

文章编号: 1000-0887(2004) 05-0488-09

# 二相流计算的一种差分算法\*

李 强<sup>1</sup>, 封建湖<sup>2</sup>, 蔡体敏<sup>1</sup>, 胡春波<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 164 信箱, 西安 710072;  
2. 长安大学 理学院, 西安 710064)

(李家春推荐)

**摘要:** 考虑两相流的力学行为, 忽略相间的耗散作用, 建立了 Euler 型的基本控制方程。状态方程采用刚性状态方程。基于 Abgrall 提出的准则, 在流动区域内, 对可压两相流提出了一个精度较高的 Euler 型数值方法, 数值格式是 Godunov 型格式, 对守恒型和非守恒型方程采用 HLLC 型和 Lax-Friedrichs 型近似 Riemann 解算器, 引入了速度弛豫和压强弛豫过程来代替两相间的相互作用。在一维情形下给出数值算例, 并且和 Saurel 的算例进行了比较, 结果表明该算法不但精确而且稳定, 且在间断处没有数值振荡。

**关键词:** 可压二相流; 迟豫过程; 近似 Riemann 解算器  
**中图分类号:** O359      **文献标识码:** A

## 引 言

二相流问题的研究在现代工农业生产中具有很重要的地位。迄今, 研究二相流有两种方法, 一种将流体相视为连续介质, 将颗粒相视为离散体系, 在拉格朗日坐标系下探讨颗粒运动时物理量的变化, 这种方法称为颗粒轨迹模型或拉格朗日法。另一种方法是把流体和颗粒两相均视为同时充满流场而且相互作用的连续介质进行研究, 该方法被称为双流体模型或欧拉法。本文重点研究双流体模型。对于双流体模型的数值模拟问题, 目前由于人们对其流动机理还不清楚, 对其波结构还不甚了解, 所以数值研究还处于初步阶段, 现有的方法主要是将求解守恒型问题的方法移植过来。在该方面已有一些研究, Toumi<sup>[1]</sup>在 G. Dal Maso、P. Le Floch<sup>[2]</sup>等工作的基础之上, 试图采用线性化方法求解, 但如何选取合适的线性化路径这一问题尚未解决; L. Sinaulieu<sup>[3]</sup>在线性化方法的基础上采用有限体积法求解了二相流问题, 但计算结果的误差比较大, 对间断的识别能力差。R. Saurel<sup>[4]</sup>在 Abgrall<sup>[5]</sup>工作基础上, 利用 HLL 格式对守恒型方程进行了离散, 其数值模拟结果在间断附近有非物理振荡。本文以 D. A. Drew<sup>[6]</sup>等提出的方程为基本控制方程, 以 HLLC 格式为基础, 对方程进行数值求解。

## 1 模型介绍

本文中使用的 D. A. Drew<sup>[6]</sup>、Saurel 和 Gallouet<sup>[7]</sup>中提出的可压二相流方程:

\* 收稿日期: 2002\_05\_17; 修订日期: 2003\_12\_03

基金项目: 航空科学基金资助项目(03c53021)

作者简介: 李强(1976—), 男, 陕西长安人, 博士(联系人. Tel: + 86\_29\_88492417; Fax: + 86\_29\_88494163; E\_mail: lq3088066@hotmail.com).

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial x} = m\bar{v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + m\bar{v}V_i + F_d, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial[u_g(\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g)]}{\partial x} = P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + m\bar{v}E_i + F_d V_i + Q_i, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial x} = -m\bar{v}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - m\bar{v}V_i - F_d, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial[u_l(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l p_l)]}{\partial x} = -P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - m\bar{v}E_i - F_d V_i - Q_i, \quad (7)$$

其中下标  $g, l$  分别代表气相和液相,  $\alpha_k (k = l, g)$  为体积分, 且  $\alpha_g + \alpha_l = 1$ ,  $m\bar{v}$  为相间质量交换率,  $F_d$  为相间作用力, 通常取为  $F_d = \lambda(u_l - u_g)$ ,  $\lambda$  为一个大于零的系数,  $P_i, V_i$  分别为相间交界面上的平均压强和平均速度,  $Q_i$  为相间热交换率。

本文中采用 Saurel<sup>[4]</sup> 对  $P_i, V_i$  的估计:

$$P_i = \sum \alpha_k p_k, \quad (k = l, g) \quad (8)$$

$$V_i = \sum \alpha_k \rho_k u_k \setminus \sum \alpha_k \rho_k \quad (k = l, g), \quad (9)$$

