

# 弹侵彻混凝土靶的法向膨胀理论<sup>\*</sup>

高世桥<sup>1</sup>, 刘海鹏<sup>1</sup>, 李科杰<sup>2</sup>, 黄风雷<sup>1</sup>, 金磊<sup>2</sup>

(1. 北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081;

2. 北京理工大学 机电工程学院, 北京 100081

(宋顺成推荐)

**摘要:** 基于描述材料在高速高压冲击下的动态行为的方程, 建立了相应的冲击波前为一般曲面的方程. 通过分析, 针对混凝土材料, 提出了可给出弹体减速度时间历程解析解的法向膨胀理论. 它不仅适用于球形弹头和柱形弹头, 也适用于其他类型的弹头, 如锥形弹头和卵形弹头等; 它不但适用于垂直侵彻, 也适用于斜侵彻.

**关键词:** 弹; 侵彻; 混凝土靶; 冲击波

**中图分类号:** O385      **文献标识码:** A

## 引 言

在过去 100 多年的研究里, 描述弹冲击、侵彻、贯穿、毁伤混凝土靶的动态特性的方法主要可归纳为 3 种: 经验法、解析法和数值模拟法.

混凝土介质是一种脆性材料, 它不象金属那样具有良好的韧性. 混凝土材料抗压性能很强而抗拉性能很弱. 在很高的压力作用下, 其密度会发生改变, 我们在后面的分析中将用到混凝土的这些特性.

基于描述材料在高速高压冲击下的动态行为的方程<sup>[1,2]</sup>, 本文建立了相应的冲击波前为一般曲面的方程. 通过分析, 针对混凝土材料, 提出了可给出弹体减速度时间历程解析解的法向膨胀理论. 在这个法向膨胀理论中, 将充分考虑混凝土材料行为、空穴膨胀理论<sup>[3~6]</sup>和应力波理论<sup>[7,8]</sup>.

## 1 基本假设

对于高速高压冲击, 应力波峰值将大大超过了材料的动态流体强度. 此时, 剪切应力与应力的静水压力项相比可以忽略了.

冲击波具有陡峭波前, 形成冲击波的必要条件是波速随着压力的增大而增大. 在冲击波前, 粒子速度、压力和密度都是不连续的.

为了研究混凝土材料受弹冲击时的动力学特性, 基于多次实验<sup>[9,10]</sup>, 本文提出以下假设:

1 冲击波前是一间断面且无明显厚度;

\* 收稿日期: 2004\_05\_08; 修订日期: 2005\_11\_18

作者简介: 高世桥(1961—), 男, 满族, 辽宁人, 教授, 博士;

刘海鹏(联系人, Tel: + 86\_10\_68914201; Fax: + 86\_10\_68915087; E\_mail: lhp@bit.edu.cn).

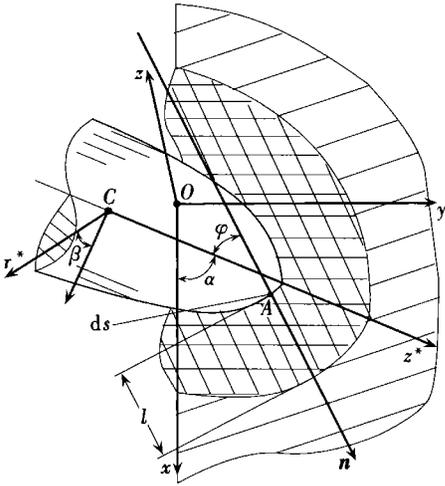


图 1 弹侵彻混凝土靶的侵彻过程

2 假设材料的剪切模量为 0, 在分析高压冲击波的响应时, 可将其视为流体;

3 忽略冲击波前的体力(如重力 和热传导;

4 无弹塑性行为;

5 材料不经历相学状态变换;

6 在冲击过程中, 混凝土响应介质向弹表面(主要是弹头表面 的外法线方向膨胀, 响应介质的粒子速度和波速是平行的, 其方向与弹头表面的外法线方向相同;

7 在冲击过程中, 拉应力与压应力相比可以忽略;

8 冲击过程中相对于靶体而言弹体是刚性的(即弹不变形).

需要说明的是, 前 5 个假设对一般材料也适用, 而后 3 个假设仅适用于混凝土材料.

