文章编号: 1000_0887(2006) 03_0316_09

K¾hler 流形上的 Hamilton 力学*

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(周哲 玮推 荐)

摘要: 利用力学原理、现在微分几何理论和高等微积分把 Hamilton 力学推广至 K¾hler 流形上, 建立 K¾hler 流形上 Hamilton 力学, 并得到 Hamilton 向量场、Hamilton 方程等复的数学形式•

关 键 词: K¾hler 流形; 联络; 绝对微分; Lie 导数; Hamilton 向量场; 1_参数群

中图分类号: O313.3　　文献标识码: A

引　　言

Hamilton 力学是分析力学的重要的组成部分• Riemann 流形上的 Hamilton 力学已知• (见文献[1]~ 文献[6])• 所有这些都是实的情形• 复的情形如何? 即是说, 当力学系统的位形空间是复流形时它又怎样? 当力学系统的位形空间是 K¾hler 流形时, 我们已经建立了 K¾hler 流形上的 Newton 力学(见文献[7])• 现在我们建立 K¾hler 流形上的 Hamilton 力学•

1　几何结构和基本运算

设 M^n 是具有联络 D 的 K¾hler 流形• 在局部坐标系 $(U; z^j)$ 下, 它的度量

$$h = h_{jk}\,\mathrm{d}z^j \otimes \mathrm{d}z^k, \tag{1}$$

K¾hler 形式为

$$\Omega = (\mathrm{i}/2)\,h_{jk}\,\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}z^k, \tag{2}$$

其中, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $z^j = x^j + \mathrm{i}y^j$, $z^j = x^j - \mathrm{i}y^j$• TM 和 T^*M 是 M^n 的切丛和余切丛• $\mathscr{X}(M)$ 是 M^n 上的向量场的集合; $\mathscr{F}^1(M) = \mathscr{X}^*(M)$ 是 M^n 上的 1_形式场的集合• TM 在坐标领域 U 上的标架场是 $\left\{\partial_j, \partial_j\right\}_{j=1}^n$, T^*M 在 U 上的标架场是 $\left\{\mathrm{d}z^j, \mathrm{d}z^j\right\}_{j=1}^n$•

我们用度量 h 和 K¾hler 形式 Ω 定义 TM 和 T^*M 之间的丛同构如下

$$b: TM \to T^*M,\ \partial_{z^j} \mapsto \partial_{z^j}^{b} = (1/2)\,h_{jk}\,\mathrm{d}z^k,\ \partial_{z^j} \mapsto \partial_{z^j}^{b} = (1/2)\,h_{kj}\,\mathrm{d}z^k,$$

$$\# = b^{-1}: T^*M \to TM,\ \mathrm{d}z^j \mapsto \mathrm{d}z^{j\#} = 2h^{kj}\partial_{z^k},\ \mathrm{d}z^j \mapsto \mathrm{d}z^{j\#} = 2h^{jk}\partial_{z^k},$$

$$\Omega: TM \to T^*M,\ \partial_{z^j} \mapsto \Omega(\partial_{z^j}) = (\mathrm{i}/2)\,h_{jk}\,\mathrm{d}z^k,\ \partial_{z^j} \to \Omega(\partial_{z^j}) = (\mathrm{i}/2)\,h_{kj}\,\mathrm{d}z^k,$$

$$\Omega^{-1}: T^*M \to TM,\ \mathrm{d}z^j \mapsto \Omega^{-1}(\mathrm{d}z^j) = 2\mathrm{i}h^{kj}\partial_{z^k},\ \mathrm{d}z^j \to \Omega^{-1}(\mathrm{d}z^j) = -2\mathrm{i}h^{jk}\partial_{z^k}•$$

本文中, 我们将用外微分, 绝对微分和 Lie 导数•

---

* 收稿日期: 2004_11_10; 修订日期: 2005_11_04

作者简介: 张荣业(1938—), 男, 广东开平人, 研究员, 研究方向: 微分方程, 微分几何(Tel: + 86_10_62588645; E_mail: zry@math.ac.cn)•