由式(2)~(7)可以看出, 如将二相的质量、动量和能量方程分别相加, 可以得到关于混合物的 Euler 方程。由于目前尚没有关于二相流方程的理论解, 所以广为接受的检验计算结果的方法是将计算结果按质量加权平均后和混合物的 Euler 方程的理论解进行比较。

## 2 差分格式的构造

本文中假定  $m\bar{v} = 0, Q_i = 0$ , 在不考虑相间作用力  $F_d$  时, 方程(2)~(7)可写成守恒型形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{H}(\mathbf{U}) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}, \quad (10)$$

方程(1)仍为非守恒形式:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g E_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l E_l)^T \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) &= (\alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g, u_g(\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g), \\ &\quad \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l, u_l(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l p_l))^T \\ \mathbf{H}(\mathbf{U}) &= (0, P_i, P_i V_i, 0, -P_i, -P_i V_i)^T. \end{aligned}$$

一般地, 由于系统的特征时间远大于两相间驰豫的特征时间, 所以可以认为二相流在流动中始终处于平衡状态, 这样整个求解过程可分三步:

- 1) 对式(10)进行离散差分求解
- 2) 考虑相间作用力, 对第一步的结果进行瞬间速度驰豫。
- 3) 考虑相间作用力, 对第二步的结果进行瞬间压强驰豫。

第一步: 对式(10)式进行离散差分求解

本文建立差分格式的准则是 Abgrall<sup>[5]</sup> 提出的: “二相流中, 若  $t = 0$  时流场中各处速度、压

强分别相等, 则  $t > 0$  时流场中速度、压强将不再变化”· 所使用的状态方程为:

$$p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma p \quad (12)$$

对式(10)使用中心差分格式:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \Delta t H U(U_j^n) \quad (13)$$

其中  $\cdot$  表示对  $\partial \alpha_g / \partial x$  的离散形式, 这将在后边给出. Saurel<sup>[4]</sup> 对  $F_{j+0.5}^n$  使用了 HLL 格式, 但由于 HLL 格式对接触间断的捕捉不精确, 所以本文首先使用 HLLC 格式, 即选取:

$$F_{j+1/2}^{HLLC} = \begin{cases} F_L & (S_L \geq 0), \\ F^*_{*L} = F_L + S_L(U^*_{*L} - U_L) & (S_L \leq 0 \leq S^*), \\ F^*_{*R} = F_R + S_R(U^*_{*R} - U_R) & (S^* \leq 0 \leq S_R), \\ F_R & (S_R \leq 0), \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$U = (\alpha_g^K \rho_g^K, \alpha_g^K \rho_g^K u_g^K, \alpha_g^K \rho_g^K E_g^K, \alpha_1^K \rho_1^K, \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K, \alpha_1^K \rho_1^K E_1^K)^T,$$

$$FK(U) = (\alpha_g^K \rho_g^K u_g^K, \alpha_g^K \rho_g^K u_g^K^2 + \alpha_g^K p_g^K, u_g^K (\alpha_g^K \rho_g^K E_g^K + \alpha_g^K p_g^K), \\ \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K, \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K^2 + \alpha_1^K p_1^K, u_1^K (\alpha_1^K \rho_1^K E_1^K + \alpha_1^K p_1^K))^T,$$

$$U^*_{*K} = \begin{bmatrix} \frac{S_K \alpha_g^K \rho_g^K - \alpha_g^K \rho_g^K u_g^K}{S_K - S^*} \\ \frac{S_K \alpha_g^K \rho_g^K - \alpha_g^K \rho_g^K u_g^K}{S_K - S^*} S^* \\ \alpha_g^K \rho_g^K (S_K - u_g^K) [E_g^K + (S^* - u_g^K) \cdot \\ (S^* + \frac{p_g^K}{\rho_g^K (S_K - u_g^K)}) J] \Big| (S_k - S^*) \\ \frac{S_K \alpha_1^K \rho_1^K - \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K}{S_K - S^*} \\ \frac{S_K \alpha_1^K \rho_1^K - \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K}{S_K - S^*} S^* \\ \alpha_1^K \rho_1^K (S_K - u_1^K) [E_1^K + (S^* - u_1^K) \cdot \\ (S^* + \frac{p_1^K}{\rho_1^K (S_K - u_1^K)}) J] \Big| (S_k - S^*) \end{bmatrix}_{K=L,R}$$

