

# 具有动应力、位移和稳定性约束的离散 变量桁架结构布局优化设计算法\*

石连栓<sup>1</sup>, 王跃方<sup>2</sup>, 孙焕纯<sup>2</sup>

(1. 天津工程师范学院 计算机系, 天津 300222;

2. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(我刊原编委孙焕纯来稿)

**摘要:** 给出了在动应力、动位移和动稳定约束下离散变量结构布局优化设计问题的数学模型, 用“拟静力”算法, 将具有动应力约束、动位移约束和动稳定约束的离散变量结构布局优化设计问题化为静应力、静位移和静稳定约束的优化问题, 然后利用两级优化算法求解该模型。优化过程由两级组成, 拓扑级优化和形状级优化。在每一级, 都使用了综合算法, 并且在搜索过程中都根据两类设计变量的相对差商值进行搜索。对包含稳定约束和不包含稳定约束的优化结果做了比较, 结果显示稳定性约束对优化结果产生较大的影响。

**关键词:** 离散变量; 结构优化; 布局优化; 动应力/动位移约束; 动稳定约束; 相对差商

中图分类号: O221.2 文献标识码: A

## 引 言

结构的布局优化设计涉及到 3 种类型的变量, 截面、形状和拓扑。从截面优化到布局优化, 随着设计变量种类的增加, 其设计空间的维数更高, 因而求解难度更大, 但却可得到更优的解。对于包含有动载荷作用下的离散变量结构布局优化问题, 由于动约束函数不易求得及求动约束极值时动力重分析工作量很大, 以往包含动约束的离散变量结构布局优化问题考虑的较少, 但设计规范中要求各动约束不能超过相应的许用值, 因此应该考虑动约束的优化问题。

文献[1]和文献[2]提出了一种处理包含动应力和动位移约束的离散变量桁架结构截面优化问题的“拟静力”算法, 文献[3]将该方法应用于求解拓扑优化设计问题。本文考虑了既有静载荷作用又有动载荷作用, 同时也包含了稳定约束的离散变量桁架结构布局优化设计问题。首先给出包含三类变量布局优化问题的数学模型, 然后利用拟静力方法将结构惯性力极值作为静载荷施加到结构上, 求得结构的动位移幅值, 通过和静位移的叠加, 求出结构位移, 进而求

\* 收稿日期: 2004\_08\_31; 修订日期: 2006\_01\_17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10002005, 10421002); 国家自然科学基金创新群体基金资助项目(10421002); 长江学者和创新团队发展计划基金资助项目; 天津市自然科学基金资助项目(02360081); 天津市教委科技发展基金资助项目(20022104)

作者简介: 石连栓(1964—), 男, 内蒙古丰镇人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_22\_28126257; E\_mail: shilianshuan@263.net)。

得各杆件的内力。由于布局优化设计问题变量类型的增多,问题的规模扩大了,而各种变量的耦合使得布局优化变得更加复杂,求解更加困难。为了降低求解难度,提高计算效率,本文利用两级优化方法,即在固定形状下的拓扑优化<sup>[4]</sup>和在固定拓扑下的形状优化,两级优化交替进行。在每一级优化时,分别应用了综合算法求解。在拓扑级优化,根据拓扑变量和截面变量的相对差商值确定如何去搜索;在形状级优化,仍然应用相对差商法<sup>[5]</sup>对两类变量进行统一处理,同时进行两类变量的综合优化。文中给出了算例,比较了包含稳定约束和不包含稳定约束的优化结果,指出稳定约束对优化结果产生比较大的影响。该算法为解决具有动约束的离散变量结构布局优化设计问题提供了一种实用可行的方法。

## 1 具有动约束的离散变量桁架结构布局优化设计问题的数学模型

多工况下受动应力、动位移约束、稳定约束和静应力、静位移和静稳定约束的离散变量桁架结构布局优化模型为

$$P \text{ 求 } \mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_{n_A}]^T, \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A}]^T, \quad \mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_{n_S}]^T,$$

