

文章编号: 1000-0887(2006)03-0342-09

基于对偶二次规划的大型框架结构优化方法*

隋允康¹, 杜家政¹, 郭英乔²

(1. 北京工业大学 工程数值模拟中心, 北京 100022;

2. 兰斯大学 GMMs 实验室, 兰斯 BP1039, 51687, 法国)

(钟万勰推荐)

摘要: 将准则法和数学规划相结合, 对于不同的约束采用不同的处理方法: 应力约束作为局部性约束, 用 0 阶近似进行处理, 借助满应力准则将其转化为动态尺寸下限; 位移约束作为全局性约束, 根据单位虚载荷法将其显式化, 从而建立了满足应力和位移约束的框架结构截面优化的显式模型。为了提高模型的求解效率, 根据对偶理论将大规模的框架结构优化问题转化为仅仅几个对偶变量的对偶问题, 采用二次规划方法求解, 算例证明该方法能极大的提高模型的求解效率。采用近似射线步既能减小计算量又能使迭代过程更加平稳, 采用删除无效约束技术能减小优化模型的规模。以 MSC/Nastran 软件为结构分析的求解器, 以 MSC/Patran 软件为开发平台, 完成了满足刚度和强度的多工况、多变量的框架截面优化软件。算例结果表明上述程序算法的高效性

关键词: 框架结构; 截面优化; 对偶二次规划; 近似射线步; 删除无效约束

中图分类号: O343.2 **文献标识码:** A

引 言

早在 1960 年, Schmit 提出把数学规划引进结构设计领域进行系统综合的想法^[1], 首次构造了多工况作用下弹性结构优化设计的数学模型, 从此结构优化设计才较快的发展为一门独立的学科。1968 年, Prager 等提出了连续型优化准则(COC—continuum type optimality criteria)^[2,3], Venkayya 等发展了离散型优化准则(DOC—discretized optimality criteria)^[4]。1974 年, Schmit 等提出了结构优化的近似概念^[5], 主要包括设计变量连接、删除无效约束和有效约束的泰勒展开。1979 年, Fleury 等首先把对偶理论引入到结构优化问题上来^[6]。1980 年, Schmit 和 Fleury 提出了近似概念和对偶方法结合的算法^[7,8]。1991 年, Rozvany 和 Zhou 将 COC 理论的思想扩展到为迭代的 COC 算法^[9], 后来发展为一种新型的优化准则类算法 DCOC(discretized continuum type optimality criteria)^[10,11]。框架结构截面优化的理论虽然比较成熟, 但从大型通用优化软件实现的角度看, 还远不能尽如人意, 其优化模型的建立和求解等各个环节的方法对优化效率和程序实现等都有很大的影响, 需要进行进一步的研究, 从而提供程序开发的可靠依据,

* 收稿日期: 2004_04_20; 修订日期: 2005_11_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472003); 北京市自然科学基金资助项目(3042002); 北京市教委资助项目(KM200410005019)

作者简介: 隋允康(1943—), 男, 辽宁大连人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_10_67392239; Fax: + 86_10_67392399; E_mail: ysui@bjut.edu.cn)。

对于应用广泛而且受力复杂的框架结构尤为重要。研究表明结构优化的最大问题就是优化模型的建立,其次是模型的求解^[12]。为了建立满足应力和位移约束的框架结构截面优化的近似显式模型,本文根据约束性质的不同采用不同的处理方法:应力约束是局部性约束,为避免一阶近似带来的繁重计算量,将应力约束按零阶近似处理,并借助满应力准则将应力约束转化为动态尺寸下限;位移约束为全局性约束,根据单位虚载荷法将其显式化,可以避免泰勒展开引起的位移对设计变量的敏感度分析。为了提高模型的求解效率,根据对偶理论,采用对偶二次规划将原优化模型转化为对偶模型,通过对偶空间迭代求解对偶模型得到原模型的解。采用近似射线步既能减小每次迭代的计算量又能使迭代过程更加平稳,采用删除无效约束技术能减小优化模型的规模。以 MSC/Nastran 软件为结构分析的求解器,以 MSC/Patran 软件为开发平台,完成了同时满足刚度和强度约束的多工况、多变量的框架截面优化程序。

