

悬臂梁大挠度问题的双参数摄动解*

何晓婷, 陈山林

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

(本刊编委陈山林来稿)

摘要: 利用拟线性分析方法中的一阶导数代换对基本方程进行了简化处理, 将基本的微积分方程转化为非线性代数方程组, 并结合双参数摄动研究了悬臂梁的大挠度问题. 与已有的研究结果比较表明: 将拟线性方法用于研究悬臂梁的大挠度问题, 计算较为简便, 同时又具有良好的精度.

关键词: 悬臂梁; 大挠度; 拟线性; 双参数摄动

中图分类号: O343.5; O39; TB12 文献标识码: A

引 言

钱伟长教授在文献[1]中, 采用双参数摄动研究了图 1 所示的悬臂梁大挠度问题, 用于处理宁波甬江大桥施工弧长计算及桥面坡度等应用问题. 梁的大挠度问题历史上称为欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)问题^[2], 一般情形下, 基本方程是一非线性的微积分方程, 求解困难. 历史上作者们的研究, 大致可分为对于个别简单情形的闭合分析解和基于有限元方法的数值解. 文献[2]通过一阶导数代换, 对基本方程进行简化, 用数值积分或拟线性分析方法处理了梁大挠度的各类问题, 结果精度能满足一般的设计要求. 文献[3]采用文献[2]的方法, 对悬臂梁问题进行了简化处理, 然后用单参数摄动法求解, 其一级近似解与文献[1]一致, 但二级近似解与文献[1]差别较大. 本文在文献[3]的基础上, 采用双参数摄动法重新处理了这一问题, 其二级近似解与文献[1]基本吻合.

1 基本方程和边界条件

用 x 表示水平坐标, $w(x)$ 表示垂直挠度, 于是图 1 所示悬臂梁大挠度问题的基本方程为^[1]

$$\frac{d^2 w / dx^2}{[1 + (dw/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}, \quad (1)$$

式中, EI 为抗弯刚度, $M(x)$ 为弯矩. 图 1 中, q 为竖向荷载, 其余几何参数如图所示. 不失一般性, 设 EI 和 q 为常数. $M(x)$ 若用 $x = 0$ 处的弯矩 M_0 和剪力 Q_0 来表达, 而且假定梁未受水平力作用, 则有

* 收稿日期: 2004_09_11; 修订日期: 2005_12_13

作者简介: 何晓婷(1971—), 女, 汉, 四川邛崃人, 博士研究生(联系人. Tel: + 86_23_65120898; Fax: + 86_23_65123511; E_mail: cinderella711121@yahoo.com.cn).

$$M(x) = M_0 - Q_0x + \int_0^x q(x - \xi) [1 + (dw/d\xi)^2]^{1/2} d\xi \quad (2)$$

式中, M_0 和 Q_0 待定.

边界条件为

$$x = 0: w = 0, dw/dx = 0; x = L: w = H, dw/dx = 0, \quad (3)$$

式中, H 为 A、B 两端高差, L 为水平跨度, 都为已知量.

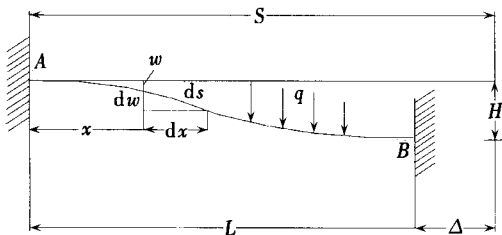


图 1 悬臂梁坐标、荷载及几何参数

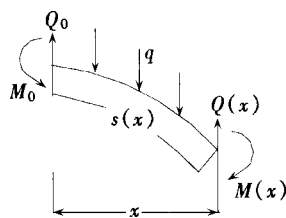


图 2 梁段力与力矩的关系

上述问题是一非线性微分积分方程. (1) 式有两个积分常数, (2) 式中有两个待定的初参数, 由(3)式给出 4 个边界条件, 问题是可以确定的.

