

文章编号: 1000-0887(2006)03-0365-07

变化底部对非线性表面波的影响^{*}

吴正人, 程友良, 王松岭, 吕玉坤

(华北电力大学 能源与动力工程学院, 河北 保定 071003)

(戴世强推荐)

摘要: 考虑表面张力的作用, 研究了不可压缩、无粘性流体流过变化壁面时的共振流动, 分析了不同的底部壁面变化对非线性表面波的影响。在导出非线性表面波遵循的 fKdV 方程后, 利用拟谱方法进行数值模拟, 用 Matlab 软件绘制瀑布图, 由此得出结论: 上凸底部上的波可以看成是向前凸台阶和向后凸台阶分别向前后散射发展的结果, 二者不发生相互作用; 下凹壁面的波形是向前凹台阶和向后凹台阶相互作用的结果; 某些组合式底部的波形是上凸和下凹相互作用的结果。

关键词: 变化底部; 孤立波; 共振流动; fKdV 方程; 拟谱方法; 瀑布图

中图分类号: O351.3 **文献标识码:** A

引 言

不同的变化壁面对流体流动中非线性表面波的影响, 不仅与物理海洋学、大气物理学等有关, 而且与热能工程及工程热物理学也有紧密的联系。在许多工业领域中, 波动对传热、传质等也有很大的影响^[1~3]。

Kapitza^[1]对小振幅正弦形波动底部对层流换热的影响进行了分析, 指出波动使得液膜的有效厚度减薄, 且增强了换热。Akylas^[4]指出, 在接近共振的情况下, 可以利用强迫 Boussinesq 方程或 KdV 方程来描述由底部障碍物引发的表面波。Wang^[5]在研究液膜缓慢流过波状倾斜板时发现, 表面波的振幅依赖于表面张力以及板上波纹的波长和方向。Davis^[6]认为在波纹状底部和表面波之间会存在一种 Bragg 共振现象, 该现象与波能的反射紧密相关。Zhang 和 Chwang^[7]从欧拉方程出发, 利用有限差分方法研究了底部对表面波的影响。Yoshimasa Nonaka^[8]认为当非线性波在不平地形上运动时, 振幅控制方程是 fKdV 方程, 此时孤立波的运动速度是随着底部壁面的变换而变化的。朱勇^[9]研究了下凹地形上的共振情况, 并给出了几种流动情况下的数值结果。因这些研究的侧重点不同, 故没有全面研究共振时不同壁面对波的影响, 比如基底波动方面。同时, 使用的研究方法也不尽相同, 利用拟谱方法和 Matlab 软件的结合来全面研究共振时不同底部对非线性波影响的结果还不多见。

本文考虑了有表面张力存在的情况下, 不可压缩、无粘性流体在不同底部上的共振流动,

* 收稿日期: 2003_12_13; 修订日期: 2005_12_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272044); 教育部博士点基金资助项目(20040079004)

作者简介: 吴正人(1973—), 男, 辽宁大连人, 博士(联系人。Tel: + 86_312_7522376; Fax: + 86_312_5023027; E_mail: zhengren_wu@yahoo.com.cn)。

利用拟谱方法和 Matlab 软件结合研究了非线性表面波受变化底部的影响。

1 控制方程与计算方法

这里考虑不可压缩、无粘性流体的二维运动, 存在基本流动, 且有表面张力的作用。模型如下

引进速度势 $\phi(x, y, t)$, 则控制方程和边界条件如下

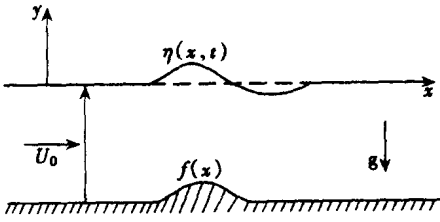


图 1 流动模型

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, f(x) < y < \eta(x, t), \tag{1a}$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_y = 0, y = \eta(x, t), \tag{1b}$$

$$\begin{cases} \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_y^2)/2 + g\eta - \\ \sigma \eta_{xx}^2 (1 + \eta_x^2)^{-3/2} / \rho = 0, \\ y = \eta(x, t), \end{cases} \tag{1c}$$

$$\phi = f_x \phi_x, y = f(x), \tag{1d}$$

其中 η 是自由表面的函数, $f(x)$ 是底部函数, σ 为表面张力系数, ρ 是流体的密度, 而 U_0 是基本流均匀流速。引进如下的变换和无量纲变量

$$\varphi = \phi - U_0 x + \frac{1}{2} U_0^2 t, x^* = \frac{x}{l}, y^* = \frac{y}{h_0}, \sigma^* = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2}, t^* = \frac{c_0 t}{l},$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{a}, f^* = \frac{f}{h_0}, \varphi^* = \frac{c_0 \varphi}{g l a}, F = \frac{U_0}{c_0},$$

