划分对方板最小自然频率的影响

4 结 论

地基与基础动力相互作用的问题在工程实际中有重要意义。为了避免解析方法数学上的复杂性和一些实用化方法过于简单化, 以及传统的有限元法需将地基与基础同时进行离散化的问题, 提出了一种地基与基础动力相互作用的新的计算方法。主要结论如下

1) 基于弹性半空间表面作用一个集中谐和力的 Lamb 解, 建立了板与地基相互作用时接触反力与挠度间的关系式。从而可将板看作上部作用已知载荷, 下部作用用挠度表示的地基反力的隔离体, 仅需对板进行有限元分析。这是一种半解析半数值的计算方法。

2) 本文给出了一系列算例, 包括不同形状板, 低频与高频振动, 不同埋置深度等。结果表明, 本文方法具有一系列优点, 精度较高, 计算简便, 适用范围广, 具有良好的收敛性, 可应用于地基与基础动力相互作用的工程实际问题。

[参 考 文 献]

- [1] 严人觉, 王贻荪, 韩清宇. 动力基础半空间理论概论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981, 89—251.
- [2] Richart F E Jr, Woods R D, Hall J R Jr. Vibration of Soils and Foundations [M]. London: Prentice-Hall, 1970, 191—241.
- [3] Cheung Y K, Zienkiewicz O C. Plates and tanks on elastic foundation—an application of the finite element method[J]. International Journal of Solids and Structures, 1965, 1(4): 451—61.
- [4] Cheung Y K. Beams, slabs and pavements[A]. In: Desai C S, Christian J T Eds. Numerical Methods in Geotechnical Engineering[C]. New York: McGraw-Hill, 1977, 176—210.
- [5] WANG Yuan_han, Tham L G, Cheung Y K. Beams and plates on elastic foundations—a review[J]. Progress in Structural Engineering and Materials, 2005, 7(4): 174—182.
- [6] Lamb H. On the propagation over the surface of an elastic solid[J]. Philosophical Transaction of the Royal Society, London, Ser A, 1904, 203(1): 1—42.
- [7] Reissner E. Stationäre axialsymmetrische durch eine schüttelnde masseerregte schwingungen eines homogenen elastischen halbraumes[J]. Ingenieur Archiv, 1936, 7(6): 381—396.
- [8] Reissner E. Freie und erzwungene torsionschwingungen des elastischen halbraumes[J]. Ingenieur

- Archiv, 1937, **8**(4): 229—245.
- [9] Quinlan P M. The elastic theory of soil dynamics[J]. American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication, 1956, (156): 3—34.
- [10] Sung T Y. Vibration in semi_infinite solids due to periodic surface loading[J]. American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication, 1956, (156): 35—54.
- [11] Hsieh T K. Foundation vibrations[J]. Proceedings Institute of Civil Engineers, London, 1962, **22**(6): 211—226.
- [12] Lysmer J, Richart F E Jr. Dynamic response of footings to vertical loading[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASEC, 1966, **92**(1): 65—91.
- [13] Bycroft G N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi_infinite elastic space and on an elastic stratum[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, 1956, **248**: 327—368.
- [14] Arnold R N, Bycroft G N, Warburton G B. Forced Vibrations of a body on an infinite elastic solid[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1955, **77**(3): 391—400.
- [15] Bycroft G N. Machine foundation vibration[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1959, **173**(18): 469—473.
- [16] Luco J E, Westmann R A. Dynamic response of circular footings[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1971, **97**(5): 1381—1395.
- [17] Veletson A S, Verbic B. Basic response functions for elastic foundations[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1974, **100**(2): 189—202.
- [18] Novak M. Prediction of footing vibrations[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations, Div ASCE, 1970, **96**(3): 836—861.
- [19] Bycroft G N. Frequencies of a flexible circular plate attached to the surface of a light elastic half_space[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1959, **26**(3): 13—19.

Semi_Analytical and Semi_Numerical Method for Dynamic Analysis of Foundation

GONG Wen_hui, XIE Hong_yang, WANG Yuan_han

(School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science
and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: A semi_analytical and semi_numerical method is proposed for the dynamic analysis of the foundations. The Lamb's solution and the approximate formulae were used to establish the relation of the contact force and deflection between the foundation and soil. Therefore, the foundation can be separated from soil and analyzed by FEM as for the static cases. The plate can be treated as that the known forces are acting on the upper surface, and the contact pressure from soil can be represented as the deflection. So that only the plate needs to be divided into elements in the analysis. By this method, a series of vibration problems, including various shapes and rigidities of the foundations, different excitation frequencies, were analyzed. Furthermore, it can be used for the embedded foundation. The numerical examples show that this method has simplicity, highly accurate and versatile. It is an effective method for the dynamic analysis of the foundation.

Key words: dynamic analysis of foundation; foundation plate; frequency; semi_analytical method; finite element method