2 弯矩 $M(x)$ 和基本方程的简化

在弯矩 $M(x)$ 的表达式(2)中, 第 3 项可以进行如下计算

$$\begin{aligned} \int_0^x q(x - \xi) \left[1 + \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi &= q \int_0^x (x - \xi) ds = \\ q(x - \xi) s(\xi) \Big|_0^x + \int_0^x qs(\xi) d\xi &= q \int_0^x s(\xi) d\xi \end{aligned}$$

因此, (2) 式可表示为

$$M(x) = M_0 - Q_0x + q \int_0^x s(\xi) d\xi. \quad (4)$$

若引入弧长与水平投影之差

$$\Delta(x) = s(x) - x, \quad (5)$$

并代入(4)式中, 则有

$$M(x) = M_0 - Q_0x + \frac{q}{2}x^2 + q \int_0^x \Delta(\xi) d\xi \quad (6)$$

上式中最后的积分项是由于弧长影响而对弯矩产生的修正项.

文献[2]对 $\Delta(x)$ 提出了各种简化方案, 如:

$$\Delta(x) = \text{const}; \quad \Delta(x) = \Delta \frac{x}{L}; \quad \Delta(x) = \Delta \sqrt{\frac{x}{L}}; \quad \Delta(x) = \Delta \sin \frac{\pi x}{2L}, \quad (7)$$

并且指出, 各种近似带来的误差, 约在 3% 左右. 式中, Δ 的定义如下: $\Delta = s(L) - L$, $S = s(L)$, 因此,

$$\Delta = S - L, \quad (8)$$

式中, S 为梁的曲线弧长. 由于 S 未知, 因此本问题中的 Δ 未知.

本文采用(7)式的第 2 种近似, 将其代入(6)式, 可得

$$M(x) = M_0 - Q_0x + \frac{q}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{L} \right) x^2. \quad (9)$$

再将(9)式代入(1)式, 得到基本方程

$$\frac{d^2w/dx^2}{[1+(dw/dx)^2]^{3/2}} = \frac{1}{EI} \left[M_0 - Q_0x + \frac{q}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{L} \right) x^2 \right]. \quad (10)$$

令(10)式右端为 $\lambda(x)$, 积分一次可得

$$\frac{dw/dx}{[1+(dw/dx)^2]^{1/2}} = \int_0^x \lambda(x) dx = \varphi(x), \quad (11)$$

式中

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0x - \frac{Q_0}{2}x^2 + \frac{q}{6} \left(1 + \frac{\Delta}{L} \right) x^3 \right], \quad (12)$$

已经用到边界条件 $x = 0, dw/dx = 0$.

沿用文献[2]的方法,从(11)式中解出 dw/dx ,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}, \quad (13)$$

从0到 x 积分一次,若用边界条件 $x = 0, w = 0$ 可得

$$w(x) = \int_0^x \frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}} dx. \quad (14)$$

将(13)、(14)式代入边界条件(3)的后两式,可得

$$H = \int_0^L \frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}} dx \quad (15)$$

以及

$$\varphi(L) = \frac{1}{EI} \left[M_0L - \frac{Q_0}{2}L^2 + \frac{q}{6} \left(1 + \frac{\Delta}{L} \right) L^3 \right] = 0, \quad (16)$$

由此得到

$$M_0 - \frac{Q_0}{2}L + \frac{q}{6} \left(1 + \frac{\Delta}{L} \right) L^2 = 0, \quad (17)$$

弧长 S 为

$$S = L + \Delta = \int_0^L [1+(dw/dx)^2]^{1/2} dx.$$

将(13)式代入,可得

$$L + \Delta = \int_0^L \frac{1}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}} dx. \quad (18)$$

这样,式(15)、(17)和(18)给出确定待定系数 M_0 、 Q_0 和 Δ 的方程组.

3 M_0 、 Q_0 和 Δ 的计算

(18)式的积分可简化为

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}} dx &= \int_0^L \left[1 + \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{3\varphi^4(x)}{8} + \dots \right] dx \approx \\ &= \int_0^L \left[1 + \frac{\varphi^2(x)}{2} \right] dx = L + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi^2(x) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

将(12)式代入,积分后可求得

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{EI} \right)^2 \left[\frac{1}{6} M_0^2 L^3 - \frac{1}{8} M_0 Q_0 L^4 + \left(\frac{1}{30} M_0 N_0 + \frac{1}{40} Q_0^2 \right) L^5 - \right. \\ \left. \frac{1}{72} Q_0 N_0 L^6 + \frac{1}{504} N_0^2 L^7 \right] = \Delta \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $N_0 = q(1 + \Delta/L)$. (15)式中的积分也可类似简化为

$$\int_0^L \frac{\varphi(x)}{[1 - \varphi^2(x)]^{1/2}} dx = \int_0^L \varphi(x) \left[1 + \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{3\varphi^4(x)}{8} + \dots \right] dx \approx \int_0^L \left[1 + \frac{\varphi^2(x)}{2} \right] \varphi(x) dx = \int_0^L \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi^3(x) dx. \quad (21)$$