这里 l 是水平特征长度; a 为特征自由表面垂直波幅; h_0 为特征流体平均深度; c_0 是线性特征波速 ($c_0 = \sqrt{g h_0}$)。则方程(1a)~(1d)可转化为下面的形式(省略了星号*)。

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, f(x) < y < \eta(x, t), \tag{2a}$$

$$\eta_t + (F + \alpha \varphi_x) \eta_x - \beta^2 \varphi_y = 0, y = \eta(x, t), \tag{2b}$$

$$\begin{cases} \varphi_t + \frac{1}{2} \alpha \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 \varphi_y^2 + F \varphi_x + \eta - \beta^2 \sigma \eta_{xx}^2 (1 + \alpha^2 \beta^2 \eta_x^2)^{-3/2} = 0, \\ y = \eta(x, t), \end{cases} \tag{2c}$$

$$\varphi_y = \alpha^{-1} \beta^2 f_x (F + \alpha \varphi_x), y = f(x), \tag{2d}$$

其中 $\alpha = a/h_0, \beta = h_0/l$ 分别度量非线性性和色散效应。这里仅考虑弱非线性和弱色散效应, 则 α 和 β 都为小量。并假定底部变化缓慢。设 $f(x) = -1 + \gamma g(x)$, 其中, $g(x)$ 是连续函数, γ 是小量。并令 $F = 1 + \Delta \varepsilon$ 其中 ε 是小量, Δ 是一个决定流动状态的常数, $\Delta = 0$ 为精确的共振状态。对于 KdV 系统, 非线性和色散效应的平衡要求 $\alpha = \beta^2$, 而对于典型的共振强迫系统则有 $\alpha = \gamma^{1/2}$ 。引进新时间尺度 $\tau = \alpha t$ 。将 φ 和 η 依 α 展开。

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \dots,$$

$$\eta = \eta_0 + \alpha \eta_1 + \alpha^2 \eta_2 + \dots,$$

将展开式和变换边界条件代入方程(2a)~(2d), 令小量 α 同次幂的系数相等, 可以得到各阶方程的定解问题。

在 0 阶, 方程的定解问题为

$$\varphi_{0y} = 0, f(x) < y < \eta(x, t), \tag{3a}$$

$$\varphi_{0y}(x, \eta_0) = 0, y = \eta(x, t), \tag{3b}$$

$$\frac{1}{2} \varphi_{0x}^2(x, \eta_0) + \varphi_{0x}(x, \eta_0) + \eta_0 = 0, y = \eta(x, t), \tag{3c}$$

$$\varphi_{0y}(x, -1) = 0, \quad y = -1, \quad (3d)$$

求解可得

$$\varphi_{0y} = 0, \quad f(x) < y < \eta(x, t), \quad (4a)$$

$$\varphi_{0x} = -\eta_0, \quad y = \eta(x, t). \quad (4b)$$

在一阶, 方程的定解问题为

$$\varphi_{0xx} + \varphi_{1yy} = 0, \quad f(x) < y < \eta(x, t) \quad (5a)$$

$$\eta_{0x} - \varphi_{1y}(x, \eta_0) - \varphi_{0yy}(x, \eta_0)\eta_1 = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (5b)$$

$$\eta_{0\tau} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}\varphi_{1y} + \varphi_{0y}\varphi_{0yy}\eta_1 + \varphi_{1x} + \varphi_{0xy}\eta_1 - \tau\eta_{0xx} = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (5c)$$

$$\varphi_{1y}(x, -1) = 0, \quad y = -1, \quad (5d)$$

求解得

$$\varphi_1 = -\varphi_{0xx} \left[\frac{1}{2}y^2 + y \right], \quad (6a)$$

$$\varphi_{1y}(x, \eta_0) = \eta_{0x}. \quad (6b)$$

由上面的式子可以得到可解性条件

$$\eta_{0x}\eta_1 = 0. \quad (7)$$

在二阶, 可以得到如下的方程

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{2yy} = 0, \quad f(x) < y < \eta(x, t), \quad (8a)$$