2　K¾hler 流形上的 Hamilton 力学

我们首先给出一些定义和定理，然后讨论 Hamilton 力学•

定义 2.1　$\forall f \in \mathscr{F}^0(M)$ _0_形式场的集合，

$$V = df^{\#} \in \mathscr{X}(M), \tag{3}$$

称为由0_形式场 f 决定的梯度场•　而

$$X = \Omega^{-1}(df) \in \mathscr{X}(M), \tag{4}$$

称为由 f 决定的 Hamilton 向量场•　f 特称为 Hamilton 函数•　在 $(U; z^j)$ 下

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^j} = dz^j + \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j, \qquad f \in \mathscr{F}^0(M), \tag{5}$$

$$V = df^{\#} = 2h^{kj}\frac{\partial f}{\partial z^j}\partial_{z^k} + 2h^{jk}\frac{\partial f}{\partial z^j}\partial_{z^k} \in \mathscr{X}(M), \tag{6}$$

$$X = \Omega^{-1}(df) = 2ih^{kj}\frac{\partial f}{\partial z^j}\partial_{z^k} - 2ih^{jk}\frac{\partial f}{\partial z^j}\partial_{z^k} \in \mathscr{X}(M), \tag{7}$$

$$h(V, X) = 4ih^{sj}\frac{\partial f}{\partial z^s}\frac{\partial f}{\partial z^j}• \tag{8}$$

定理 2.2　若 f 是全纯的那末由 f 决定的梯度场和 Hamilton 向量场在度量 h 下正交：$h(V, X) = 0$ 而且 $X = iV$•

在力学中，我们一旦给出一个向量场，那末我们就已经给出了一个力学系统•　因此，我们给出了一个 Hamilton 向量场那末我们就给出了一个 Hamilton 系统•　我们一旦给出系统 S 的 Lagrange 函数 $L: TM \to C$ 那末我们已经决定了系统的运动规律和状态•　同样的，我们一旦给出了系统 S 的 Hamilton 函数 $H: T^* M \to C$（或者，$M^n \to C$）那末我们已经决定了系统的运动规律和状态•

定义 2.3　向量场 $X \in \mathscr{X}(M)$ 是局部 Hamilton 的，若形式 $\Omega(X)$ 是闭的：$d\,\Omega(X) = 0$•　X 是整体 Hamilton 的，若这个形式 $\Omega(M)$ 是完全的或者是一个函数的全微分•

定义 2.4　对 $X \in \mathscr{X}(M)$，若存在 $\theta \in \mathscr{F}^1(M)$ 使得 $\Omega(X) = \theta$，则 $X = \Omega^{-1}(\theta)$ 称为预_Hamilton 向量场•　若 θ 是某函数 $f \in \mathscr{F}^0(M)$ 的全微分，则 X 称为 Hamilton 向量场•

定义 2.5　$\forall H \in C^k(M, C)$ 决定 Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(dH)$ 的积分曲线的方程

$$\dot{z}^j = -2ih^{kj}\frac{\partial H}{\partial z^k}, \quad \dot{\bar{z}}^j = 2ih^{jk}\frac{\partial H}{\partial z^k} \tag{9}$$

称为 Hamilton 方程•

这样，具有速度向量 X 在 $T^* M$ 上运动的质点的运动方程是(9)•　在 K¾hler 流形 M^n 上仅由上述 Hamilton 系统的方程不足以解决复的力学问题•　例如，它不能把 K¾hler 流形 M^n 上的 Newton 力学和 Lagrange 力学联系起来•　因此，我们再考虑 M^n 的余切丛 $T^* M$ 上的 Hamilton 系统，使得它可以和 K¾hler 流形 M^n 和切丛 TM 上的 Newton 力学和 Lagrange 力学联系起来•