对波速  $S_L, S_R$  的估计有多种方式(见 Toro[8]), 这里本文取

$$S_L = \min(u_g^L - c_g^L, u_1^L - c_1^L, u_g^R - c_g^R, u_1^R - c_1^R), \quad (15)$$

$$S_R = \min(u_g^L + c_g^L, u_1^L + c_1^L, u_g^R + c_g^R, u_1^R + c_1^R). \quad (16)$$

对  $S^*$  的估计采用使 HLLC 格式中接触间断两侧的混合压强相等的方法, 易得:

$$S^* = \frac{P_m^R - p_m^L + \rho_m^L (S_L - u_m^L) - \rho_m^R (S_R - u_m^R)}{\rho_m^L (S_L - u_m^L) - \rho_m^R (S_R - u_m^R)}, \quad (17)$$

其中:

$$p_m^K = \alpha_g^K p_g^K + \alpha_1^K p_1^K, \quad \rho_m^K = \alpha_g^K \rho_g^K + \alpha_1^K \rho_1^K, \\ u_m^K = (\alpha_g^K \rho_g^K u_g^K + \alpha_1^K \rho_1^K u_1^K) / \rho_m^K \quad (K = L, R).$$

注意到(14)式可以写成统一形式:

$$F_{j+1/2}^{HLLC} = F_{j+1/2} + S_{j+1/2} (U^*_{j+1/2} - U_{j+1/2}),$$

将其代入方程(13),就可得到关于守恒量的差分方程.此处以式(10)中气相守恒量为例,写出其具体表达式.类似地,也可得到式(10)中液相守恒量的差分方程.

对质量守恒方程,有:

$$(\alpha_g \rho_g)_j^{n+1} = (\alpha_g \rho_g)_j^n - \lambda [(\alpha_g \rho_g u_g)_{j+1/2}^n + S_{j+1/2}^n [(\alpha_g \rho_g)_{j+1/2}^n - (\alpha_g \rho_g)_{j+1/2}^n] - (\alpha_g \rho_g u_g)_{j-1/2}^n - S_{j-1/2}^n [(\alpha_g \rho_g)_{j-1/2}^n - (\alpha_g \rho_g)_{j-1/2}^n]] \cdot \quad (18)$$

对动量守恒方程,有:

$$(\alpha_g \rho_g u_g)_j^{n+1} = (\alpha_g \rho_g u_g)_j^n - \lambda [(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g)_{j+1/2}^n + S_{j+1/2}^n [(\alpha_g \rho_g u_g)_{j+1/2}^n - (\alpha_g \rho_g u_g)_{j+1/2}^n] - (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g)_{j-1/2}^n - S_{j-1/2}^n [(\alpha_g \rho_g u_g)_{j-1/2}^n - (\alpha_g \rho_g u_g)_{j-1/2}^n]] + \Delta t P_i \cdot \quad (19)$$

注意到  $u_g^n = V_i^n = S_i^n$ , 则当

$$\therefore = \frac{1}{\Delta x} (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n), \quad (20)$$

时,成立  $u_j^{n+1} = u_j^n$ , 所以对  $\partial \alpha_g / \partial x$  的离散形式是:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n). \quad (21)$$

对能量守恒方程,有:

$$(\alpha_g \rho_g E_g)_j^{n+1} = (\alpha_g \rho_g E_g)_j^n - \lambda [u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g)_{j+1/2}^n + S_{j+1/2}^n [(\alpha_g \rho_g E_g)_{j+1/2}^n - (\alpha_g \rho_g E_g)_{j+1/2}^n] - [u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g)]_{j-1/2}^n - S_{j-1/2}^n [(\alpha_g \rho_g E_g)_{j-1/2}^n - (\alpha_g \rho_g E_g)_{j-1/2}^n]] \Delta t P_i V_i \cdot \quad (22)$$

注意到  $E_g = e_g + u_g^2/2$  以及所使用的状态方程,要使  $p_j^n = p_j^{n+1}$  成立,则要求:

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - \lambda u_j^n (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n) + S_{j+1/2}^n (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1/2}^n) - S_{j-1/2}^n (\alpha_{j-1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n), \quad (23)$$