$$\eta_{0\tau} + \eta_{1x} + \Delta\eta_{0x} + \varphi_{0x}\eta_{0x} - \varphi_{2y} - \varphi_{1yy}\eta_1 - \varphi_{0yy}\eta_2 - \frac{1}{2}\varphi_{0yy}\eta_1^2 = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (8b)$$

$$\begin{cases} \varphi_{1\tau} + \varphi_{0y}\eta_1 + \frac{1}{2}\varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{1y}^2 + \varphi_{2x} + \varphi_{1xy} + \Delta\varphi_{1x} + \eta_2 - \sigma\eta_{1xx} = 0, \\ y = \eta(x, t), \end{cases} \quad (8c)$$

$$\varphi_{2y} = g_x, \quad y = -1. \quad (8d)$$

由式子(8a)和(8c)可以得到

$$\varphi_2 = \varphi_{0xxxx} \left[\frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{3}y \right] + g_x y, \quad (9)$$

于是, 得到可解性条件

$$\begin{aligned} & -2\eta_{0\tau} + 2\eta_0\eta_{0x} + \eta_{0xxx} \left[\eta_0 - \frac{1}{6}\eta_0^3 + \frac{1}{3} - \sigma \right] - 2\Delta\eta_{0x} + g_x + \\ & \eta_{0x} \left[-\varphi_{0\tau} - \frac{1}{2}\eta_0^2 - \eta_{0xx} \left[\frac{1}{2}\eta_0^2 + \eta_0 \right] + \Delta\eta_0 + \sigma\eta_{0xx} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由可解性条件(7)和(10)可得到如下的方程

$$-(\eta_{0\tau} + \Delta\eta_{0x}) + \frac{3}{2}\eta_0\eta_{0x} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \sigma \right] \eta_{0xxx} + \frac{1}{2}g_x = 0, \quad (11)$$

该方程即为考虑底部作用时的 $kKdV$ 方程。当不考虑表面张力时, 上述方程退化为通常的 $kKdV$ 方程。若不考虑地形的变化而考虑表面张力的作用, 则可得相应的 KdV 方程。

为了讨论方程(11)的解, 引进下列无量纲变量(这里 δ 是一任意的正常数)

$$\begin{aligned} A^*(x^*, T^*) &= \frac{3}{2\delta}\eta_0(x, t), \quad x^* = x \sqrt{\frac{2\delta}{\sigma - 1/3}}, \quad T^* = \delta \sqrt{\frac{2\delta}{\sigma - 1/3}}, \\ \Delta^* &= \frac{\Delta}{\delta}, \quad G(x) = \frac{3}{4\delta^2}g(x), \end{aligned}$$

则方程(11)化为(省略了*号)

$$-(A_T + \Delta A_x) + AA_x - A_{xxx} + G_x = 0, \tag{12}$$

这里, A 表示表面波的振幅, G 代表壁面函数(即强迫力), 通常采用如下几种形式

$$G = G_0 \exp[-\theta^2(x - x_0)^2], \quad G = \pm \frac{G_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right], \quad G = G_0 = \operatorname{sech}^2 x,$$

其中, G_0 代表底部障碍物的最大高度, G 的正负分别对应强迫力的极性以及孤立波的极性. x_0 代表强迫力的中心位置. 本文中计算的壁面函数采用的是指数函数形式, 其中 θ 表示强迫力的大小.

根据壁面函数 G 的不同变化情况, 利用拟谱方法^[10,11]求解 \mathbb{KdV} 方程, 在时间方向上利用二阶精度的蛙跳格式的差分格式; 在空间上采用谱离散, 即采用傅立叶变换方法. 这样, 各种对 x 的导数在转换后具有了代数形式. 该方法可以解决许多与波动有关的问题: 孤立波的相互作用; 波的破碎; 非线性波列的不稳定性等, 还可以用来求解带积分项的非线性方程. 我们在具体应用过程中修改了计算蛙跳格式时采用 $Lax_Wendroff$ 格式的传统方法, 并利用了“混合作用”处理傅立叶变换中出现复数的问题, 本文利用 Matlab 软件编制数值模拟程序进行计算, 并绘制瀑布图. 由瀑布图可以看出非线性波受壁面的影响结果, 由此分析壁面变化对表面波的影响.