1 框架结构截面优化模型

从同时满足结构强度和刚度约束的可行性考虑结构设计经济性,以结构重量为目标函数,梁单元的一个主控参数(如截面惯性矩)为设计变量,考虑应力、位移和尺寸3种约束。优化模型的数学表达式如下

$$\begin{cases} \text{求} & I_{yi} & (i = 1, \dots, n), \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i(I_{yi}) \rightarrow \min, \\ \text{s. t.} & u_{jl} \leq u_j & (j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L), \\ & \sigma_{il} \leq \sigma_i & (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L), \\ & L_{yi} \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} & (i = 1, \dots, n), \end{cases} \quad (1)$$

其中 I_{yi} 是 i 号梁单元对 y 轴的截面惯性矩(设计变量), n 是设计变量数, J 是位移约束数, L 是载荷工况数。

假定梁截面的形状不变,尺寸按比例发生变化,如果取截面惯性矩 I_{yi} 为设计变量,则其他截面参数(如横截面积 A_i) 可以表示为截面惯性矩 I_{yi} 的函数。

$$A_i(I_{yi}) = \alpha_{Ai} I_{yi}^{0.5}, \quad (2)$$

其中 $\alpha_{Ai} = A_i^{(0)} / (I_{yi}^{(0)})^{0.5}$ 是跟截面形状有关的常数。

根据满应力准则的基本设计思想,每个梁单元至少在1种工况下达到许用应力,其数学表达如下

$$\max_{l=1, \dots, L} [\max_x \sigma_{il}(x)] = \sigma^* \quad (3)$$

对于细长梁单元,剪应力相对正应力较小,对设计影响不大,可以忽略,则框架结构的梁单元的正应力可以表示如下

$$\sigma_{il}(x) = M_{yil}(x) / W_{yi} + M_{zil}(x) / W_{zi} + N_{il}(x) / A_i \quad (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L), \quad (4)$$

其中 M_{yil} 、 M_{zil} 和 N_{il} 分别表示 l 号工况下 i 号梁单元内对 y 轴的弯矩、对 z 轴的弯矩和轴力, W_{yi} 、 W_{zi} 和 A_i 分别表示 i 号梁单元对 y 轴的抗弯模量、对 z 轴的抗弯模量和横截面积。

假设在 l 号工况下 i 号梁单元的最大应力在 p 点,记为

$$\sigma_{il}^p = \max \sigma_{il}(x) = M_{yil}^p / W_{yi} + M_{zil}^p / W_{zi} + N_{il}^p / A_i, \quad (5)$$

其中 M_{yil}^p 、 M_{zil}^p 和 N_{il}^p 分别表示 l 号工况下 i 号梁单元最大应力点的对 y 轴的弯矩、对 z 轴的弯矩

和轴力。

将式(5)代入式(3),得

$$\max_{l=1, \dots, L} (M_{yil}^p/W_{yi}(I_{yi}) + M_{zil}^p/W_{zi}(I_{yi}) + N_{il}^p/A_i(I_{yi})) = \alpha_l, \quad (6)$$

其中 M_{yil}^p 、 M_{zil}^p 和 N_{il}^p 都跟设计变量 I_{yi} 无关(静定化假设),可以从结构分析的结果中得到, W_{yi} 、 W_{zi} 、 A_i ($i = 1, \dots, n$) 是设计变量的 I_{yi} 的函数。

为了求解上述方程,先假定在每种工况下都取等式,通过迭代求解 L 个方程,得 L 个设计变量 I_{yil}^* ($l = 1, \dots, L$),再从中取大,得

$$I_{yi}^* = \max_{l=1, \dots, L} (I_{yil}^*) \quad (7)$$

如果没有位移约束和尺寸约束, I_{yi}^* 就是满足应力约束的最优解;如果有位移约束,需要将表达应力约束的动态下限用 I_{yi}^* 表示

$$I_{yi} \geq I_{yi} = I_{yi}^*, \quad (8)$$

跟尺寸约束合并,得

$$\max(I_{yi}, I_{yi}) \leq I_{yi} \leq I_{yi} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