命 $\pi: TM \to M^n$，$\pi^*: T^* M \to M^n$ 为规范的丛投影•　那末，$\forall p \in M^n$，$\pi^{-1}(p) = T_pM$ 和 $\pi^{*-1}(p) = T_p^*(M)$ 分别是切丛和余切丛在点 p 的纤维•

如前，对开集 U，$(U; z^j)$ 是 M^n 的局部坐标系，那末，$\pi^{-1}(U)$（相关地，$\pi^{*-1}(U)$）是 TM（相关地，$T^* M$）的开子集，而 $(\pi^{-1}(U), z^j, \bar{z}^j, \dot{z}^j, \dot{\bar{z}}^j)$（相关地，$(\pi^{*-1}(U); z^j, \bar{z}^j, p_j, \bar{p}_j)$）是 TM（相关地，$T^* M$）在 $U \subset M^n$ 上的局部坐标系•

设 $V \in \mathscr{X}(M)$，$\omega \in \mathscr{F}^1(M)$ 表达为

$$V = z^j \partial_{z^j} + \bar{z}^j \partial_{z^j}, \quad \omega = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j \qquad \text{over}\, U \subset M^n, \tag{10}$$

(z^j, z^j) 和 (p_j, p_j) 是 V 和 ω 分别关于标架 $\left\{\partial_{z^j}, \partial_{z^j}\right\}_{j=1}^n$ 和 $\left\{\mathrm{d}z^j, \mathrm{d}z^j\right\}_{j=1}^n$ 的纤维坐标•

定理 2.6 在 $T^* M$ 上存在 1_形式场 $\theta \in \mathscr{F}^1(T^* M): T^* M \to T^*(T^* M)$

$$\theta = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j \qquad \text{在 } \pi^{*-1}(U) \subset T^* M \text{ 上}, \tag{11}$$

在 $T^* M$ 上称为规范 1_形式场•

证明 形式场 $\alpha \in \mathscr{F}^1(T^* M)$ 和向量场 $X \in \mathscr{X}(T^* M)$ 一般地表示为

$$\alpha = a_j \mathrm{d}z^j + a_j \mathrm{d}z^j + b_j \mathrm{d}p_j + b_j \mathrm{d}p_j \qquad \text{在 } \pi^{*-1}(U) \text{ 上},$$

$$X = \xi^j \partial_{z^j} + \xi^j \partial_{z^j} + \eta^j \partial_{p_j} + \eta^j \partial_{p_j} \qquad \text{在 } \pi^{*-1}(U) \text{ 上}•$$

切丛的规范投影 $\pi^*: T^* M \to M^n, (z^j, z^j, p_j, p_j) \mapsto (z^j, z^j)$ 诱导两个映射

$$(\pi^*)_*: T(T^* M) \to TM, \ \partial_{z^j} \mapsto \partial_{z^j}, \ \partial_{z^j} \mapsto \partial_{z^j}, \ \partial_{p_j} \mapsto 0, \ \partial_{p_j} \mapsto 0,$$

$$(\pi^*)^*: T^* M \to T^*(T^* M), \ \mathrm{d}z^j \mapsto \mathrm{d}z^j, \ \mathrm{d}z^j \mapsto \mathrm{d}z^j$$

因此, 对 $X \in \mathscr{X}(T^* M)$,

$$(\pi^*)_* X = \xi^j \partial_{z^j} + \xi^j \partial_{z^j} \in \mathscr{X}(M) \text{ 在 } U \text{ 上}$$

对 U 上的 $\omega = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j \in \mathscr{F}^1(M)$, 我们有

$$\langle \alpha, X \rangle = \langle \omega, (\pi^*)_* X \rangle,$$

$$a_j \xi^j + a_j \xi^j + b_j \eta^j + b_j \eta^j = p_j \xi^j + p_j \xi^j,$$

因此, $a_j = p_j$, $a_j = p_j$, $b_j = 0$, $b_j = 0$• 而且, $\alpha = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j$• 我们以 θ 表示它•

定义 2.7 1_形式 θ 的外微分

$$\Omega = -\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}p_j + \mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}p_j \in \mathscr{F}^2(T^* M), \tag{12}$$