弹头表面的单位外法线方向可定义为(见图 1

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\text{grad } \phi|} \text{grad } \phi, \tag{1}$$

其中  $\phi(\mathbf{r}) = 0$  表示弹头几何关系, 而  $\text{grad}(\cdot)$  表示标量场的梯度.

## 2 连续介质力学控制方程

在冲击波前的后面, 材料所有物理量都是连续的, 而不是间断的. 根据连续介质力学<sup>[1,2]</sup>, 考虑非剪应力和非剪应变, Cartesian 坐标系下的质量守恒、动量守恒和能量守恒关系可写为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \text{div } \mathbf{p}, \tag{3}$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = - p_{ik} \mathcal{E}_{ik}, \tag{4}$$

其中  $D/Dt$  是 Lagrange 坐标下的全微分符号,  $\rho$  是材料密度,  $\text{div}(\cdot)$  代表张量场的散度,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{p}$  分别是粒子速度张量和二阶压力张量,  $E$  是单位质量的内能,  $\mathcal{E}_{ik} = 0.5(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$  是应变率张量. Euler 方程和 Lagrange 方程间的微分变换是  $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ .

在冲击波前上, 有一间断面, 此处的  $p$ 、 $\rho$  和  $\mathbf{u}$  都是不连续的. 上述的等式就不适用了, 但是根据基于质量守恒、动量守恒和能量守恒的进一步分析, 可得到下面的等式

$$\Delta \rho v = 0, \tag{5}$$

$$\Delta \rho \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{p} = 0, \tag{6}$$

$$\Delta \rho \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + E \right] - \mathbf{n} \cdot \Delta (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{7}$$

式中  $\Delta(\cdot)$  代表冲击波前的前面和后面的物理量(张量 之差, “ $\cdot$ ” 代表两个矢量的点积,  $v = c_n - u_n$ ,  $\mathbf{n}$  是冲击波前的法线方向上的单位张量,  $c_n$  是波速.

### 3 法向膨胀理论

按照上面提到的假设,在冲击过程中,混凝土响应介质沿弹头外法线方向膨胀,粒子速度、膨胀速度和压力与弹头表面法线方向相同,因此有

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{n}, \mathbf{c} = c_n \mathbf{n}, \mathbf{p} = p_n \mathbf{I}_n, \tag{8}$$

式中  $\mathbf{c}$  是波的速度张量,  $\mathbf{I}_n$  是二阶法向单位张量. 在这种情况下,一个张量的散度可以写为

$$\text{div}(\bullet) = \frac{\partial}{\partial N}, \tag{9}$$

式中  $N$  是在方向  $\mathbf{n}$  的法向坐标.

对于冲击波前后的介质,把式(8)和式(9)代入式(2)、(3)、(4)得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial N}(\rho u_n) = 0, \tag{10}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial N} \right] = - \frac{\partial p_n}{\partial N}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( E + \frac{1}{2} u_n^2 \right) \rho \right] + \frac{\partial}{\partial N} \left[ \rho \left( E + \frac{1}{2} u_n^2 \right) u_n + p_n u_n \right] = 0. \tag{12}$$

在冲击波前上,由式(5)、(6)、(7)、(8)得到

$$(\rho_{sf} - \rho_0) c_n - \rho_{sf} u_n^l = 0, \tag{13}$$

$$\rho_{sf} (c_n - u_n^l) u_n^l = p_n^l, \tag{14}$$

$$\rho_{sf} (c_n - u_n^l) \left[ E + \frac{1}{2} (u_n^l)^2 \right] - p_n^l u_n^l = 0, \tag{15}$$

式中  $\rho_{sf}$  是冲击波前附近被压缩介质(即响应介质)的密度,  $\rho_0$  是材料的初始密度,  $u_n^l$  和  $p_n^l$  是冲击波前附近的响应介质的粒子速度和压力.