2 模拟结果及分析

利用不同的底部壁面作为强迫力, 得到的瀑布图 2

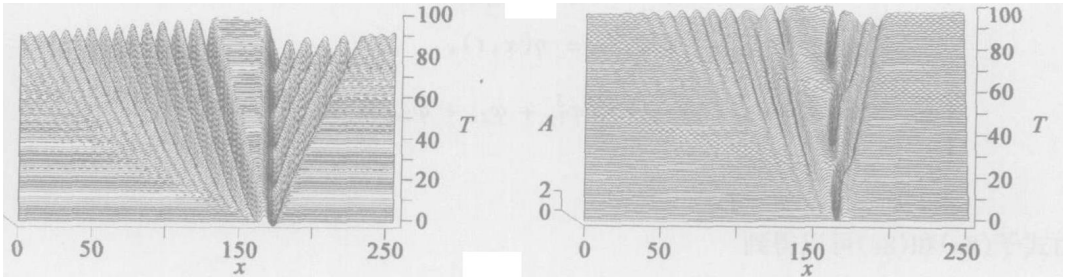


图 2(a) 上凸壁面

图 2(b) 下凹壁面

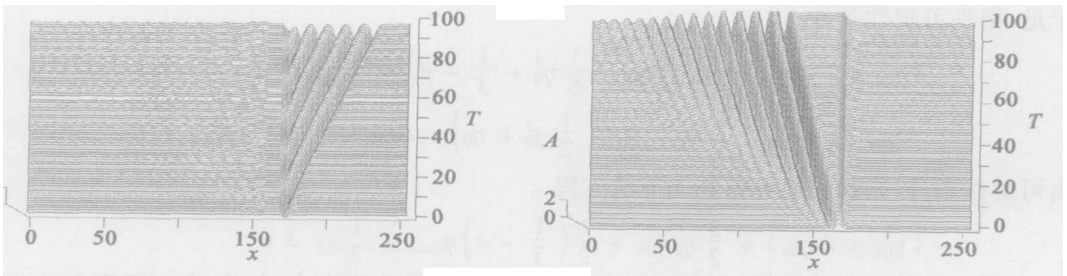


图 2(c) 向后上凸台阶

图 2(d) 向前上凸台阶

从图中可以看到, 当壁面上凸时, 表面波由一个上游的色散波串、一个上凸波串和一个下游下凹的孤立波串组成(图 2(a)), 同时可以看到, 波形也出现了周期性(图 2(a)和图 2(h)), 这应该和计算中采用的周期有关. 而对于下凹壁面, 表面波与上凸壁面所产生的波虽然从整体上看相差不多, 也是由上游色散波串、上凸波串和下游孤立波串组成, 但是表面却发生了很大的变化. 上凸区域不是十分平坦, 不平坦处出现在与孤立波结合处, 孤立波区域出现了扭曲的

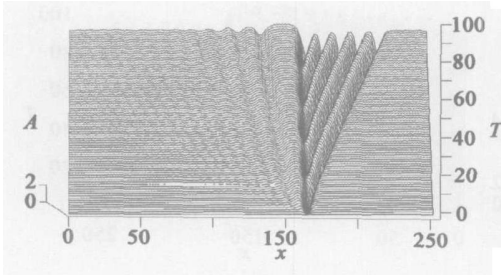


图 2(e) 向后下凹台阶的波形

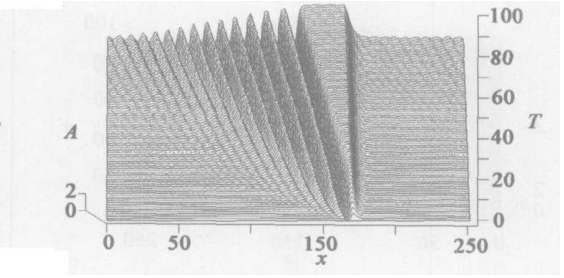


图 2(f) 向前下凹台阶的波形

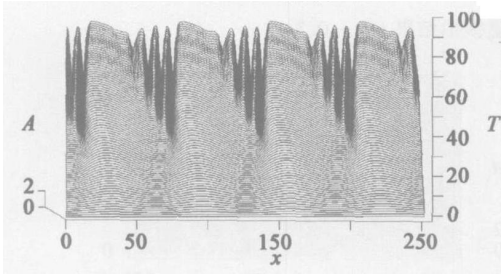


图 2(g) 周期性壁面(正弦壁面)