$$\min W = \sum_{i=1}^{n_A} \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} l_j (s_j),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s. t. } \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot N_i^+ (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) / A_i \leq \sigma_i, \\ \quad N_i^+ (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) = \max_l (N_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) \mid N_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0), \\ \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot N_i^- (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot l_i^2 \leq \pi^2 E J (A_i) / \lambda, \\ \quad N_i^- (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) l_i^2 = \max_l (|N_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) < 0| \cdot l_j^2 \mid N_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) < 0), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\delta_j = \max_l | \delta_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) | \leq \delta_j, \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} \cdot N_{iD}^+ (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) / A_i \leq \sigma_{iD}, \\ N_{iD}^+ (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) = \max_l (|N_{jlD} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha})| + N_i^+ (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha})), \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot N_{iD}^- (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot l_i^2 \leq \pi^2 E J (A_i) / \lambda_D, \\ N_{iD}^- (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) l_i^2 = \max_{l', l''} [ (|N_{jl} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha})|_{N_{jl} \leq 0} + |N_{jlD} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha})|) l_j^2 ], \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\delta_{iD} = \max_l | \delta_{il} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) | + \max_l | \delta_{ilD} (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\alpha}) | \leq \delta_{iD}, \quad (4)$$

$$\alpha_i \in \{0, 1\}; \quad A_i \in D_i^A = \{A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,n_i}\};$$

$$s_k \in D_k^S = \{s_{k,1}, s_{k,2}, \dots, s_{k,n_k}\}; \quad k = 1, \dots, n_S;$$

$$i = 1, 2, \dots, n_A; \quad j = 1, 2, \dots, n_D; \quad l = 1, 2, \dots, n_L; \quad l' = 1, 2, \dots, n_{L'};$$

其中  $n_L$ 、 $n_E$ 、 $n_D$ 、 $n_S$ 、 $n_A$  分别是工况数、单元数、位移约束总数、形状变量总数、截面变量和拓扑变量总数;  $D_i^A$  是第  $i$  个截面变量的许用离散集,  $D_k^S$  是第  $k$  个形状变量的许用离散集; 其中  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{S}$  分别为截面变量和形状变量所构成的向量,  $\alpha_i$  为第  $i$  组拓扑变量。(1) 式和(2) 式为静应力和静位移约束,  $\sigma_i^+$  是所有工况静载荷作用下第  $i$  组杆拉应力的最大值,  $\sigma_i^-$  是第  $i$  组杆的许用拉应力;  $\delta_j$  是所有工况静载荷作用下的第  $j$  个约束位移的绝对值的最大值; (3) 式和(4) 式为动应力和动位移约束,  $\sigma_{iD}^+$  是既有动载荷又有静载荷在所有工况作用下的第  $i$  组杆的拉应力的最大值,  $\delta_{iD}$  是既有动载荷又有静载荷在所有工况作用下的第  $j$  个约束位移的绝对值的最大值,  $J(A_i)$  为第  $i$  根构件的最小截面惯性矩,  $\lambda$  为许用稳定系数,  $n_i$  是第  $i$  组截面的许用离散集的元

素数,  $\bar{\zeta}$ 、 $\bar{\zeta}_D$  分别是静位移和静动位移的许用值。

将数学模型 P 的约束条件进行无量纲归一化处理, 各约束条件化为

$$\begin{cases} \sigma_i^+(A, S, a) = 1 - \alpha_i \sigma_i^+(A, S, a) / \sigma_i \geq 0, \\ \sigma_{iD}^+(A, S, a) = 1 - \alpha_i \sigma_{iD}^+(A, S, a) / \sigma_{iD} \geq 0, \\ p_i(A, S, \alpha) = 1 - \frac{\alpha_i \cdot N_i^-(A, S, \alpha) l_i^2 \lambda}{\pi^2 EJ(A_i)} \geq 0, \\ p_{iD}(A, S, \alpha) = 1 - \frac{\alpha_i \cdot N_{iD}^-(A, S, \alpha) l_i^2 \lambda}{\pi^2 EJ(A_i)} \geq 0, \\ \zeta_j(A, S, a) = 1 - \zeta_j(A, S, a) / \bar{\zeta} \geq 0, \\ \zeta_{jD}(A, S, a) = 1 - \zeta_{jD}(A, S, a) / \bar{\zeta}_D \geq 0. \end{cases}$$

上述数学模型中, 各约束函数是关于设计变量的高度非线性函数, 是一个多约束非线性规划问题, 在求解过程中需要将其化成显式的形式。在两级综合优化中, 应用相对差商法求解时, 需要将多约束问题转化为单约束问题, 可以利用先求最严约束, 然后利用最严约束代替原来的约束求设计变量的相对差商, 也可利用文献[6]提出的凝聚函数法将多约束问题转化为单约束问题

$$g(A, S, a) = \frac{1}{p} \ln \left( \sum_{i=1}^{n_A} f_{1i} + \sum_{j=1}^{n_D} f_{2j} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} f_{1i} &= \exp(p \cdot \sigma_i^+(A, S, a)) + \exp(p \cdot p_i(A, S, a)) + \\ &\quad \exp(p \cdot p_{iD}(A, S, a)) + \exp(p \cdot \sigma_{iD}^+(A, S, a)), \\ f_{2j} &= \exp(p \cdot \zeta_j(A, S, a)) + \exp(p \cdot \zeta_{jD}(A, S, a)). \end{aligned}$$