根据单位虚载荷法,可以得到在 l 号工况作用下 j 号约束点对应的位移的显式表达式

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \int_{jl} \left(\frac{M_{yi}M_{yi}}{E_i I_{yi}} + \frac{M_{zi}M_{zi}}{E_i I_{zi}} + \frac{M_{xi}M_{xi}}{G_i I_{pi}} + \frac{\mu_{yi}Q_{yi}Q_{yi}}{G_i A_i} + \frac{\mu_{zi}Q_{zi}Q_{zi}}{G_i A_i} + \frac{N_i N_i}{E_i A_i} \right) dx, \quad (10)$$

其中 M_y 、 M_z 、 M_x 、 Q_y 、 Q_z 、 N 为实载荷工况下梁单元的内力, M_y 、 M_z 、 M_x 、 Q_y 、 Q_z 、 N 为虚载荷工况下梁单元的内力。

由梁单元组成的框架结构中,位移主要是弯矩和扭矩引起的,位移跟设计变量 I_{yi} 近似成反比关系,因此位移 u_{jl} 可以简化为设计变量 I_{yi} ($i = 1, \dots, n$) 的函数

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \frac{b_{ijl}}{I_{yi}}, \quad (11)$$

其中

$$b_{ijl} = I_{yi}^{(k)} \int_{jl} \left(\frac{M_{yi}M_{yi}}{E_i I_{yi}^{(k)}} + \frac{M_{zi}M_{zi}}{E_i I_{zi}^{(k)}} + \frac{M_{xi}M_{xi}}{G_i I_{pi}^{(k)}} + \frac{\mu_{yi}Q_{yi}Q_{yi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{\mu_{zi}Q_{zi}Q_{zi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{N_i N_i}{E_i A_i^{(k)}} \right) dx,$$

在每次迭代中是常数,可以根据结构分析的结果数据进行计算,但比较麻烦, k 是结构分析的迭代次数。

考虑到

$$\int_{jl} \left(\frac{M_{yi}M_{yi}}{E_i I_{yi}^{(k)}} + \frac{M_{zi}M_{zi}}{E_i I_{zi}^{(k)}} + \frac{M_{xi}M_{xi}}{G_i I_{pi}^{(k)}} + \frac{\mu_{yi}Q_{yi}Q_{yi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{\mu_{zi}Q_{zi}Q_{zi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{N_i N_i}{E_i A_i^{(k)}} \right) dx$$

是 l 号工况作用下 i 号单元对结构位移的贡献,也就是 i 号单元的内虚功。根据虚功原理,内虚功等于外力在虚位移上做的外虚功,即

$$(F_i^{l(k)})^T u_i^{j(k)} = \int_{jl} \left(\frac{M_{yi}M_{yi}}{E_i I_{yi}^{(k)}} + \frac{M_{zi}M_{zi}}{E_i I_{zi}^{(k)}} + \frac{M_{xi}M_{xi}}{G_i I_{pi}^{(k)}} + \frac{\mu_{yi}Q_{yi}Q_{yi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{\mu_{zi}Q_{zi}Q_{zi}}{G_i A_i^{(k)}} + \frac{N_i N_i}{E_i A_i^{(k)}} \right) dx, \quad (12)$$

其中

$$F_i^l = (F_{x1}^l, F_{y1}^l, F_{z1}^l, M_{x1}^l, M_{y1}^l, M_{z1}^l, F_{x2}^l, F_{y2}^l, F_{z2}^l, M_{x2}^l, M_{y2}^l, M_{z2}^l)^T$$

表示 l 号工况作用下 i 号单元的外力向量,可以直接对实载荷工况分析得到

$$u_i^j = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2})^T$$

表示 j 号位移约束对应的单位虚载荷工况作用下 i 号单元虚位移向量, 可以直接对单位虚载荷工况分析得到。

由式(11)和式(12)得

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{F}_i^{l(k)})^T \mathbf{u}_i^{j(k)} I_{yi}^{(k)}}{I_{yi}}, \quad (13)$$

则位移约束可以转化为

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{F}_i^{l(k)})^T \mathbf{u}_i^{j(k)} I_{yi}^{(k)}}{I_{yi}} \leq u_j. \quad (14)$$