求解方程(13)、(14)、(15)得

$$c_n = \frac{\rho_{sf}}{\rho_{sf} - \rho_0} u_n^l, \tag{16}$$

$$p_n^l = \rho_{sf} (c_n - u_n^l) u_n^l = \rho_0 c_n u_n^l, \tag{17}$$

$$E = \frac{1}{2} (u_n^l)^2. \tag{18}$$

### 4 状态方程及其解

为了进一步得到式(16)、(17)、(18)的解并有效地求解方程(10)、(11)、(12),还需要另一个状态方程. 对于本文所考虑的混凝土材料,本文建议以下两种本构关系,一个是极限密度模型<sup>[9,11]</sup>,另一个是改进的 Holmquist-Johnson 模型<sup>[12]</sup>. 在极限密度模型中,混凝土密度是常量,在自由介质区,  $\rho = \rho_0$ ; 在介质受高压冲击的压缩区,  $\rho = \rho^*$ ,  $\rho^*$  是极限密度,其 Hugoniot 曲线如图2所示.

利用这个模型,在冲击波前,把  $\rho_{sf} = \rho^*$  代入式(16)、(17)、(18)可得

$$c_n = \frac{\rho^*}{\rho^* - \rho_0} u_n^l, \tag{19}$$

$$p_n^l = \rho^* (c_n - u_n^l) u_n^l = \rho_0 c_n u_n^l, \tag{20}$$

$$E = \frac{1}{2} (u_n^l)^2. \tag{21}$$

在冲击波前的后面,把  $\rho_{sf} = \rho^*$  代入式(10)、(11)、(12),可得

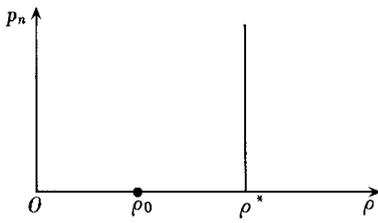


图2 混凝土的 Hugoniot 曲线

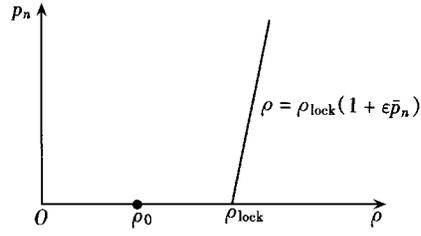


图3 改进的 Holmquist\_Johnson 曲线

$$u_n = u_n(t), \tag{22}$$

$$p_n = p_n^l + \rho^* \frac{du_n}{dt} (l - N), \tag{23}$$

$$E = \frac{1}{2} u_n^2, \tag{24}$$

式中  $l$  是波前相对于弹表面的传播距离,  $N$  是法向坐标.

在弹头表面上有

$$u_n = u_n(t), \tag{25}$$

$$p_n = \rho_0 c_n u_n + \rho^* \frac{du_n}{dt} l, \tag{26}$$

$$E = \frac{1}{2} u_n^2. \tag{27}$$

此外, 基于 Holmquist\_Johnson 模型<sup>[12]</sup>, 本文提出了一个改进的 Holmquist\_Johnson 模型. 在这个模型中, 密度是压力的线性函数, 即  $\rho = \rho_{lock}(1 + \epsilon p_n)$ , 如图 3 所示, 其中  $p_n = (p_n - p_n^l)/p_n^l$ ,  $\rho_{lock}$  是混凝土材料的锁定密度,  $\epsilon$  是数量很小的系数.

在冲击波前上, 有  $\rho = \rho_{lock}$  和  $p_n = 0$ , 把它们代入式(16)、(17)、(18), 可得到在冲击波前的解:

$$c_n = \frac{\rho_{lock}}{\rho_{lock} - \rho_0} u_n^l, \tag{28}$$

$$p_n^l = \rho_{lock} (c_n - u_n^l) u_n^l = \rho_0 c_n u_n^l, \tag{29}$$

$$E = \frac{1}{2} (u_n^l)^2. \tag{30}$$

在冲击波前的后面, 考虑到系数  $\epsilon$  较小, 利用摄动方法, 物理量  $\rho, p_n, u_n$  和  $E$  的一阶近似的展开式为

$$\rho = \rho_{lock} + \epsilon \rho_{lock} p_n^{(0)}, \tag{31}$$

$$p_n = p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} \tag{32}$$

(或者  $p_n = p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)}$ , 其中  $p_n^{(0)} = (p_n^{(0)} + 1)p_n^l$  和  $p_n^{(1)} = p_n^{(1)} p_n^l$ ),