所以对(11)式的离散采用以上形式.由于无法直接得到  $\alpha_{j+1/2}^n$  的表达式所以采用  $\text{Roe}^{[9]}$  平均进行估计:

$$\alpha_{j+1/2}^* = \frac{\sqrt{\alpha_g^L \rho_g^L} \alpha_g^L + \sqrt{\alpha_g^R \rho_g^R} \alpha_g^R}{\sqrt{\alpha_g^L \rho_g^L} + \sqrt{\alpha_g^R \rho_g^R}}. \quad (24)$$

式(23)中,对对流项  $V_i(\partial \alpha_g / \partial x)$  采用了经典的离散方式  $u_j^n (\alpha_{j+1}^n - \alpha_{j-1}^n)$ , 另外的项  $S_{j+1/2}^n (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1/2}^n) - S_{j-1/2}^n (\alpha_{j-1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n)$  表示数值粘性,它是对守恒项所使用格式的数值粘性的函数.

作为比较,本文又采用 Lax-Friedrichs 型近似 Riemann 解算器对式(10)进行了差分离散, Lax-Friedrichs 型差分格式可以写成:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \lambda (\mathbf{F}_{j+1/2}^{LF} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{LF}) + \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{U}_j^n) \cdot \quad (25)$$

其中:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{LF} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j^n + \mathbf{F}_{j+1}^n) + \frac{1}{2\lambda} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j+1}^n). \quad (26)$$

和 HLLC 格式相似的过程,可以得到对式(11)的离散形式:

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - \lambda u_j^n (\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n) - \alpha_j^n + 0.5 (\alpha_{j+1}^n + \alpha_{j-1}^n). \quad (27)$$

第二步:对第一步的结果进行瞬间速度弛豫处理

根据系统动量守恒,取:

$$u = u_g = u_l = \frac{\alpha_g \rho_g u_{g0} + \alpha_l \rho_l u_{l0}}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l}. \quad (28)$$

由于速度变化导致的各相的总能和内能的变化,以气相为例,由于:

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = \lambda V_i (u_l - u_g). \quad (31)$$

由式(25)~(27),可得:

$$e_g = e_{g0} + \frac{1}{2} (u_g - u_{g0}) (V_i^n - u_{g0}), \quad (32)$$

然后对  $U_0$  进行相应的修正,其中下标 0 表示第一步的结果。对液相有类似的结果。

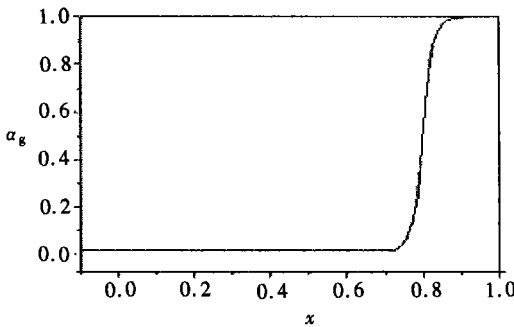
第三步:对第二步的结果进行瞬间压强弛豫处理

在压强的弛豫过程中,会引起内能的变化和体积分数的变化。由于瞬间压强弛豫对相交界面的识别很重要,特别是参数  $\mu$  (参数  $\mu$  为一个正系数或一个更为复杂的正值函数 ( $\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}$ ),见式(33))还没有通过物理或实验的途径确定时,对参数的最好的估计是认为它无穷大。以气相为例,由式:

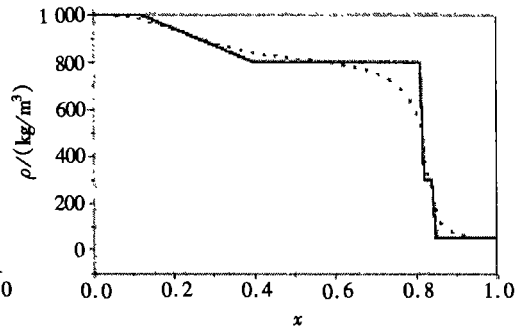
$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu (p_g - p_l), \quad (33)$$

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0, \quad (34)$$

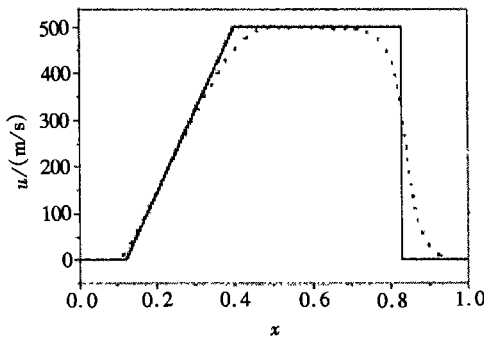
$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = 0, \quad (35)$$