将式(2)、式(9)和式(14)代入式(1), 得

$$\begin{cases} \text{求} & I_{yi} \quad (i = 1, \dots, n), \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n \rho l_i \alpha_i I_{yi}^{0.5} \rightarrow \min, \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{F}_i^{l(k)})^T \mathbf{u}_i^{j(k)} I_{yi}^{(k)}}{I_{yi}} \leq u_j \quad (j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L), \\ & \max(\underline{I}_{yi}, \underline{I}_{yi}) \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (15)$$

2 优化模型的求解

上述模型是显式模型, 由于约束和目标函数都是非线性的, 需要按有约束非线性规划求解, 但计算效率不高。为了采用稳定且有效的算法, 二次规划是一个很好的选择, 可以将目标函数做二阶泰勒展开, 约束做一阶泰勒展开形成标准的二次规划模型, 但位移约束的泰勒展开需要计算位移对设计变量的敏感度。考虑到位移跟设计变量成简单的反比关系, 只要采用倒变量变换, 可以将位移毫无精度损失的转化为设计变量的线性函数, 然后再将目标函数二次展开形成标准二次规划模型, 但是该模型的求解难度会随着设计变量的增多而不断加大, 求解效率也会随之降低。为了有效地解决多变量的大模型优化问题, 根据对偶理论, 采用对偶二次规划方法将原问题转化为对偶问题, 通过对偶空间迭代求解对偶规划得到原问题的解。

为了方便推导, 将式(15)简写为如下形式

$$\begin{cases} \text{求} & z_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n h_i z_i^{0.5} \rightarrow \min, \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i} \leq b_t \quad (t = 1, \dots, T), \\ & \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i \quad (i = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (16)$$

其中 $z_i = I_{yi}$ 是设计变量, $h_i = \rho l_i \alpha_i$, T 是约束的个数(没有粗选约束前 $T = J^* L$, 粗选约束后 $T \leq J^* L$), 参数 a_t 和 b_t 分别和 $(\mathbf{F}_i^{l(k)})^T \mathbf{u}_i^{j(k)} I_{yi}^{(k)}$ 和 u_j 对应, $\underline{z}_i = \max(\underline{I}_{yi}, \underline{I}_{yi})$, $\bar{z}_i = \bar{I}_{yi}$ 。

根据对偶理论, 式(16)的对偶模型为

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \\ \text{使} & \phi(\lambda) \rightarrow \max, \\ \text{s. t.} & \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\phi(\lambda) = \min_{z \leq z^*} [L(z, \lambda)] = \min_{z \leq z^*} \left[\sum_{i=1}^n h_i z_i^{0.5} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i} - b_t \right) \right], \quad \lambda \in E^T.$$

根据 Kuhn-Tucher 条件, 得

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} - \sum_{t=1}^T \frac{a_{it} \lambda_t}{(z_i^*)^2} \begin{cases} \leq 0 & (z_i^* = z_i), \\ = 0 & (z_i < z_i^* < z_i), \\ \geq 0 & (z_i^* = z_i). \end{cases} \quad (18)$$

记

$$\alpha_i = \left(\sum_{t=1}^T \frac{2a_{it} \lambda_t}{h_i} \right)^{2/3}, \quad (19)$$

由式(18)得

$$z_i^* = \begin{cases} z_i & (\alpha_i \geq z_i), \\ \alpha_i & (z_i < \alpha_i < z_i), \\ z_i & (\alpha_i \leq z_i), \end{cases} \quad (20)$$

所以

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n h_i (z_i^*)^{0.5} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \right). \quad (21)$$

将式(21)代入式(17), 将目标函数最大改为最小(目标函数加负号), 然后将其二阶展开, 并去掉常数项, 就可以得到对偶问题的标准二次规划模型

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \quad (t = 1, \dots, T), \\ \text{使} & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} \Big|_{\lambda^0} \lambda_t \lambda_s - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} \Big|_{\lambda^0} - \sum_{s=1}^T \lambda_s^0 \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} \Big|_{\lambda^0} \right] \lambda_t \rightarrow \min, \\ \text{s. t.} & \lambda_t \geq 0 \quad (t = 1, \dots, T), \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t, \quad \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} = - \sum_{i \in I_a} \frac{4a_{it} a_{is}}{3h_i (z_i^*)^{2.5}},$$