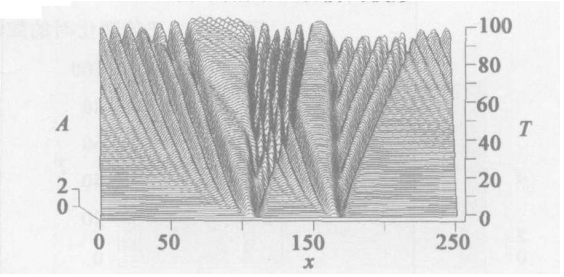


图 2(h) 两个凸壁面的组合体

图 2 使用不同壁面作为强迫力时的模拟结果

现象,同时可以看出孤立波的生成周期相对较长(图 2(b)),这与 Wu^[12]的结论相吻合。同时由模拟结果可知,随着下凹宽度的增加,下游产生的孤立波个数也多,这与朱勇^[9]得到的结论相同。

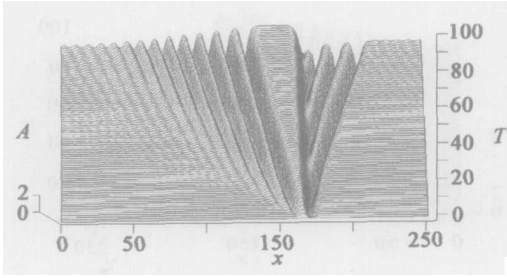
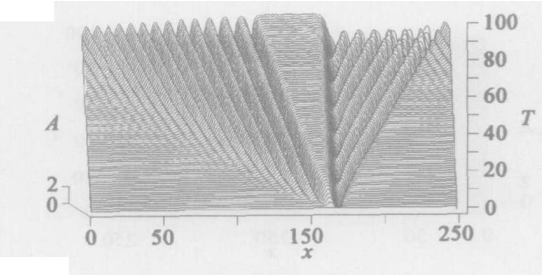
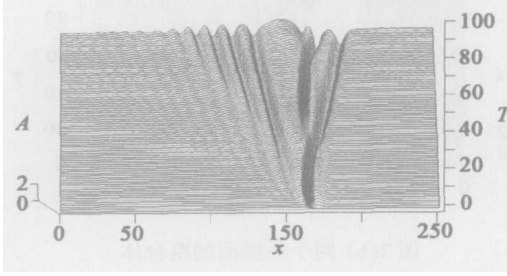
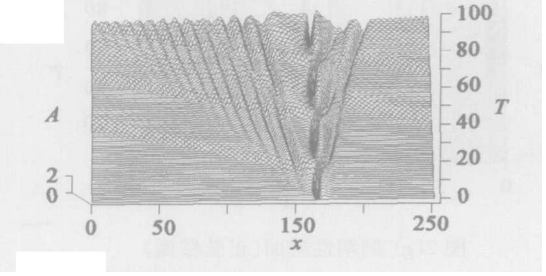
对于上凸壁面,可以看成是前向部分(向前上凸台阶)和后向部分(向后上凸台阶)所组成,由这两部分分别作用形成的表面波系分别向上游和下游发展,彼此之间没有相互作用(图 2(c)、图 2(d))。所以上凸壁面对表面波的影响可以看成是其前向部分和后向部分对表面波影响的叠加(由图 2(a)和图 2(c)、图 2(d)的比较可以看出),与已有的结论一致^[7]。而对于下凹壁面,也可以看成是前向部分(向前下凹台阶)和后向部分(向后下凹台阶)的组成,但各部分对表面波的影响却完全不同于上凸壁面,其前半部分和后半部分各自形成的波是相互作用的(图 2(e)、图 2(f)),最终导致了下凹壁面产生的波形表面会出现扭曲现象。

对于其它类型的壁面:正弦壁面;两个上凸组合成的壁面;一个上凸与一个下凹组合成的壁面;中间部分是周期变化的壁面等,结构上都可以看成是几个简单的上凸和下凹壁面的组合,但是,由于其中不同部分作用结果的相互作用,最终的表面波不能简单看成是分别作用的叠加(图 2(g)、图 2(h)),并且表面的变化会随着时间的变化越来越剧烈,波形和强迫力的中心位置也紧密相关。

G_0 值的大小对表面波有很大的影响, G_0 变化数值时得到的结果如图 3 和图 4 所示。

从图 3 中可以看出,当 $G_0 = 0.3$ 的时候,基本波形保持不变(与图 2(a))相比, $G_0 = 0.5$,只是下游孤立波的数目减少,上游的色散区域也相对变小,同时,上凸的宽度减小。当 $G_0 = 0.8$ 的时候,情况恰恰相反,孤立波的数目增多,色散区域变大,并且随着时间的推移,孤立波区域出现了不稳定趋势,孤立波出现了破碎的现象,该现象需要进一步实验验证。这可能是由于随着 G_0 的增加,非线性与色散效应难以保证平衡的缘故。