将(12)式代入, 积分后可求得

$$\left(\frac{1}{EI} \right) \left[\frac{1}{2} M_0 L^2 - \frac{1}{6} Q_0 L^3 + \frac{1}{24} N_0 L^4 \right] + \left(\frac{1}{EI} \right)^3 \left[\frac{1}{8} M_0^3 L^4 - \frac{3}{20} M_0^2 Q_0 L^5 \right] + \left(\frac{1}{EI} \right)^3 \left[\frac{1}{24} M_0^2 N_0 + \frac{1}{16} M_0 Q_0^2 \right] L^6 - \left[\frac{1}{28} M_0 Q_0 N_0 + \frac{1}{112} Q_0^3 \right] L^7 + \left(\frac{1}{EI} \right)^3 \left[\frac{1}{192} M_0 N_0^2 + \frac{1}{128} Q_0^2 N_0 \right] L^8 - \frac{1}{432} Q_0 N_0^2 L^9 + \frac{1}{4320} N_0^3 L^{10} = H, \quad (22)$$

其中, N_0 和上面一致. 方程(17)、(20)和(22)是确定 M_0 、 Q_0 和 Δ 的3个非线性代数方程.

为了便于求解, 与文献[1]一致, 引入下列无量纲量:

$$m_0 = \frac{M_0 L}{EI}, \quad \Omega_0 = \frac{Q_0 L^2}{EI}, \quad \alpha = \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI}, \quad \beta = 6 \frac{H}{L}, \quad (23)$$

分别代入方程(17)、(20)和(22), 于是方程组简化为

$$m_0 - \frac{1}{2} \Omega_0 + 2n_0 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{6} m_0^2 - \frac{1}{8} m_0 \Omega_0 + \frac{2}{5} m_0 n_0 + \frac{1}{40} \Omega_0^2 - \frac{1}{6} \Omega_0 n_0 + \frac{2}{7} n_0^2 = \frac{\Delta}{L}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} m_0 - \frac{1}{6} \Omega_0 + \frac{1}{2} n_0 + \frac{1}{8} m_0^3 - \frac{3}{20} m_0^2 \Omega_0 + \frac{1}{2} m_0 n_0 + \frac{1}{16} m_0 \Omega_0^2 - \frac{3}{7} m_0 \Omega_0 n_0 - \frac{1}{112} \Omega_0^3 + \frac{3}{4} m_0 n_0^2 + \frac{3}{32} \Omega_0^2 n_0 - \frac{1}{3} \Omega_0 n_0^2 + \frac{2}{5} n_0^3 = \frac{\beta}{6}, \quad (26)$$

其中, $n_0 = (1 + \Delta/L) \alpha$. 3个方程中的未知量分别是 m_0 、 Ω_0 和 n_0 (或 Δ).

4 m_0 、 Ω_0 和 n_0 的双参数摄动解

参考文献[1], 把未知量 m_0 、 Ω_0 和 n_0 按双参数 α 、 β 展开, 取到二级近似解, 有

$$\begin{cases} m_0 = m_1 \alpha + m_2 \beta + m_3 \alpha^3 + m_4 \alpha^2 \beta + m_5 \alpha \beta^2 + m_6 \beta^3, \\ \Omega_0 = \Omega_1 \alpha + \Omega_2 \beta + \Omega_3 \alpha^3 + \Omega_4 \alpha^2 \beta + \Omega_5 \alpha \beta^2 + \Omega_6 \beta^3, \\ n_0 = n_1 \alpha + n_2 \beta + n_3 \alpha^3 + n_4 \alpha^2 \beta + n_5 \alpha \beta^2 + n_6 \beta^3, \end{cases} \quad (27)$$