## 2 数学模型的显化与求解结构的动内力和动位移的拟静力方法

考虑简谐动载荷作用下的情况并且拟静力算法被用来计算动内力。由于阻尼对强迫振动的影响很小, 忽略阻尼的影响, 结构强迫振动微分方程为

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} l_D \sin p t,$$

将以上方程化为

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} l_D \sin p t - M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2.$$

设  $\mathbf{u} = \mathbf{U} l_D \sin p t$ , 则有

$$\mathbf{K} \mathbf{U} l_D = \mathbf{F} l_D + \mathbf{M} p^2 \mathbf{U} l_D,$$

移项得  $(\mathbf{K} - \mathbf{M} p^2) \mathbf{U} l_D = \mathbf{F} l_D$ , 式中,  $\mathbf{K} - \mathbf{M} p^2$  为结构的相当刚度矩阵,  $\mathbf{U} l_D$  为结构在  $l$  工况下的动位移幅值, 求解上式即可求得结构的动位移幅值。设在静载荷  $l$  工况作用下的位移值为  $\mathbf{U}_S$ , 由静位移和动位移的幅值分别求出  $l'$ ,  $l$  工况下的静、动内力  $N_{ij}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{U}_{ij}^{(i)}$ 。其中,  $N_{ij}^{(i)}$ 、 $\mathbf{K}^{(i)}$ 、 $\mathbf{U}_{ij}^{(i)}$  分别为  $i$  单元静内力和动内力的幅值向量、全局坐标系下的单元刚度矩阵和单元对应节点在全局坐标系下的静、动位移向量。

内力求出以后, 由静定化假设, 就得到了一个显式的数学模型, 然后可以利用布局优化设计的两级算法进行求解。在一轮优化中, 由于截面变化对单元内力的影响较小, 结构的静位移可由 Mohr 公式表示为

$$\zeta_l(A, S, \alpha) = \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\alpha_k}{E_k A_k} \sum_{i \in G_k} N_{il}(A', S', \alpha') N_{ij}(A', S', \alpha') l_i(s_i),$$

结构的动位移由 Mohr 公式表示为

$$\delta l_D(A, S, \alpha) = \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\alpha_k}{E_k A_k} \sum_{i \in G_k} N_{ilD}(A', S', \alpha') N_{ij}(A', S', \alpha') l_i(s_i),$$

其中  $A'$ 、 $S'$ 、 $\alpha'$  分别表示前一步优化后的  $A$ 、 $S$ 、 $\alpha$  的值,  $N_{il}$  是  $i$  单元在静载荷 ( $l$  工况) 作用下的内力,  $N_{ilD}$  是  $i$  单元在动载荷 ( $l$  工况) 作用下的内力,  $N_{ij}$  是  $i$  单元对应于  $j$  位移方向所加单位载荷的虚工况的内力。这样, 数学模型 P 就变成显式的形式。

### 3 布局优化设计的两级算法

先固定结构的形状, 则数学模型 P 成为:

$$\text{求 } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T, \quad S = S^0,$$

$$\min W = \sum_{i=1}^{n_A} \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} l_j(s_j^0),$$

$$\text{s. t. } g(A, S^0, \alpha) \leq 0,$$

这里  $s_j^0$  为  $j$  杆两端形状变量向量的初值,  $S^0$  为桁架形状变量的初值。在一轮优化过程中, 一开始截面设计变量分别取其离散集的最大值, 而拓扑变量取 1, 此时设计变量是可行集内的一个点, 且目标函数为最大。先由函数  $g(A, S^0, \alpha)$  求出截面变量和拓扑变量的相对差商值, 分别设为  $r_{A_i}$ 、 $r_{\alpha_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n_A$ , 令  $r_{A_i} = \min_{1 \leq i \leq n_A} \{r_{A_i}\}$ ,  $r_{\alpha_k} = \min_{1 \leq j \leq n_A} \{r_{\alpha_k}\}$ , 若  $r_{A_i} \leq r_{\alpha_k}$ , 如果第  $l$  组截面变量当前取值为  $A_{l,j}$ , 则令  $A_l = A_{l,j-1}$ ; 若  $r_{\alpha_k} \leq r_{A_i}$  且如果删去第  $k$  组截面以后结构非几何可变, 则令  $\alpha_k = 0$ , 删去该组变量所对应的杆件, 形成新的结构, 进行结构重分析, 然后继续进行优化。如此反复进行直到约束条件不再满足为止, 上次搜索值即为本轮迭代的终值, 迭代结束。