由数值模拟结果可知,当 G_0 变化时,孤立波和色散波的振幅也将相应发生变化。从图 4

图 3(a) $G_0 = 0.3$ 图 3(b) $G_0 = 0.8$ 图 3 G_0 正值变化时的数值模拟结果 ($\theta = 0.3$)图 4(a) $G_0 = -0.3$ 图 4(b) $G_0 = -0.8$ 图 4 G_0 负值变化时的数值模拟 ($\theta = 0.3$)

中可见,随着 $|G_0|$ 的变大,表面出现了很大的波动。随着时间的推移,出现了几个“临界值”,并且 $|G_0|$ 变大的时候,孤立波的生成周期也变小。

3 结 论

本文研究了表面张力存在的情况下,不可压缩、无粘性流体在不同底部上的共振流动,得出了变化壁面对非线性表面波的影响。在导出非线性表面波遵循的 $kKdV$ 方程后,利用拟谱方法进行数值模拟,其中修改了计算蛙跳格式时采用 Lax_Wendroff 格式的传统方法,并利用了“混合作用”处理傅立叶变换中出现复数的问题,最后用 Matlab 软件绘制瀑布图,由瀑布图可以看出波受壁面的影响结果。得到的有些结论和典型的结论相同,有些已经得到了实验的验证,同时新的发现也有待进一步验证。基底波动对表面波影响的研究将另文发表。

致谢 感谢与美国科罗拉多大学应用数学研究所 Bengt. Fornberg 教授的有益探讨。

[参 考 文 献]

- [1] Kapitza P L, Kapitza S P. Wave flow of thin layers of a viscous fluid[A]. In: Haar D Ter Ed. Collected Papers of P L Kapitza (Vol. II)[C]. New York: The Macmillan Company, 1964, 662—709.
- [2] 蒋章焰,马同泽,赵嘉琅,等.垂直管外降落液膜的流动和传热特性[J].工程热物理学报,1988,9(1):70—74.
- [3] Lin S P, Wang C Y. Modeling wavy film flows[A]. In: Cherenisinoff N P Ed. Encyclopedia of Fluid Mechanics [C]. Houston: Gulf Publishing Co, 1986, 930—951.
- [4] Akylas T R. On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution[J]. J Fluid Mech, 1984, 141: 455—466.

- [5] Wang C Y. Liquid film flowing slowly down a wavy incline[J]. American Institute of Chemical Engineering, 1981, 27(2): 207—212.
- [6] Davis A G, Heathershaw A D. Surface wave propagation over sinusoidally varying topography[J]. J Fluid Mech, 1984, 144: 419—443.
- [7] ZHANG Dao_hua, Chwang Allen T. Generation of solitary waves by forward_ and backward_step bottom forcing[J]. J Fluid Mech, 2001, 432: 341—350.
- [8] Yoshimasa Nonaka. Internal solitary waves moving over the low slope of topographies[J]. Fluid Dynamics Research, 1996, 17(6): 329—349.
- [9] 朱勇. 流体流过下凹地形的共振流动[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(5): 447—450.
- [10] Fornberg B, Whitham G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena [J]. J Fluid Mech, 1978, 289: 333—404.
- [11] Fornberg Bengt. A Practical Guide to Pseudospectral Methods [M]. New York: Cambridge University Press, 1996, 173—196.
- [12] Wu T Y. Generation of upstream advancing solitons by moving disturbance[J]. J Fluid Mech, 1984, 184: 75—99.

Effects of the Varying Bottom on Nonlinear Surface Waves

WU Zheng_ren, CHENG You_liang, WANG Song_ling, LÜ Yu_kun

(School of Energy & Power Engineering, North China Electric Power University,
Baoding, Hebei 071003, P. R. China)

Abstract: The resonant flow of an incompressible, inviscid fluid with surface tension on varying bottoms was researched. The effects of different bottoms on the nonlinear surface waves were analyzed. The waterfall plots of the wave were drawn with Matlab according to the numerical simulation of the fKdV equation with the pseudo_spectral method. From the waterfall plots, the results are obtained as follows: for the convex bottom, the waves system can be viewed as a combination of the effects of forward_step forcing and backward_step forcing, and these two wave systems respectively radiate upstream and downstream without mutual interaction. Nevertheless, the result for the concave bottom is contrary to the convex one. For some combined bottoms, the wave systems can be considered as the combination of positive forcing and negative forcing.

Key words: varying bottom; resonant flow; solitary wave; fKdV equation; pseudo_spectral method; waterfall plot