其中, m_i 、 Ω_i 和 n_i ($i = 1, 2$) 是一级近似解, 而 m_i 、 Ω_i 和 n_i ($i = 3, 4, 5, 6$) 是二级近似解. 注意到 $n_0 = (1 + \Delta/L) \alpha$, 因此 $n_2 = n_6 = 0$, n_0 的展开式可简化为

$$n_0 = n_1 \alpha + n_3 \alpha^3 + n_4 \alpha^2 \beta + n_5 \alpha \beta^2, \quad (28)$$

同时,

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{n_0}{\alpha} - 1 = (n_1 - 1) + n_3 \alpha^2 + n_4 \alpha \beta + n_5 \beta^2. \quad (29)$$

将 m_0 、 Ω_0 和 n_0 的展开式代入式(24), 按 α 、 β 的一次项和三次项整理得

$$\text{项 } \alpha: \quad m_1 - \frac{1}{2} \Omega_1 + 2n_1 = 0, \quad (24a)$$

$$\text{项 } \beta: \quad m_2 - \frac{1}{2} \Omega_2 = 0, \quad (24b)$$

$$\text{项 } \alpha^3: \quad m_3 - \frac{1}{2} \Omega_3 + 2n_3 = 0, \quad (24c)$$

$$\text{项 } \alpha^2\beta: m_4 - \frac{1}{2}\Omega_4 + 2n_4 = 0, \quad (24d)$$

$$\text{项 } \alpha\beta^2: m_5 - \frac{1}{2}\Omega_5 + 2n_5 = 0, \quad (24e)$$

$$\text{项 } \beta^3: m_6 - \frac{1}{2}\Omega_6 = 0. \quad (24f)$$

将 m_0 、 Ω_0 和 n_0 的展开式代入式(25), 结合式(29), 按常数项, α 、 β 的二次项整理得

$$\text{常数项: } n_1 - 1 = 0, \quad (25a)$$

$$\text{项 } \alpha^2: \frac{1}{6}m_1^2 - \frac{1}{8}m_1\Omega_1 + \frac{2}{5}m_1n_1 + \frac{1}{40}\Omega_1^2 - \frac{1}{6}\Omega_1n_1 + \frac{2}{7}n_1^2 = n_3, \quad (25b)$$

$$\text{项 } \alpha\beta: \frac{1}{3}m_1m_2 - \frac{1}{8}(m_1\Omega_2 + m_2\Omega_1) + \frac{2}{5}m_2n_1 + \frac{1}{20}\Omega_1\Omega_2 - \frac{1}{6}\Omega_2n_1 = n_4, \quad (25c)$$

$$\text{项 } \beta^2: \frac{1}{6}m_2^2 - \frac{1}{8}m_2\Omega_2 + \frac{1}{40}\Omega_2^2 = n_5. \quad (25d)$$

将 m_0 、 Ω_0 和 n_0 的展开式代入(26) 式, 按 α 、 β 的一次项和三次项整理得

$$\text{项 } \alpha: \frac{1}{2}m_1 - \frac{1}{6}\Omega_1 + \frac{1}{2}n_1 = 0, \quad (26a)$$

$$\text{项 } \beta: \frac{1}{2}m_2 - \frac{1}{6}\Omega_2 = \frac{1}{6}, \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} \text{项 } \alpha^3: \frac{1}{2}m_3 - \frac{1}{6}\Omega_3 + \frac{1}{2}n_3 + \frac{1}{8}m_1^3 - \frac{3}{20}m_1^2\Omega_1 + \frac{1}{2}m_1^2n_1 + \frac{1}{16}m_1\Omega_1^2 - \\ \frac{3}{7}m_1\Omega_1n_1 - \frac{1}{112}\Omega_1^3 + \frac{3}{4}m_1n_1^2 + \frac{3}{32}\Omega_1^2n_1 - \frac{1}{3}\Omega_1n_1^2 + \frac{2}{5}n_1^3 = 0, \end{aligned} \quad (26c)$$

$$\begin{aligned} \text{项 } \alpha^2\beta: \frac{1}{2}m_4 - \frac{1}{6}\Omega_4 + \frac{1}{2}n_4 + \frac{3}{8}m_1^2m_2 - \frac{3}{20}(m_1^2\Omega_2 + 2m_1m_2\Omega_1) + m_1m_2n_1 + \\ \frac{1}{16}(m_2\Omega_1^2 + 2m_1\Omega_1\Omega_2) - \frac{3}{7}(m_2\Omega_1n_1 + m_1\Omega_2n_1) - \frac{3}{112}\Omega_1^2\Omega_2 + \\ \frac{3}{4}m_2n_1^2 + \frac{3}{16}\Omega_1\Omega_2n_1 - \frac{1}{3}\Omega_2n_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (26d)$$