$$I_a = \left\{ i \mid z_i \leq z_i \leq z_i (i = 1, \dots, n) \right\}$$

为主动变量集, 否则为被动变量集。

由于在对偶模型的求解的过程中, 原模型存在设计变量主动和被动的问題, 而且在对偶模型的目标函数采用了二阶近似, 因此需要通过迭代求解对偶规划直到主动变量集不变和设计变量收敛。收敛判断准则的数学表达如下

$$I_a^{(v)} = I_a^{(v+1)} \text{ 和 } \sum_{i=1}^n \left[\frac{z_i^{(v+1)} - z_i^{(v)}}{z_i^{(v+1)}} \right]^{0.5} \Big|_n < \varepsilon, \quad (23)$$

其中 v 表示对偶规划求解的迭代次数, ε 是一个很小的正数。

3 近似射线步技术和删除无效约束技术的应用

近似射线步技术是所有设计变量同时乘一个射线步因子将设计点从可行域内或外拉到可行域边界上, 射线步因子根据位移、应力和设计变量与其约束值之之间的关系进行计算

$$v = \max_k R_k \quad (k = 1, \dots, J^* L + n^* L + n), \quad (24)$$

其中

$$R_k = \begin{cases} u_{jl}/u_j & (j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L), \\ (\sigma_{jl}/\sigma_i)^{4/3} & (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L), \\ I_{yi}/I_{yi} & (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

射线步后, 设计变量的值为

$$I_{yi}^* = \forall_{yi}^0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{25}$$

删除无效约束技术就是在近似射线步后根据一定的准则将约束分成有效约束和无效约束, 保留有效约束, 通过删除无效约束减小优化模型的规模, 提高求解效率。

删除无效约束技术的总准则为“有效约束数不能超过设计变量数”, 此外还有 3 个细微一点的准则: 1) 随着迭代的进程判断标准逐渐严格; 2) 性质不同的约束判断标准不一样 (如尺寸约束的标准最松, 应力约束次之, 位移约束的标准最严); 3) 避免线性相关的约束同时进入有效约束。

根据上述准则, 无效约束的判断准则的公式表示如下

$$R^{(k)} \leq \begin{cases} t_0 + 0.1^* k & (R^{(k)} < t_m), \\ t_m & (R^{(k)} \geq t_m), \end{cases} \tag{26}$$

其中

$$R^{(k)} = \begin{cases} u_{jl}/(\forall^{(k)} u_j) + \delta & (j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L), \\ [\sigma_{jl}/(\forall^{(k)} \sigma_i)]^{4/3} & (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L), \\ I_{yi}/(\forall^{(k)} I_{yi}) - \delta & (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

是第 k 次结构分析射线步后的响应比, t_0 是约束删除限的初始值 (默认值为 0.3), t_m 是约束删除限的最大值 (默认值为 0.9), k 是结构分析的迭代次数, $\forall^{(k)}$ 是第 k 次结构分析的射线步系数, δ 表示对不同约束的判断标准不同的差值 (默认值为 0.1)。

4 数值算例

例 1 单跨度框架的截面优化

如图 1 所示的单跨度框架, 考虑 3 种工况载荷, 标为 (I)、(II)、(III)。材料属性: 弹性模量为 206 GPa, 泊松比为 0.3, 密度为 7 800 kg/m³, 许用应力为 120 MPa。

以结构重量最小为目标函数, 将 ①、②、③号梁单元的截面惯性矩分别作为独立的设计变量, 约束分只有应力约束和同时受应力和位移约束 (2 号和 3 号节点沿 x 方向的位移 u_{2x} 和 u_{3x} 不超过 0.5 mm, 2 号梁单元中间节点的 y 方向位移 u_y 不超过 0.2 mm) 两种情况, 设计变量的初始值为 1.333E-8 m⁴。

本研究程序采用了近似射线步技术, 在满应力收敛精度相同的条件下 (0.001), 有无近似射线步对满应力设计和对偶规划求解的迭代次数以及结构响应的的影响如表 1 和表 2, 用本研究程序和 Nastran 程序分别计算 (收敛精度都取相同的值 0.01), 计算结果比较如表 3。

