

# 一种有限元\_边界元耦合分域算法\*

严波<sup>1</sup>, 杜鹃<sup>1</sup>, 胡宁<sup>1,2</sup>, 关根英树<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 资源及环境科学学院 工程力学系, 重庆 400030;  
2. 日本东北大学 工学部 航空宇宙工程系, 日本 仙台, 980\_8579)

(陈山林推荐)

**摘要:** 提出了一种有限元\_边界元耦合分域算法. 该算法将所分析问题的区域分解成有限元和边界元子域, 在满足两子域界面上位移和面力协调连续的条件下, 通过迭代求解得到问题的解. 在迭代求解过程中, 引入动态松弛系数, 使收敛得以加速. 该方法在两子域界面上有限单元结点和边界单元结点的位置相互独立, 无需协调一致. 对诸如裂纹扩展过程的模拟具有独特的优势. 用所提出的耦合算法分析算例, 得到的结果与有限元法、边界元法和另一种耦合算法的数值计算结果一致, 验证了这种算法的正确性和可行性.

**关键词:** 有限元; 边界元; 耦合算法; 区域分解  
**中图分类号:** O302; O24      **文献标识码:** A

## 引 言

有限元\_边界元耦合算法是一类有效的数值分析方法, 它们利用了有限元法和边界元法各自的优点, 在断裂力学、流体力学、岩土力学、电磁学和声学等领域得到广泛的研究和应用. 现有的有限元\_边界元耦合算法可以粗略地分为 3 类. 第一类方法视边界元子域为一个大的有限单元, 将描述边界元子域的位移\_面力方程变换成有限元形式的位移\_力平衡方程, 然后将其与有限元子域的平衡方程集成得到整个系统的控制方程<sup>[1~4]</sup>. 这类方法得到的系数矩阵不再具有对称性和带状性. 与此相反, 另一类耦合方法将有限元子域视为一等效的边界元子域, 将其平衡方程转换成边界元方程的形式, 然后在满足两子域界面的连续和平衡条件下, 将有限元和边界元子域的方程耦合在一起<sup>[1,5~7]</sup>. 这类方法无需矩阵求逆运算, 但却破坏了对称带状系数矩阵的正定性. 第三类方法包括直接耦合法<sup>[6]</sup>、边界耦合法<sup>[8]</sup>和迭代区域分解耦合法<sup>[9]</sup>等. 所有 these 方法都各有优缺点.

Lin<sup>[10]</sup> 提出了一种基于区域分解概念的耦合算法, 即有限元\_边界元耦合分域迭代算法. 该算法将分析的区域分解成有限元子域和边界元子域, 通过迭代得到问题的解. 这种方法要求有限元子域和边界元子域界面上的结点的位置必须协调一致, 两区域不能完全独立地进行离散. 在模拟诸如裂纹扩展等问题时, 放弃各子域界面上有限单元和边界单元结点协调一致的条件会提高计算效率. 为此, 本文在 Lin 提出的耦合算法基础上, 提出了一种改进的耦合算

\* 收稿日期: 2004\_12\_09; 修订日期: 2005\_12\_05

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目(2004036145)

作者简介: 严波(1965—), 男, 重庆永川人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86\_23\_65102561; Fax: + 86\_23\_65111468; E\_mail: boyan@cqu.edu.cn).

法. 该算法不要求子域界面上的有限单元结点和边界单元结点协调一致, 即两子域在界面上的结点的位置相互独立, 因而两子域可以完全独立地离散.

## 1 有限元\_边界元耦合分域算法

假设一个受外力作用的各向同性线弹性均匀体如图 1 所示. 该连续体被分解成两个分别由有限元和边界元离散子域  $\Omega^F$  和  $\Omega^B$ , 两子域的界面为  $\Gamma^I$ . 有限元子域的平衡方程可表示为

$$Ku_F = f_F, \quad \text{在 } \Omega^F \text{ 内}, \quad (1)$$

这里,  $K$  为有限元子域的刚度矩阵,  $u_F$  和  $f_F$  分别表示有限元子域的结点位移矢量和等效结点力矢量. 边界元子域的平衡方程为

$$Hu_B = Gt_B, \quad \text{在 } \Omega^B \text{ 内}, \quad (2)$$

其中  $H$  和  $G$  为相应于边界元子域的系数矩阵,  $u_B$  和  $t_B$  则分别表示边界元子域的结点位移矢量和结点面力矢量. 将方程 (1) 和 (2) 中对应于子域界面和非界面上的结点变量进行重新组合后, 该两方程可分别写成如下形式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^I \\ u_F^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^I \\ f_F^F \end{Bmatrix} \quad (3)$$

和

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^I \\ u_B^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_B^I \\ t_B^B \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

式中变量的下标 F 和 B 分别表示有限元子域和边界元子域, 上标 I 表示界面上的结点变量, 上标 F 和 B 则分别表示有限元子域和边界元子域中的非界面结点变量.