$$\begin{aligned} \text{项 } \alpha\beta^2: \frac{1}{2}m_5 - \frac{1}{6}\Omega_5 + \frac{1}{2}n_5 + \frac{3}{8}m_1m_2^2 - \frac{3}{20}(m_2^2\Omega_1 + 2m_1m_2\Omega_2) + \frac{1}{2}m_2^2n_1 + \\ \frac{1}{16}(m_1\Omega_2^2 + 2m_2\Omega_1\Omega_2) - \frac{3}{7}m_2\Omega_2n_1 - \frac{3}{112}\Omega_1\Omega_2^2 + \frac{3}{32}\Omega_2^2n_1 = 0, \end{aligned} \quad (26e)$$

$$\text{项 } \beta^3: \frac{1}{2}m_6 - \frac{1}{6}\Omega_6 + \frac{1}{8}m_2^3 - \frac{3}{20}m_2^2\Omega_2 + \frac{1}{16}m_2\Omega_2^2 - \frac{1}{112}\Omega_2^3 = 0. \quad (26f)$$

下面由式(24a~ f)、(25a~ d) 和(26a~ f) 共 16 个方程求解 m_i 、 Ω_i ($i = 1, \dots, 6$) 和 n_i ($i = 1, 3, 4, 5$) 共 16 个未知量。

首先由式(25a) 知 $n_1 = 1$, 代入式(24a)、(26a) 有

$$m_1 - \frac{1}{2}\Omega_1 + 2 = 0; m_1 - \frac{1}{3}\Omega_1 + 1 = 0, \quad (30)$$

从而求得 $m_1 = 1$, $\Omega_1 = 6$. 由式(24b)、(26b) 有

$$m_2 - \frac{1}{2}\Omega_2 = 0; m_2 - \frac{1}{3}\Omega_2 - \frac{1}{3} = 0, \quad (31)$$

从而求得 $m_2 = 1$, $\Omega_2 = 2$. 将 m_1 、 m_2 、 Ω_1 、 Ω_2 的值代入式(25b, c, d), 解出

$$n_3 = \frac{1}{420}, n_4 = 0, n_5 = \frac{1}{60}. \quad (32)$$

由式(24c)、(26c) 有

$$m_3 - \frac{1}{2}\Omega_3 + \frac{1}{210} = 0; m_3 - \frac{1}{3}\Omega_3 + \frac{1}{420} = 0, \quad (33)$$

从而求得 $m_3 = 1/420$, $\Omega_3 = 1/70$. 由式(24d)、(26d)有

$$m_4 - \frac{1}{2} \Omega_4 = 0; \quad m_4 - \frac{1}{3} \Omega_4 + \frac{1}{420} = 0, \quad (34)$$

从而求得 $m_4 = -1/140$, $\Omega_4 = -1/70$. 由式(24e)、(26e)有

$$m_5 - \frac{1}{2} \Omega_5 + \frac{1}{30} = 0; \quad m_5 - \frac{1}{3} \Omega_5 + \frac{1}{60} = 0, \quad (35)$$

从而求得 $m_5 = 1/60$, $\Omega_5 = 1/10$. 由式(24f)、(26f)有

$$m_6 - \frac{1}{2} \Omega_6 = 0; \quad m_6 - \frac{1}{3} \Omega_6 + \frac{1}{140} = 0, \quad (36)$$

从而求得 $m_6 = -3/140$, $\Omega_6 = -3/70$.

至此, m_i 、 Ω_i 和 n_i ($i = 1, \dots, 6$) 共 18 个未知量全部求得.

5 结果比较和结论

选取文献[1]给出的若干主要系数, 将本文结果与文献[1]、[3]结果进行比较.

1) 桥梁弧长与河宽之比

文献[1]:

$$\frac{S}{L} = 1 + \frac{1}{420} \alpha^2 + \frac{1}{60} \beta^2; \quad (37)$$

文献[3]:

$$\frac{S}{L} = 1 + \frac{1}{60} \beta^2; \quad (38)$$

本文:

$$\frac{S}{L} = n_1 + n_3 \alpha^2 + n_5 \beta^2 = 1 + \frac{1}{420} \alpha^2 + \frac{1}{60} \beta^2. \quad (39)$$

式(37)已改用本文符号表示. 文献[3]由于采用单参数摄动, 缺少由荷载 q 所引起的 α 项的影响, 而只有高差引起的弧长增量一项. 本文结果与文献[1]完全一致.