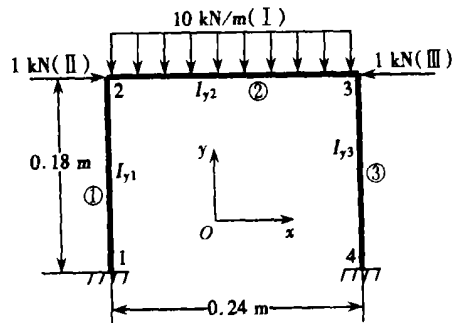


图 1 单跨度框架模型

表 1 只受应力约束的情况下近似射线步的影响

近似射线步	无近似射线步			有近似射线步		
结构分析步数	1	2	3	1	2	3
满应力迭代次数	63	42	33	31	15	15
最大应力(MPa)*	- 120.688			- 200.000		

表 2 同时受应力和位移约束的情况下近似射线步的影响

近似射线步	无近似射线步						有近似射线步					
结构分析步数	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
满应力迭代次数	63	59	59	59	55	47	25	31	25	24	24	24
对偶规划迭代次数	6	7	6	6	7	6	4	3	3	3	2	2
最大应力*(MPa)	119.1						119.7					
最大位移*(m)	u_y		u_{3x}			u_{2x}	u_y		u_{3x}		u_{2x}	
	0.098 71		0.496 6			0.496 6	0.099 35		0.5		0.5	

注 * 表 1 和表 2 中最大应力和最大位移是最后一步的最大结构响应

表 3 本研究程序和 Nastran 程序的计算结果比较

约束情况	方法	迭代次数	优化后最大应力(MPa)	优化后最大位移(mm)			结构重量(kg)
				u_y	u_{3x}	u_{2x}	
只受应力约束的情况	本研究程序	3	200.000	—	—	—	0.867 2
	Nastran 程序	10	119.957	—	—	—	0.867 8
同时受应力和位移约束的情况	本研究程序	6	119.671	0.099 35	0.500 0	0.500 0	1.367
	Nastran 程序	63	53.765 3	0.099 88	0.142 5	0.142 5	1.845

例 2 大型空间框架截面优化

如图 2 所示,由 1 800 根长为 1 m 的梁单元构成的 8 m × 8 m × 8 m 空间框架。材料属性:弹性模量为 206 GPa,泊松比为 0.3,密度为 7 800 kg/m³,许用应力为 200 MPa。该模型底部固支,受 6 个载荷的作用:①重力载荷;②沿 z 轴向下的集力载荷,大小为 200 kN,作用于所有节点;③、④、⑤、⑥分别是垂直作用在 4 个侧面向里的分布力,其分布如图 3 所示。6 个载荷组合为 7 个载荷工况,如表 4 所示。

表 4 载荷工况

载荷工况号	1	2	3	4	5	6	7
载荷号	①、②	①、②、③	①、②、④	①、②、⑤	①、②、⑥	①、②、③、④	①、②、⑤、⑥

表 5 本研究程序和 Nastran 程序的计算结果比较

约束情况	只受应力约束的情况		同时受应力约束的情况	
	本研究程序	Nastran 程序	本研究程序	Nastran 程序
迭代次数	3	19	8	15
最大应力(MPa)	200.245	200.363	200.018	200.139
x 方向最大位移(mm)	—	—	4.755	5.005
y 方向最大位移(mm)	—	—	9.463	10.03
结构重量(kg)	98 460.2	126 593.5	127 326.9	132 748.6

以结构重量为目标函数, 1 800 个梁单元的截面惯性矩分别作为独立设计变量, 约束分只受应力约束和同时受应力和位移约束(x 方向最大位移为 5 mm, y 方向最大位移为 10 mm) 两种情况, 设计变量的初始值为 $6.667E-5m^4$ 。用本研究程序和 Nastran 程序进行计算(收敛精度都取相同的值 0.01), 两种方法计算结果比较如表 5