由于有限元平衡方程涉及结点位移和等效结点力, 而边界元方程则是由结点位移和结点面力描述的, 因此要耦合两个方程就必须建立起有限元的等效结点力和边界元的结点面力之间的关系. 根据虚功原理, 在界面上的任意有限单元的等效结点力所作的虚功等于处于界面上的单元面内的面力所作的虚功

$$(\delta u^e)^T f^e = \int_{\Omega_F^e} (\delta u)^T t ds = (\delta u^e)^T \int_{\Omega_F^e} N^T N ds^e \quad (5)$$

即

$$f^e = \int_{\Omega_F^e} N^T N ds^e, \quad (6)$$

这里  $\Omega_F^e$  是有限单元处于界面上的单元面. 可以将该面视为一个面单元, 因此, 式 (5) 和 (6) 中所有量均是相对于该面单元定义的, 参见图 2.

如果在界面上有限单元结点和边界单元结点一致, 那么两子域界面上力的平衡条件可以表示为

$$f_F^I + Mt_B^I = 0, \quad \text{在 } \Gamma^I \text{ 上}, \quad (7)$$

其中  $M$  是转换矩阵. 在此种情况下, 界面上结点的位移协调条件为

$$u_B^I = u_F^I, \quad \text{在 } \Gamma^I \text{ 上}, \quad (8)$$

此即文献 [10] 讨论的情况. 如果界面上有限元和边界元子域的结点位置不一致, 可根据界面

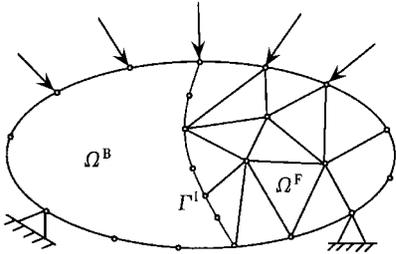


图 1 用有限元和边界元子域分解的连续体

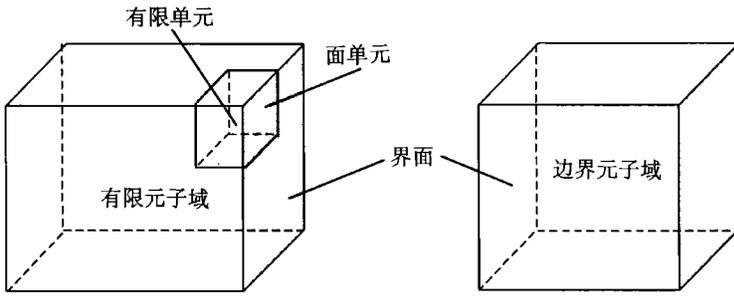


图2 界面上有限元子域的面单元定义

上边界单元结点面力插值得到有限单元结点位置处的面力值,即

$$t_B^{\text{IF}} = N_B t_b^{\text{I}}, \tag{9}$$

这里  $N_B$  表示包含该有限单元结点的边界单元的插值函数. 由此确定的  $t_B^{\text{IF}}$  可以作为式(6)中的  $t^e$ , 进一步可以计算界面上有限单元的等效结点力  $f_F^{\text{I}}$ , 即(6)式中的  $f^e$ . 此时, 界面结点的位移协调条件可表示为

$$u_B^{\text{I}} = u_F^{\text{IB}}, \tag{10}$$

这里  $u_F^{\text{IB}}$  为界面上边界单元结点位置处由有限单元插值得到的位移值. 它可由下式确定

$$u_F^{\text{IB}} = N_F u_F^{\text{I}}, \tag{11}$$

式中  $N_F$  为界面上包含该边界单元结点的有限单元的插值函数.

问题的解可以通过下列迭代过程得到.