2) 设计参量 m_0 , Ω_0

文献[1]:

$$m_0 = \alpha + \beta + \frac{1}{420} \alpha^3 - \frac{1}{420} \alpha^2 \beta + \frac{3}{140} \alpha \beta^2 - \frac{3}{140} \beta^3, \quad (40)$$

$$\Omega_0 = 6\alpha + 2\beta + \frac{1}{70} \alpha^3 + \frac{1}{42} \alpha^2 \beta + \frac{1}{10} \alpha \beta^2 - \frac{3}{70} \beta^3; \quad (41)$$

文献[3]:

$$m_0 = \alpha + \beta + \frac{\alpha \beta^2}{60}; \quad \Omega_0 = 6\alpha + 2\beta + \frac{\alpha \beta^2}{10}; \quad (42)$$

本文:

$$m_0^* = \alpha + \beta + \frac{1}{420} \alpha^3 - \frac{1}{140} \alpha^2 \beta + \frac{1}{60} \alpha \beta^2 - \frac{3}{140} \beta^3, \quad (43)$$

$$\Omega_0^* = 6\alpha + 2\beta + \frac{1}{70} \alpha^3 - \frac{1}{70} \alpha^2 \beta + \frac{1}{10} \alpha \beta^2 - \frac{3}{70} \beta^3. \quad (44)$$

文献[3]的二级近似解与文献[1]比较少了3项, 这是由于单参数摄动所引起的误差. 本文的二级近似解与文献[1]二级近似解比较, m_0^* 与 m_0 有两项系数差别, Ω_0^* 与 Ω_0 仅有一项差别, 明显改进了文献[3]的结果, 与文献[1]的结果基本一致.

由以上分析比较可知: 采用拟线性法结合双参数摄动能较为方便地求得悬臂梁大挠度问

题的近似解. 由单参数摄动求得的二级近似解, 其解的结构并不完整, 与文献[1]差别较大; 而双参数摄动其二级近似解结构完整, 与文献[1]基本吻合. 本文在对弯矩的简化过程中, 引入了 $\Delta(x) = \Delta(x/L)$ 这一假设, 但是, 由此引起的误差应在设计允许的误差范围内^[2]. 从求解过程看, 本文的双参数摄动直接对确定未知量的非线性代数方程组进行, 摄动过程较为简单, 这是本文方法的一点意义.

[参 考 文 献]

- [1] 钱伟长. 宁波甬江大桥的大挠度非线性计算问题[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(5): 441—451.
- [2] Fertis D G. Nonlinear Mechanics [M]. US: CRC Press LLC, 1999.
- [3] 何晓婷, 陈山林. 悬臂梁大挠度问题的摄动解[J]. 重庆建筑大学学报, 2003, 25(6): 46—51.
- [4] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques [M]. US: John Wiley & Sons, 1981.
- [5] Nayfeh A H. Problems in Perturbation [M]. US: John Wiley & Sons, 1985.
- [6] Fertis D G, Afonta A O. Equivalent systems for large deformation of beams of any stiffness variation [J]. Eur J Mech A/ Solid, 1991, 10(3): 265.
- [7] Frisch-Fay R. Flexible Bars [M]. Washington, D C: Butterworth, 1962.
- [8] Gere J M, Timoshenko S P. Mechanics of Materials [M]. 3rd Ed. Boston: PWS_Kent, 1990, 514.

Biparametric Perturbation Solutions of the Large Deflection Problem of Cantilever Beams

HE Xiao_ting, CHEN Shan_lin

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: The large deflection problem of cantilever beams was studied by means of the biparametric perturbation method and the first order derivative substitution from pseudolinear analysis approach. This kind of substitution can transform the basic equation, an integral differential equation into a non-linear algebraic ones thus simplify computational process. Compared with the present results, it indicates that the large deflection problem solved by using pseudolinear analysis can lead to simple and precise results.

Key words: cantilever beam; large deflection; pseudolinear; biparametric perturbation