$$u_n = u_n^{(0)} + \epsilon u_n^{(1)}, \tag{33}$$

$$E = E^{(0)} + \epsilon E^{(1)}, \tag{34}$$

式中, 上标“0”和“1”分别表示展开式的 0 阶和 1 阶量. 把它们代入式(10)、(11)、(12), 0 阶近似类似式(22)、(23)、(24) 的解, 则有

$$\epsilon^0: \quad u_n^{(0)} = u_n^{(0)}(t), \tag{35}$$

$$p_n^{(0)} = p_n^l + \rho_{lock} \frac{du_n^{(0)}}{dt} (l - N) \quad \left[ \text{或 } p_n^{(0)} = \frac{\rho_{lock}}{p_n^l} \frac{du_n^{(0)}}{dt} (l - N) \right], \tag{36}$$

$$E^{(0)} = \frac{1}{2}(u_n^{(0)})^2. \tag{37}$$

1 阶部分可解为

$$\varepsilon^1: u_n^{(1)} = -\frac{\rho_{\text{lock}}}{\rho_n} \frac{d^2 u_n^{(0)}}{dt^2} \left( lN - \frac{N^2}{2} \right), \tag{38}$$

$$p_n^{(1)} = \frac{\rho_{\text{lock}}^2}{(\rho_n^l)^2} \left[ \frac{d^3 u_n^{(0)}}{dt^3} \left( \frac{lN^2}{2} - \frac{N^3}{6} \right) + u_n^{(0)} \frac{d^2 u_n^{(0)}}{dt^2} \left( lN - \frac{N^2}{2} \right) - \left( \frac{du_n^{(0)}}{dt} \right)^2 \left( lN - \frac{N^2}{2} \right) \right], \tag{39}$$

$$E^{(1)} = \frac{\rho_n^l}{\rho_{\text{lock}}} p_n^{(0)} \left[ \frac{p_n^{(0)}}{2} + 1 \right]. \tag{40}$$

### 5 侵彻过程中弹体的动力学方程

利用式(26)作用在弹表面的压力, 弹体的动力学方程可写为

$$m_p \dot{\xi} = \iint_{S_A} (\mathbf{p} + \sigma_c) \cdot \mathbf{e}_z^* dS, \tag{41}$$

$$J_p \ddot{\alpha} = \iint_{S_A} \mathbf{L}^* \times (\mathbf{p} + \sigma_c) \cdot (\mathbf{e}_r^* \times \mathbf{e}_z^*) dS, \tag{42}$$

式中  $m_p$  是弹性体质量,  $\sigma_c = \sigma_c \mathbf{n}$  是静态极限挤压应力,  $J_p$  是弹相对于轴  $r^*$  的转动惯量,  $\xi$  是弹体质心轨迹的切向加速度, 它的方向与弹轴  $z^*$  方向一致,  $\alpha$  是弹体相对于轴  $r^*$  的角速度,  $\mathbf{L}^*$  是弹体表面在坐标系  $r^* Cz^*$  中的矢量,  $\mathbf{e}_z^*$  和  $\mathbf{e}_r^*$  分别是轴  $z^*$  和轴  $r^*$  上的单位向量,  $S_A$  是弹靶相互作用的曲面.

注意到  $\mathbf{p} = p_n \mathbf{n} = \left[ \rho_0 c_n u_n + \rho^* \frac{du_n}{dt} l \right] \mathbf{n}$ , 由此得出

$$(m_p + m_f) \dot{\xi} - J_{\text{add}} \ddot{\alpha} = - \iint_{S_A} \left[ \frac{\rho^* \rho_0}{\rho^* - \rho_0} u_n^2 + \sigma_c \right] \cos \varphi dS, \tag{43}$$

$$(J_p + J_f) \ddot{\alpha} - m_{\text{add}} \dot{\xi} = - \iint_{S_A} \left[ \frac{\rho^* \rho_0}{\rho^* - \rho_0} u_n^2 + \sigma_c \right] (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi) \cos \beta dS, \tag{44}$$

式中

$$m_f = \iint_{S_A} \rho^* l \cos^2 \varphi dS,$$

$$J_f = \iint_{S_A} \rho^* l (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi)^2 \cos^2 \beta dS,$$

$$J_{\text{add}} = \iint_{S_A} \rho^* l \cos \varphi (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi) \cos \beta dS,$$

$$m_{\text{add}} = \iint_{S_A} \rho^* l \cos \varphi (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi) \cos \beta dS,$$

其他参数如图 1 所示.