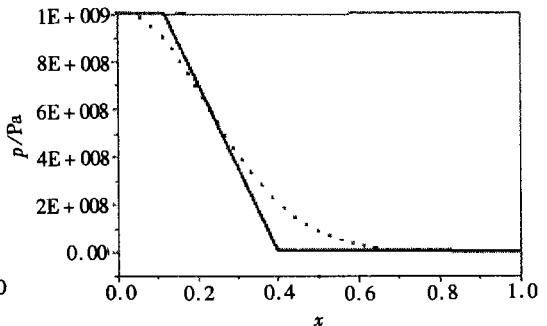
(a) 气相体积分数  $\alpha_g$



(b) 密度比较图



(c) 速度比较图



(d) 压强比较图

图 1 用 Lax\_Friedrichs 格式计算的结果(100 网格点)

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = - \mathcal{H} P_i (p_g - p_l), \quad (36)$$

可以得到:

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = - P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial t}, \quad (37)$$

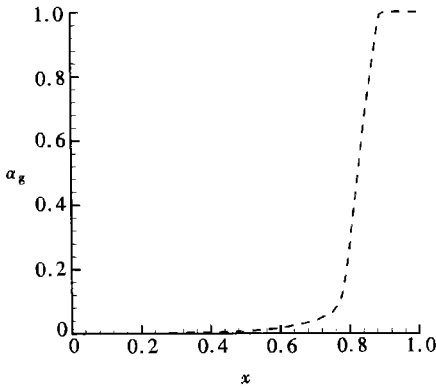
对上式进行积分,得:

$$e_g^* = e_g^0 - P_i / (\alpha_g \rho_g) (\alpha_g^* - \alpha_g^0). \quad (38)$$

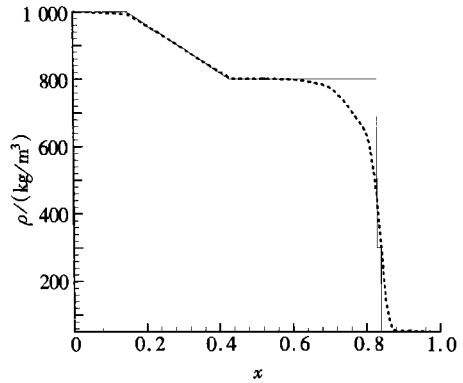
对液相有类似的结果. 根据状态方程使用迭代法求参数  $\alpha_g$ , 使两相的压强相等:

$$f(\alpha_g) = P_g(\rho_g, e_g) - P_l(\rho_l, e_l) = 0, \quad (39)$$

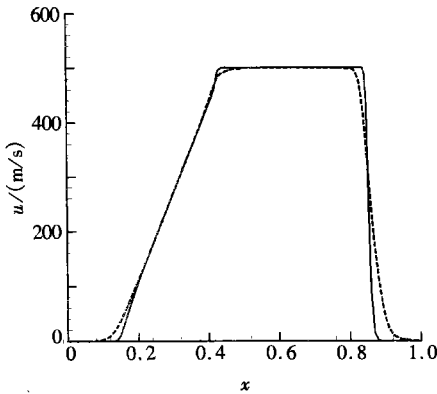
其中  $P_i = (P_{i+} + P_{i-})/2$ ,  $P_{i-}$  为在状态  $(\alpha_g^0, \rho_g^0, e_g^0)$  时计算的值,  $P_{i+}$  为在状态  $(\alpha_g, \rho_g, e_g)$  时计算的值. 这样便完成了对整个方程的求解.



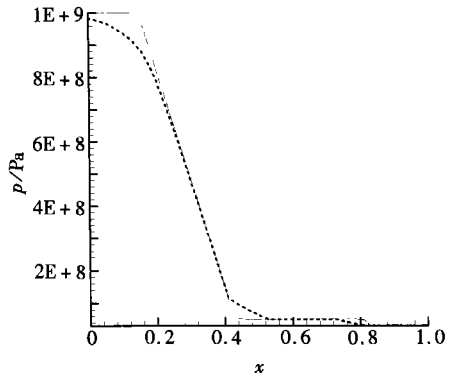
(a) 气相体积分数  $\alpha_g$



(b) 密度比较图



(c) 速度比较图



(d) 压强比较图

图2 用HLL格式计算的结果(100网格点)