首先任意给定界面上边界元子域结点的初始位移  $u_{B,0}^{\text{I}}$ . 对  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 循环:

1. 解方程

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{B,n}^{\text{B}} \\ u_{B,n}^{\text{I}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{B,n}^{\text{B}} \\ t_{B,n}^{\text{I}} \end{Bmatrix},$$

得到  $t_{B,n}^{\text{I}}$ ;

2. 由式(9)可得  $t_{B,n}^{\text{IF}}$ , 代入式(6)可确定  $f_{F,n}^{\text{I}}$ ;

3. 解方程

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{F,n}^{\text{F}} \\ u_{F,n}^{\text{I}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{F,n}^{\text{F}} \\ f_{F,n}^{\text{I}} \end{Bmatrix},$$

得到  $u_{F,n}^{\text{I}}$ ;

4. 由式(11)可以得到  $u_{F,n}^{\text{IB}}$ ;

5. 令

$$u_{B,n+1}^{\text{I}} = (1 - \omega) u_{B,n}^{\text{I}} + \omega u_{F,n}^{\text{IB}}; \tag{12}$$

6. 判断条件  $\|u_{B,n+1}^{\text{I}} - u_{B,n}^{\text{I}}\| / \|u_{B,n+1}^{\text{I}}\| \leq \varepsilon$  是否满足. 其中  $\varepsilon$  是给定的收敛系数. 如果满足收敛条件, 则得到问题的解, 停止迭代; 否则转到 1, 进入下一次迭代, 直到收敛为止.

式(12)中的  $\omega$  是松弛系数, 可以在迭代过程中动态地由下式确定

$$\omega = (e_n^{\text{B}}, e_n^{\text{B}} - e_n^{\text{F}}) / \|e_n^{\text{B}} - e_n^{\text{F}}\|^2, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

这里

$$e_n^{\text{B}} = u_{B,n}^{\text{I}} - u_{B,n-1}^{\text{I}}, \quad e_n^{\text{F}} = u_{F,n}^{\text{IB}} - u_{F,n-1}^{\text{I}}. \tag{14}$$

该关系是由下式取极小值得到<sup>[10]</sup>

$$\| \mathbf{u}_{B, n+1}^I(\omega) - \mathbf{u}_{B, n}^I(\omega) \|^2 \tag{15}$$

## 2 算 例

为了验证上述方法的正确性, 编制了相应的计算程序. 现在计算分析一柱体的拉伸问题, 并将计算结果与有限元法、边界元法和文献[10]提出的耦合算法的计算结果进行比较.

计算的柱体拉伸问题如图3所示. 柱体的弹性模量  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 长 100 mm, 宽 20 mm, 高 20 mm, 其自由端受大小为 50 MPa 的均匀拉伸载荷. 忽略柱的自重.

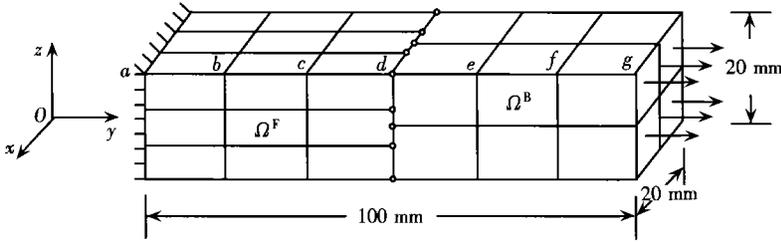


图3 受拉柱体具有非协调界面结点的有限元\_边界元耦合计算模型

如图3中所示, 柱体被分解为一个有限元子域和一边界元子域. 有限元子域被离散为 27 个 20 结点单元, 总共 208 个结点, 有 40 个结点位于界面上; 边界元子域被离散为 32 个 8 结点单元, 总共 92 个结点, 其中有 21 个结点位于界面上. 界面上有限单元结点和边界单元结点位置不完全一致.