法向速度  $u_n$  和轴向速度  $u_\xi$ 、角速度  $\alpha$  的关系和其与加速度的关系如下:

$$u_n = u_\xi \cos \varphi - \alpha (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi) \cos \beta, \tag{45}$$

$$\frac{du_n}{dt} = \dot{\xi} \cos \varphi - \dot{\alpha} (z^* \sin \varphi - r^* \cos \varphi) \cos \beta. \tag{46}$$

当用改进的 Holmquist-Johnson 模型时, 用  $\rho_{lock}$  代替  $\rho^*$ .

## 6 结论及与实验对比

利用上述方法, 本文对抛物形弹头垂直侵彻厚混凝土靶的问题进行了计算, 得出了减速度和深度等的侵彻特性, 并与实验做了比较. 我们采用抛物形弹做了减速度和侵彻深度实验, 抛物形弹头的几何方程为

$$z^* = H \left[ 1 - \frac{(r^*)^2}{a^2} \right] + b \quad (r^* \leq a), \quad (47)$$

式中  $H$ 、 $a$  和  $b$  是几何参数. 试验中使用了钝头弹和尖头弹两种弹体, 如图 4 所示.



图 4 实验用弹体照片  
实验结果和计算结果

表 1

编号	弹体质量 $m/\text{kg}$	$H/\text{m}$	$a/\text{m}$	$b/\text{m}$	撞击速度 $v/(\text{m/s})$	侵深(实验) $d_e/\text{m}$	侵深(计算) $d/\text{m}$
02_0001	3.777	0.10	0.031	0.055	763	0.83	0.82
02_0002	3.034	0.07	0.031	0.057	577	0.34	0.38
02_0003	3.747	0.07	0.031	0.057	666	0.56	0.62
02_0004	3.022	0.07	0.031	0.057	538	0.37	0.37
02_0005	3.154	0.07	0.031	0.057	630	0.46	0.41
02_0006	3.133	0.07	0.031	0.057	—	0.48	—

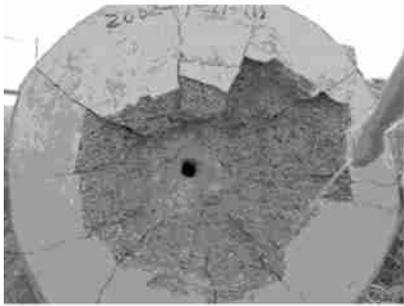


图 5 侵彻后的混凝土靶

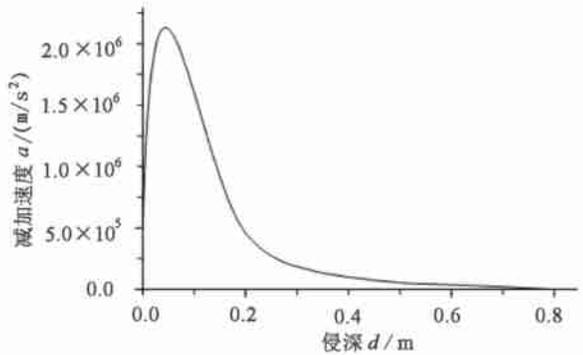


图 6 侵彻过程中减加速度与侵深关系曲线

混凝土的密度是  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ , 极限抗压强度  $\sigma_c = 3.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , 混凝土极限密度  $\rho^* = 2460 \text{ kg/m}^{3/9.10}$ , 表 1 给出了冲击速度  $v$  在  $500 \text{ m/s}$  到  $750 \text{ m/s}$  之间的 6 次实验结果和计算结果.

侵彻后的混凝土靶如图 5 所示. 减加速度和侵深的关系曲线如图 6 所示, 速度和侵深的关系曲线如图 7 所示. 编号为 02\_0001 的实验结果和计算结果如图 8 所示.