### 3 数值算例

此处, 本文采用[4]中的算例:

在激波管的左侧为水蒸气, 右侧为空气.

$$W_L = (\varepsilon, 1E-6 \text{ kg/m}^3, 1E-6 \text{ m/s}, 1E-6 \text{ Pa}, 1000 \text{ kg/m}^3, 1E-6 \text{ m/s}, 1E-9 \text{ Pa}),$$

$$v_L = 4.4, \quad \pi_L = 6.1^8,$$

$$W_R = (1-\varepsilon, 50 \text{ kg/m}^3, 1E-6 \text{ m/s}, 1E+0.5 \text{ Pa}, 1E-6 \text{ kg/m}^3, 1E-6 \text{ m/s}, 1E-6 \text{ Pa}),$$

$$v_R = 1.4, \quad \pi_R = 0.0, \quad \varepsilon = 1E-8$$

在  $t = 299 \mu\text{s}$  时, 对 100 网格点和 1000 网格点分别进行了计算, 计算结果见下图 1~ 图 5(实线是理论解, 虚线是数值解), 并和 Saurel<sup>[4]</sup> 的计算结果进行了比较。

图 1、图 2、图 3 分别是采用 Lax\_Friedrichs 格式作为通量函数、HLL 格式(见 Saurel<sup>[4]</sup>) 作为通量函数、HLLC 格式作为通量函数对守恒型方程进行离散后的计算结果, 格点为 100。图 4、图 5 分别是采用 HLL 格式(Saurel<sup>[4]</sup>) 作为通量函数、HLLC 格式作为通量函数对守恒型方程进行离散后的计算结果, 格点为 1000。从计算结果可以看出, 三种格式都有较高的计算精度。相比之下, 以 HLLC 格式作为通量的方法对激波的分辨率更高, 数值结果更稳定, 避免了 HLL 格式在间断处的数值振荡。对接触间断, 以 Lax\_Friedrichs 格式作为通量的方法过渡区域较大, 而以 HLLC 格式作为通量的方法过渡区域很小。