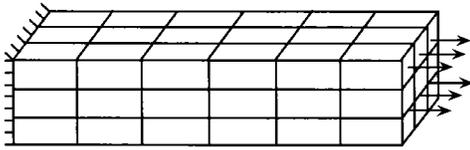


图4 受拉柱体的有限元模型

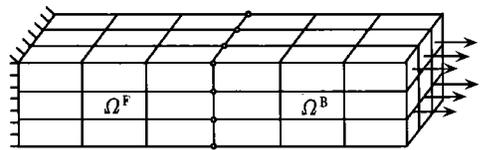


图5 受拉柱体具有协调界面结点的有限元\_边界元耦合模型

表 1 受拉柱体典型结点的  $y$  方向位移值

结点	有限元法		边界元法		文献[10]算法		本文算法
	$d_y/\text{mm}$	误差 $R/(\%)$	$d_y/\text{mm}$	误差 $R/(\%)$	$d_y/\text{mm}$	误差 $R/(\%)$	$d_y/\text{mm}$
a	0.000E+ 0	0.00	0.000E+ 0	0.00	0.000E+ 0	0.00	0.000E+ 0
b	3.983E- 3	0.38	3.951E- 3	0.43	3.967E- 3	0.03	3.968E- 3
c	8.168E- 3	0.49	8.080E- 3	0.49	8.119E- 3	0.01	8.120E- 3
d	1.233E- 2	0.33	1.224E- 2	0.41	1.229E- 2	0.00	1.229E- 2
e	1.650E- 2	0.30	1.641E- 2	0.24	1.645E- 2	0.00	1.645E- 2
f	2.066E- 2	0.19	2.058E- 2	0.19	2.062E- 2	0.00	2.062E- 2
g	2.482E- 2	0.12	2.474E- 2	0.20	2.478E- 2	0.04	2.479E- 2

现采用有限元法、边界元法和具有协调界面结点的有限元\_边界元耦合算法<sup>[10]</sup>分析该柱体拉伸问题. 有限元模型如图4所示, 其划分为 376 个结点, 54 个 20 结点单元. 边界元模型划分为 272 个结点, 90 个 8 结点单元, 单元划分和图4中的表面单元一致. 图5为具有协调界面结点的有限元\_边界元耦合算法模型. 该边界元子域有 54 个 8 结点单元, 164 个结点; 有限

元子域有 27 个 20 结点单元, 208 个结点. 在界面上有 40 个结点.

采用各种方法计算得到的图 3 中  $a, b, c, d, e, f, g$  结点的  $y$  向位移值  $d_y$  如表 1 中所列. 表中还列出了各种算法的结果与本文提出的改进的有限元\_边界元耦合分域算法结果的相对误差. 从表中可见, 本文提出的耦合分域算法所得到的计算结果与其它几种数值计算方法的结果非常一致, 说明方法正确, 有足够的计算精度.

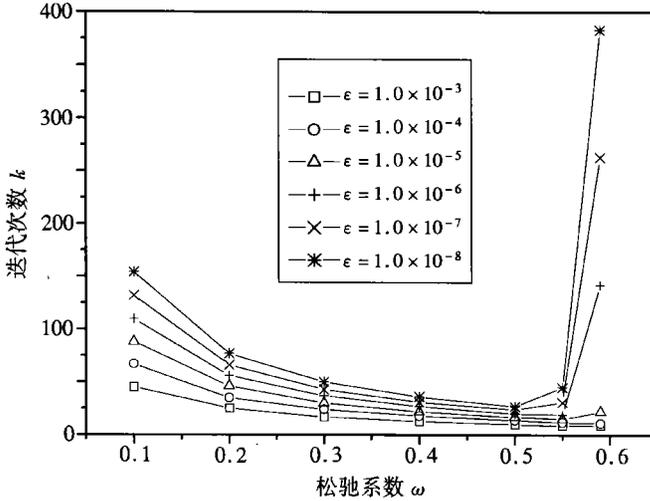


图 6 不同误差限下迭代次数与松弛系数间的关系

表 2 采用动态松弛系数时的迭代次数

$\epsilon$	1.0E-3	1.0E-4	1.0E-5	1.0E-6	1.0E-7	1.0E-8
$k$	8	8	9	13	17	19

表 3 不同误差限下文献[10]算法和本文算法迭代次数的比较

文献[10]算法			本文算法		
误差限 $\epsilon$	$k$	Nom	误差限 $\epsilon$	$k$	Nom
1.0E-3	8	3.823E-4	1.0E-3	8	2.469E-5
1.0E-4	10	7.677E-6	1.0E-4	8	2.469E-5
1.0E-5	10	7.677E-6	1.0E-5	9	9.111E-6
1.0E-6	14	8.093E-7	1.0E-6	13	8.462E-7
1.0E-7	15	5.242E-8	1.0E-7	17	4.115E-8
1.0E-8	17	9.008E-9	1.0E-8	19	1.806E-9

下面讨论本文提出的有限元\_边界元耦合算法的收敛性. 本耦合算法是一种迭代算法, 其收敛性取决于松弛系数的选取, 其取值大小对迭代的收敛性的影响与具体问题有关. 图 6 所示为前述算例在不同误差限下迭代次数  $k$  与松弛系数  $\omega$  间的关系. 从图中可见, 迭代次数随误差容限  $\epsilon$  的减小而增大. 对于本算例而言, 松弛系数在 0.5 附近时所需迭代次数最少, 当  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$  时, 迭代次数为 10; 当  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-8}$  时, 迭代次数为 27, 在满足不同精度要求的情况下迭代次数相差较少. 计算表明, 当采用动态松弛系数, 即在迭代过程中利用式(13)和(14)不断调整其大小, 可以大大加速收敛. 表 2 所列为采用动态松弛系数时, 不同误差限下达到收敛的迭代次数, 明显低于图 6 中任何松弛系数取值时所需的迭代次数.