在结构拓扑固定以后, 结构形状优化的数学模型为

$$\text{求 } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T, \quad S = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T, \quad \alpha = \alpha^0,$$

$$\min W = \sum_{i=1}^{n_A} \rho_i A_i \alpha_i^0 \sum_{j \in G_i} l_j(s_j),$$

$$\text{s. t. } g(A, S, \alpha^0) \leq 0.$$

这里  $\alpha^0$  为上轮拓扑优化后得到的拓扑变量  $\alpha$  的值。若  $\alpha_i^0 = 0$ , 则表示第  $i$  组杆件已经被删除, 在形状优化中, 相应于删除杆的应力约束被清除了。模型的设计变量只有截面和形状变量, 这里利用形状优化的综合算法求其最优解。当形状变量变化时, 对内力的影响较大, 所以不能用静定化假设, 需要做结构重分析。然后求各变量的相对差商, 最后再求出所有差商的最小值。若该最小值对应于第  $i$  个截面变量, 则该变量下一次应该搜索其离散集中当前值的前一个值(即比当前值小的那个邻近值)。若该最小值对应于第  $i$  个形状变量, 由于目标函数不一定是形状变量的单调函数, 为了确保当形状变量变化时, 目标函数值能够不断下降, 目标函数关于形状变量的一阶导数被用来确定搜索的方向。计算过程中, 为了使近似式不产生大的误差并保证能够收敛, 对两类变量增加了运动极限的限制。形状优化的目的就是在当前的拓扑结构下寻找合理的结构形状, 使得结构更轻。

### 4 数值算例

例 15 杆桁架如图 1 所示, 分组数  $M = 8$ , 分组情况列在表 1 中, 各杆的横截面为圆形,  $\rho = 27\ 150.68 \text{ N/cm}^3$ ,  $E = 6.897 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ , 许用应力均为  $\sigma = \alpha_D = 17\ 243.5 \text{ N/cm}^2$ , 许用稳

定系数取  $\lambda = \lambda_D = 1.4$ 。载荷工况有两个, 工况 1:  $P_{3y} = P_{5y} = P_{7y} = -4.45 \times 10^5 \text{ N}$ ; 工况 2:  $P_{4y} = P_{6y} = P_{8y} = -4.45 \times 10^5 \text{ N}$ , 同时在两种工况下, 在 4、6、8 号节点沿  $y$  方向分别作用有  $-40\cos(50t)$  kN 的简谐动载荷, 结点 5 的  $y$  方向有  $\delta_i = \delta_{iD} = 1.524 \text{ cm}$  的位移约束。截面变量和形状变量连接情况如表 1 和表 2, 圆杆截面参数的许用离散值如表 3。形状变量许用离散间距为 5 cm。

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
杆号	1, 2	3, 4	5, 6	7, 8	9, 10	11, 12	13, 14	15

$x_7$	$x_8$	$y_8$	$y_6$
$x_3 = -x_7$	$x_4 = -x_8$	$y_4 = y_8$	$y_6$

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A / \text{cm}^2$	6.45	9.68	22.58	32.26	45.16	70.97	83.87	103.23	129.03	161.29	193.55
$J / \text{cm}^4$	3.31	7.46	40.59	82.86	162.37	401.01	560.05	848.44	1325.54	2071.22	2982.61

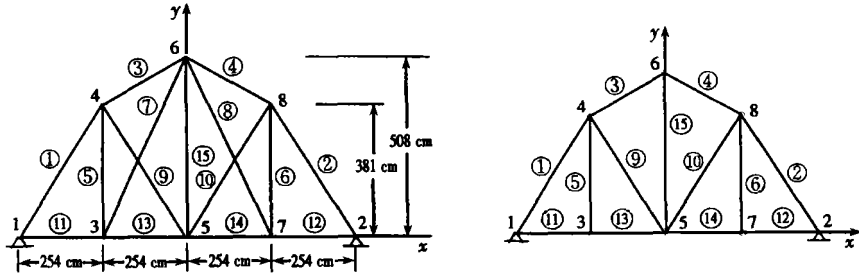


图 1 15 杆平面桁架和最优布局

在优化过程中, 先做拓扑优化, 然后做形状优化, 两类优化交替进行。考虑动力作用下包含稳定约束和不包含稳定约束的布局优化结果分别列在表 4, 可以看出, 包含稳定约束的布局优化结果增加了, 其中  $W$  为桁架的重量, 单位为  $\text{N}$ 。在实际优化时, 通常  $\sigma_i < \sigma_{iD}$ ,  $\delta_j < \delta_{jD}$ ,  $\lambda > \lambda_D$ , 因为静载荷是长期的, 动载荷是短期的, 但两者相差不大, 在 5%~10%, 因此在本例题中, 两种许用值分别取同一值。