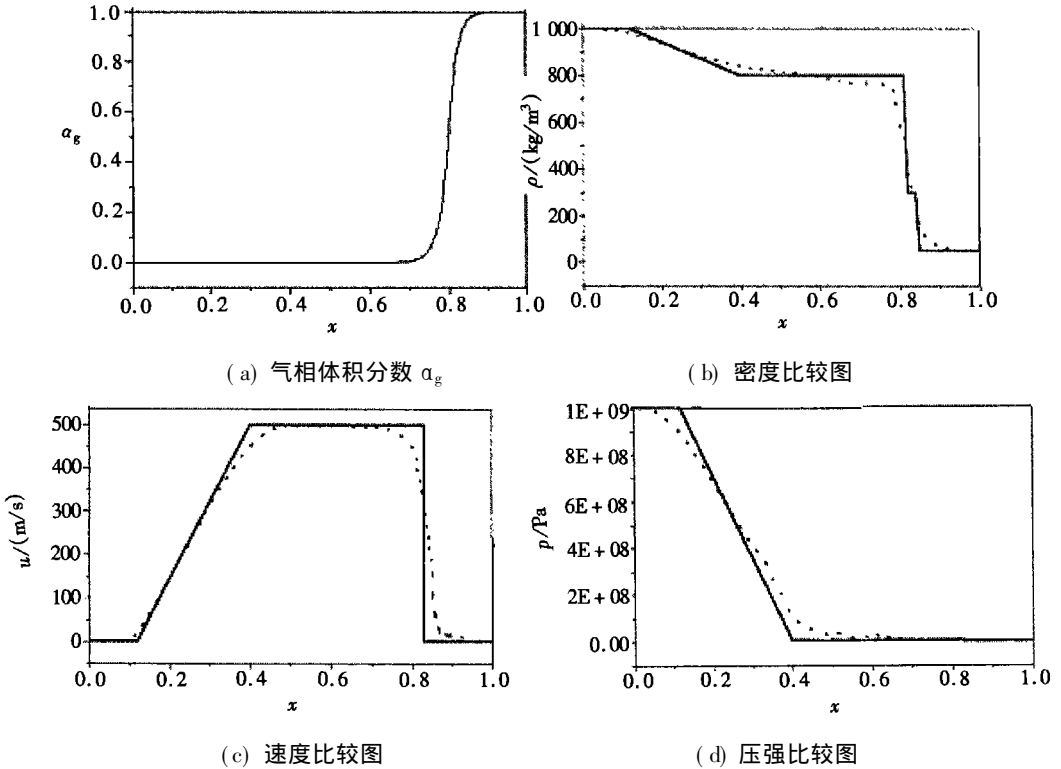
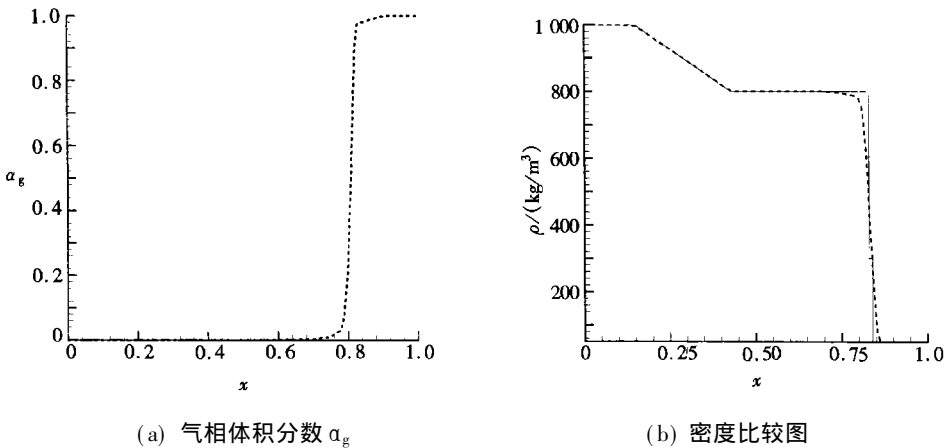
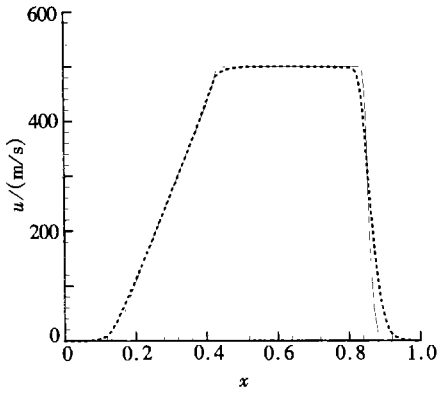
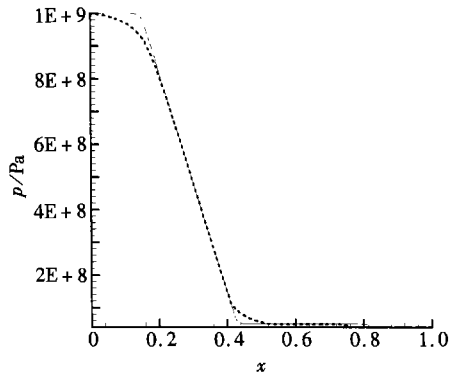


图 3 用 HLLC 格式计算的结果(100 网格点)



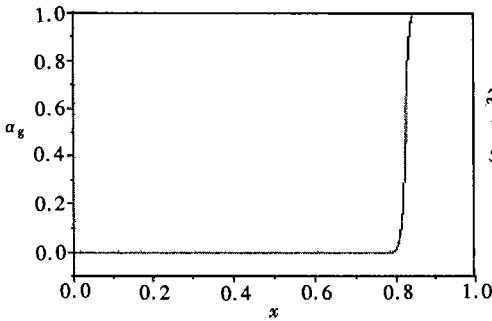


(c) 速度比较图

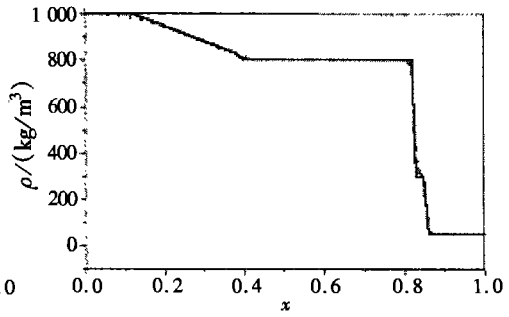


(d) 压强比较图

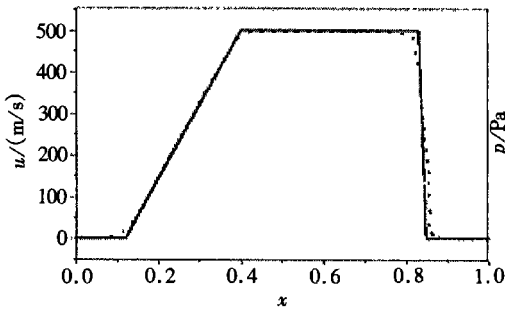
图 4 用 HLL 格式计算的结果(1000 网格点)