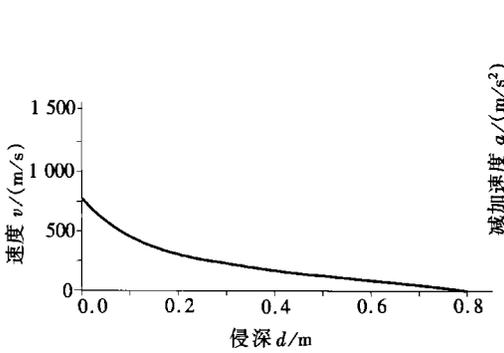


图7 侵彻过程中速度与侵深关系曲线

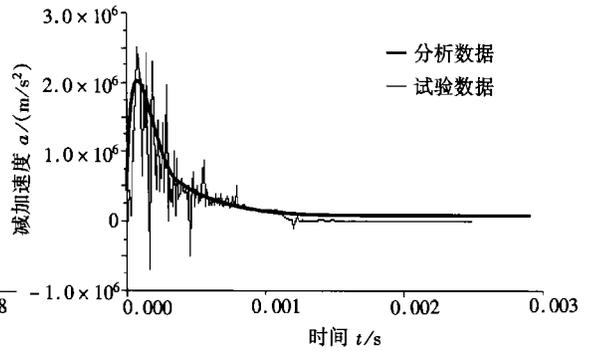


图8 减加速度的实验与计算结果

从结果中可以看出,用本文方法得到的计算结果与实验结果相比取得了较好的一致。

### [参 考 文 献]

- [1] Marc Andre Meyers. Dynamic Behavior of Materials [M]. 605 Third Avenue, NY: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc, 1994.
- [2] Fung Y C. Continuum Mechanics [M]. NJ: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1977.
- [3] Forrestal M S, Luk V k. Dynamic spherical cavity expansion in a compressible elastic-plastic solid[J]. J Appl Mech, 1998, **55**(2): 275—279.
- [4] Forrestal M S, Frew D J, Hanchak S J, et al. Penetration of grout and concrete targets with ogive-nose steel projectiles[J]. Internat J Impact Engng, 1996, **18**(5): 465—476.
- [5] Richard W M, Thomas A D. Finite Cavity expansion method for near-surface effects and layering during earth penetration[J]. Internat J Impact Engng, 2000, **24**(3): 239—258.
- [6] Young C N. Simplified Analytical Model of Penetration With Lateral, Loading User's Guide[M]. SAND98\_0978. Albuquerque N M: Sandia National Laboratory, 1998.
- [7] Kolsky H. Stress Waves in Solids[M]. New York: Dover Publication, 1963.
- [8] Wasley R J. Stress Wave Propagation in Solids[M]. N Y: M Dekker, 1973.
- [9] 高世桥, 刘明杰, 谭惠民. 侵彻弹倾斜侵彻半无限混凝土目标时的动力分析[J]. 兵工学报, 1995, **16**(4): 46—50.
- [10] LIU Hai-peng, GAO Shi-qiao, LI Ke-jie. Measurement technologies and result analysis on experiment of penetration of steel projectile into thick concrete target[A]. In: WEN Ting-dun Ed. Proc of 5th International Symposium of Test and Measurement [C]. Vol 4. Beijing: World Publishing Corporation, 2003, 3339—3342.
- [11] 高世桥, 石庚辰, 谭惠民, 等. 弹引系统以极大着角碰击半无限目标时的动力分析[J]. 北京理工大学学报, 1994, **14**(4): 359—365.
- [12] Holmquist T J, Johnson G R. Computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rate, and high pressures[A]. In: Michael J, Joseph Eds. Proc of 14th International Symposium on Ballistics [C]. USA: American Defense Preparedness Association, 1993, 591—600.

## Normal Expansion Theory for Penetration of a Projectile Against Concrete Target

GAO Shi\_qiao<sup>1</sup>, LIU Hai\_peng<sup>1</sup>, LI Ke\_jie<sup>2</sup>,

HUANG Feng\_lei<sup>1</sup>, JIN Lei<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology,

Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China;

2. School of Electromechanical Engineering, Beijing Institute of Technology,

Beijing 100081, P. R. China

**Abstract:** Based on the equations which describe the dynamic behavior of material under high\_velocity and high\_pressure shock, corresponding equations at shock front whose surface was general space curve surface were established. For concrete material, a normal expansion theory was proposed by which some deceleration about time history of the projectile can be analytically given. This normal expansion theory is not only suitable for spherical and cylindrical\_nose projectile, but also suitable for other general nose projectile, for example conical nose or ogive\_nose. And it is not only suitable for perpendicular shock but also suitable for oblique shock.

**Key words:** projectile; penetration; concrete target; shock wave