本文提出的有限元\_边界元耦合分域算法, 容许在界面上有限元子域和边界元子域的结点

位置不协调一致. 而文献[10]提出的耦合算法要求界面上两子域的结点必须一致. 为了比较这两种方法的收敛性, 在设置不同误差限的情况下, 采用该两种方法分析了图3所示的算例. 计算结果见表3. 显然, 在满足相同精度要求的情况下, 两种算法的迭代次数接近.

### 3 结 论

本文提出了一种有限元\_边界元耦合分域算法, 该算法主要有如下优点: 1) 与传统的有限元\_边界元耦合算法相比, 本算法无需把有限元刚度矩阵和边界元方程结合在一起; 2) 由于在这种算法中有限元子域和边界元子域被看作是独立的问题求解, 所以在耦合计算时, 只需要对独立的有限元和边界元程序稍作修改即可; 3) 各种复杂的条件可以十分容易的加入程序中; 4) 在界面上有限元和边界元子域的结点位置可以不协调一致, 这对于模拟某些裂纹扩展问题有明显的优势.

### [参 考 文 献]

- [1] Zienkiewicz O C, Kelly D W, Bettles P. Coupling of finite element and boundary solution procedures [J]. *Internat J Numer Meth Engng*, 1977, **11**(2): 355—375.
- [2] Brebbia C A, Georgion P. Combination of boundary and finite elements in elastostatics [J]. *Appl Math Mode*, 1979, **3**(1): 212—220.
- [3] Varadarajan A, Sharma K G, Sinch R B. Some aspects of coupled FEBEM analysis of underground openings [J]. *Internat J Numer Anal Meth Geomech*, 1985, **9**(6): 557—571.
- [4] Beer G, Swoboda G. Application of advanced boundary element and coupled methods in geomechanics [A]. In: Cruse T A Ed. *Advanced Boundary Element Methods [C]*. Berlin: Springer, 1987, 19—28.
- [5] HONG Chi-an. Stress analysis of a U\_frame structure by the coupling of boundary and finite element methods [D]. Ph D dissertation. Stillwater: Oklahoma State University, 1986.
- [6] Zarcó M A. Solution of soil-structure interaction problems by coupled boundary element-finite element method [D]. Ph D dissertation. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1993.
- [7] Kelly D W, Mustoe G, Zienkiewicz O C. Coupling boundary element methods with other numerical methods [A]. In: Banerjee P K, Butterfield R, Eds. *Developments in Boundary Element Methods [C]*. **1**. Chap 10. London: Applied Science, 1979.
- [8] Hsiao G C. The Coupling of BEM and FEM\_A Brief Review [M]. *Boundary Elements X*, Southampton: Computational Mechanics, 1988, 431—445.
- [9] Prasad N N V. Integrated techniques for coupled elastostatic BEM and FEM analysis [D]. Master the sis. Albuquerque: The University of New Mexico, 1992.
- [10] Lin C C. An iterative finite element-boundary element algorithm [J]. *Computers & Structures*, 1996, **59**(5): 899—909.

# A Domain Decomposition Algorithm With Finite Element\_Boundary Element Coupling

YAN Bo<sup>1</sup>, DU Juan<sup>1</sup>, HU Ning<sup>1,2</sup>, Sekine Hideki<sup>2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University,  
Chongqing 400030, P. R. China ;

2. Department of Aerospace Engineering, Tohoku University,  
Sendai 980\_8579, Japan )

**Abstract:** A domain decomposition algorithm coupling the finite element and the boundary element is presented. It essentially involves subdivision of the analyzed domain into sub\_regions being independently modeled by the two methods, i. e. , the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM). The original problem was restored with continuity and equilibrium conditions being satisfied on the interface of the two sub\_regions using an iterative algorithm. To speed up the convergence rate of the iterative algorithm, a dynamically changing relaxation parameter during iteration was introduced. An advantage of the proposed algorithm is that the locations of the nodes on the interface of the two sub\_domains can be inconsistent. The validity of the algorithm is demonstrated by the consistency of the results of a numerical example obtained by the proposed method and those by the FEM, the BEM and a present finite element\_boundary element (FE\_BE) coupling method.

**Key words:** finite element method; boundary element method; finite element\_boundary element coupling; domain decomposition