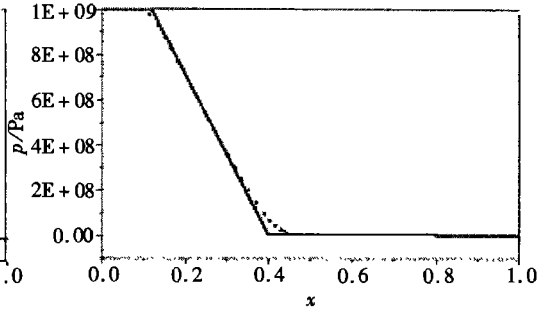
(a) 气相体积分数  $\alpha_g$



(b) 密度比较图



(c) 速度比较图



(d) 压强比较图

图 5 用 HLLC 格式计算的结果(1000 网格点)

## 4 结 论

本文在 Saurel<sup>[4]</sup> 工作的基础之上提出了一种新的算法并进行了数值计算, 由计算结果可以看出该算法不但稳定, 而且具有较高的精度和激波分辨率。但本文的模型并未考虑相间质量传递和热量传递, 且由数值计算过程可以看出该算法计算量比较大, 特别是压强弛豫过程中求解气相体积分数的迭代过程, 所以在今后的研究中有必要对压强弛豫过程进行更为深入的研究, 同时应考虑质量传递和热量传递过程。



## [参 考 文 献]

- [1] Touni I, Kumbaro A. An approximate linearized Riemann solver for a two\_phase model[ J]. J Comput Phys, 1996, **124**: 286—300.
- [2] Maso G Dal, Floch P Le, Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products[ J]. J Math Pures Appl, 1995, **74**: 483—548.
- [3] Sainaulieu L. Finite volume approximate of two phase fluid flows based on an approximate Roe\_type Riemann solver[ J]. J Comput Phys, 1995, **121**: 1—28.
- [4] Saurel R, Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multi fluid and multiphase flows[ J]. J Comput Phys, 1999, **150**: 425—467.
- [5] Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in the multicomponent flow calculations: A quasi conservative approach[ J]. J Comput Phys, 1996, **125**: 150—160.
- [6] Drew D A. Mathematical modeling of two\_phase flow[ J]. Ann Rev Fluid Mech, 1983, **15**: 261—291.
- [7] Saurel R, Gallout T. Models et Methods Numeriques Pour Les Ecoulements Fluids [ M ]. Cours de DEA, Center de Mathematiques. Provence: University de Provence, 1998.
- [8] Toro E F. Riem ann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics [ M ]. Berlin: Springer\_Verlag, 1997.
- [9] Roe P L. Approximate Riemann solver, parameter vectors, and difference schemes[ J]. J Comput Phys, 1981, **43**: 357—372.

## Difference Scheme for Two\_phase Flow

LI Qiang<sup>1</sup>, FENG Jian\_hu<sup>2</sup>, CAI Ti\_min<sup>1</sup>, HU Chun\_bo<sup>1</sup>

( 1. Box 164, Northwestern Polytechnical University, Xi' an, 710072, P. R. China;

2. College of Science, Changan University, Xi' an 710064, P. R. China)

**Abstract:** A numerical method for two\_phase flow with hydrodynamics behavior was considered. The nonconservative hyperbolic governing equations proposed by Saurel and Gallout were adopted. Dissipative effects were neglected but they could be included in the model without major difficulties. Based on the opinion proposed by Abgrall that “ a two phase system, uniform in velocity and pressure at  $t = 0$  will be uniform on the same variable during its temporal evolution”, a simple accurate and fully Eulerian numerical method was presented for the simulation of multiphase compressible flows in hydrodynamic regime. The numerical method relies on Godunov\_type scheme, with HLLC and Lax\_Friedrichs type approximate Riemann solvers for the resolution of conservation equations, and non-conservative equation. Speed relaxation and pressure relaxation processes were introduced to account for the interaction between the phases. Test problem was presented in one space dimension which illustrated that our scheme is accurate, stable and oscillation free.

**Key words:** compressible two\_phase flow; relaxation process; approximate Riemann solver