表 4 平面 15 杆桁架在动力作用下包含稳定约束和不包含稳定约束布局优化结果比较

变量	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$x_7$	$x_8$	$y_8$	$y_6$	$W/\text{N}$
情况 1	129.03	129.03	70.97	0	70.97	45.16	6.45	70.97	365	275	165	210	6796
情况 2	83.87	70.97	45.16	0	6.45	6.45	6.45	45.16	235	235	365	470	4869

注: 情况 1: 约束条件包含了稳定约束; 情况 2: 约束条件不包含稳定约束

由表 4 的优化结果可以看出, 稳定性约束对最优布局的截面和形状具有重要的影响。从最后一列目标函数的结果看, 受稳定性约束时的重量远高于无稳定性约束时的重量。两种情况的最优形状也不同: 受稳定性约束时的  $y_6$  和  $y_8$  更小, 结构的外观更低平, 但杆件的截面积更大一些, 这样的布局可以使局部稳定性约束得到满足。

## 5 结束语

在动力和静力同时作用下布局优化结果要比不考虑稳定约束的优化结果要差许多, 因此, 在优化时考虑稳定约束是非常必要的。最新研究证明, 满足局部稳定约束可保证满足全局稳定约束, 因为全局失稳是由局部失稳累计引起的, 因此在优化过程中只考虑局部稳定约束就可以了(基于桁架结构稳定分析的经典理论的全局稳定约束条件的提法是不合理的<sup>[7]</sup>)。文中给

出的虽是局部稳定约束条件,实际也代表了全局稳定约束条件。动位移约束条件的满足,则结构不会产生共振,且频率禁区约束也会自动满足,因此,动位移约束就代替了频率禁区约束。

感谢 本文得到大连理工大学 211 工程基金资助,特此感谢。

### [参 考 文 献]

- [1] 孙焕纯,柴山,王跃方,等.离散变量结构优化设计[M].大连:大连理工大学出版社,2002,358—377.
- [2] 孙焕纯,石连栓,柴山.考虑动应力、动位移约束的离散变量结构优化设计[J].计算力学学报,1997,14(增刊):723—726.
- [3] 石连栓,孙焕纯,冯恩民.具有动应力和动位移约束的离散变量结构拓扑优化设计方法[J].应用数学和力学,2001,22(7):695—700.
- [4] Chai S, Shi L S, Sun H C. An application of relative difference quotient algorithm to topology optimization of truss structures with discrete variables[J]. Struct Optim, 1999, 18(1): 48—55.
- [5] Chai S, Sun H C. A relative difference quotient algorithm for discrete optimization[J]. Struct Optim, 1996, 12(1): 45—56.
- [6] Li X S. An aggregate function method for nonlinear programming[J]. Science in China, Series A, 1991, 34(1): 1467—1473.
- [7] 孙焕纯,王跃方.对桁架结构稳定分析经典理论的讨论[J].计算力学学报,2005,22(3):316—319.

## Approach for Layout Optimization of Truss Structures With Discrete Variables Under Dynamic Stress, Displacement and Stability Constraints

SHI Lian\_shuan<sup>1</sup>, WANG Yue\_fang<sup>2</sup>, SUN Huan\_chun<sup>2</sup>

(1. Department of Computer, Tianjin University of Technology and Education,  
Tianjin 300222, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian 116023, P. R. China)

**Abstract:** A mathematical model was developed for layout optimization of truss structures with discrete variables subjected to dynamic stress, dynamic displacement and dynamic stability constraints. By using the quasi-static method, the mathematical model of structure optimization under the dynamic stress, dynamic displacement and dynamic stability constraints were transformed into one subjected to static stress, displacement and stability constraints. The optimization procedures included two parts, i. e. the topology optimization and the shape optimization. In each procedure, the comprehensive algorithm was used and the relative difference quotients of two kinds of variables were used to search the optimum solution. A comparison between the optimum results of model with stability constraints and the optimum results of model without stability constraint was given. And that shows the stability constraints have a great effect on the optimum solutions.

**Key words:** discrete variables; structure optimization; layout optimum design; dynamic stress constraint; dynamic displacement constraint; dynamic stability constraint; relative difference quotient