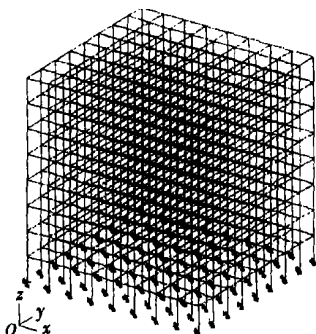


图 2 大型空间框架模型

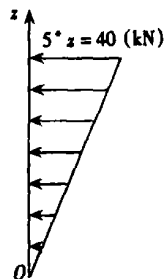


图 3 侧面载荷分布图

5 结 论

本文将准则法和数学规划相结合建立框架结构截面优化模型: 将应力约束按 0 阶近似处理, 能在保证计算精度的条件下, 避免一阶近似引起的计算量; 根据单位虚载荷法将位移约束显式化, 可以避免泰勒展开引起的敏度计算; 根据对偶理论采用对偶二次规划求解, 使多变量的大型优化问题的解决成为可能; 采用近似射线步技术, 能有效的降低满应力设计和对偶规划求解的迭代次数, 用最后一步射线步后的设计作为最优设计能有效的减小因结构超静定引起的计算误差; 采用删除无效约束技术, 能有效的减小模型的规模, 提高求解效率; 与 Nastran 程序相比, 本研究程序的迭代次数少、收敛速度快、优化效率高, 在满足约束的前提下, 本文研究程序得到的最优结构的重量更轻, 设计更优。

[参 考 文 献]

- [1] Schmit L A. Structural design by systematic synthesis[A]. In: Proceedings of the Second National Conference on Electronic Computation [C]. New York: American Society of Civil Engineering, 1960, 105—132.
- [2] Prager W, Taylor J E. Problems of optimal structural design[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35(1): 102—106.
- [3] Prager W, Shield R T. A general theory of optimal plastic design[J]. Journal of Applied Mechanics, 1967, 34(1): 184—186.
- [4] Venkayya V B. Design of optimum structures[J]. Computers and Structures, 1971, 1(1/2): 265—309.
- [5] Schmit L A, Farshi B. Some approximation concepts for structural synthesis[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1974, 12(5): 692—699.
- [6] Fleury C. Structural weight optimization by dual method of convex programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, 14(12): 1761—1783.
- [7] Schmit L A, Fleury C. Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1980, 18(10): 1252—1260.
- [8] Fleury C, Schmit L A. Primal and dual methods in structural optimization[J]. American Society of

- Civil Engineering Journal Structure Division, 1980, **106**(5): 1117—1133.
- [9] Rozvany G I N, ZHOU Ming. COC algorithm, Part I : cross_section optimization or sizing[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, **89**(1/3): 281—308.
- [10] ZHOU Ming, Rozvany G I N. DCOC: An optimality criteria method for large system. Part I : theory [J]. Structure Optimization, 1992, **5**(1): 12—25.
- [11] ZHOU Ming, Rozvany G I N. DCOC: An optimality criteria method for large system. Part II: algorithm[J]. Structure Optimization, 1993, **6**(4): 250—262.
- [12] 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996, 87—177.

Method Based on Dual_Quadratic Programming for Frame Structural Optimization With Large Scale

SUI Yun_kang¹, DU Jia_zheng¹, GUO Ying_qiao²

(1. Laboratory Numerical Simulation Center for Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, P. R. China;

2. Laboratory Mechanics, Materials & Structures, University of Reims Champagne-Ardenne, BP1039, 51687, Reims, France)

Abstract: The optimality criteria (OC) method and mathematical programming (MP) were combined to found the sectional optimization model of frame structures. Different methods were adopted to deal with the different constraints. The stress constraints as local constraints were approached by zero_order approximation and transformed into movable sectional lower limits with the full stress criterion. The displacement constraints as global constraints were transformed into explicit expressions with the unit virtual load method. Thus an approximate explicit model for the sectional optimization of frame structures was built with stress and displacement constraints. To improve the resolution efficiency, the Dual_Quadratic Programming was adopted to transform the original optimization model into a dual problem according to the dual theory and solved iteratively in its dual space. A method called approximate scaling step was adopted to reduce computations and smooth the iterative process. Negative constraints were deleted to reduce the size of the optimization model. With MSC/Nastran software as structural solver and MSC/Patran software as developing platform, the sectional optimization software of frame structures was accomplished, considering stress and displacement constraints. The examples show that the efficiency and accuracy are improved.

Key words: frame structure; sectional optimization; dual_quadratic programming; approximate scaling step; deletion of negative constraint