称为 $T^* M$ 的基本 2_形式•

为了节省符号, Ω 仍记为 Ω•

上述 $T(T^* M)$ 和 $T^*(T^* M)$ 分别为 $T^* M$ 的切丛和余切丛• $\mathscr{X}(T^* M)$, $\mathscr{F}^1(T^* M)$ 分别是 $T^* M$ 上的向量场和 1_形式场的集合• 没有特别的说明, 他们都具有一定的光滑性, 不必是全纯•

$$\Omega: T(T^* M) \to T^*(T^* M), \ \partial_{z^j} \mapsto \Omega(\partial_{z^j}) = \mathrm{d}p_j, \ \partial_{z^j} \mapsto \Omega(\partial_{z^j}) = \mathrm{d}p_j,$$

$$\partial_{p_j} \mapsto \Omega(\partial_{p_j}) = -\mathrm{d}z^j, \ \partial_{p_j} \mapsto \Omega(\partial_{p_j}) = -\mathrm{d}z^j \tag{13}$$

是丛同构, 其中, $\left\{\partial_{z^j}, \partial_{z^j}, \partial_{p_j}, \partial_{p_j}\right\}_{j=1}^n$ 和 $\left\{\mathrm{d}z^j, \mathrm{d}z^j, \mathrm{d}p_j, \mathrm{d}p_j\right\}_{j=1}^n$ 分别是 $T(T^* M)$ 和 $T^*(T^* M)$ 在 $\pi^{*-1}(U) \subset T^* M$ 上的标架场• 由(13)

$$\Omega^{-1}: T^*(T^* M) \to T(T^* M), \ \mathrm{d}z^j \mapsto \Omega^{-1}(\mathrm{d}z^j) = -\partial_{p_j}, \ \mathrm{d}z^j \mapsto \Omega^{-1}(\mathrm{d}z^j) = -\partial_{p_j},$$

$$\mathrm{d}p_j \mapsto \Omega^{-1}(\mathrm{d}p_j) = \partial_{z^j}, \ \mathrm{d}p_j \mapsto \Omega^{-1}(\mathrm{d}p_j) = \partial_{z^j}• \tag{14}$$

定义 2.8 $\forall H \in C^k(T^* M, C)$ 或 $\mathscr{F}^0(T^* M)$, 向量场

$$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) \tag{15}$$

是 $T^* M$ 上由 H 决定的 Hamilton 向量场• 在坐标系 $(\pi^{*-1}(U); z^j, z^j, p_j, p_j)$ 中,

$$H = H(z^j, z^j, p_j, p_j), \ \mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial z^j}\mathrm{d}z^j + \frac{\partial H}{\partial z^j}\mathrm{d}z^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j \in \mathscr{F}^1(T^* M),$$

$$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial_{z^j} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial_{z^j} - \frac{\partial H}{\partial z^j}\partial_{p_j} - \frac{\partial H}{\partial z^j}\partial_{p_j} \in \mathscr{X}(T^* M), \tag{16}$$

向量场 X 的积分曲线的方程是

$$\dot{z}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{\bar{z}}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial z^j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial z^j}, \tag{17}$$

并称为 Hamilton 方程•

相对于定义 2.3 及 2.4 的定义不再写出• 为了讨论 K¾hler 流形上的 Lagrange 力学, 我们以 Lagrange 函数

$$L \in C^m(TM, C), L(z^j, z^j, \dot{z}^j, \dot{\bar{z}}^j) = \omega(V) - H(z^j, z^j), \tag{18}$$

开始, 其中, $\omega = (\mathrm{i}/2) z^j \mathrm{d}z^j$ 或者 $\omega = (\mathrm{i}/4)(z^j \mathrm{d}z^j - z^j \mathrm{d}z^j)$, $V = \dot{z}^j \partial_{z^j} + \dot{\bar{z}}^j \partial_{z^j}$, $H \in C^k(M, C)$• Lagrange 方程

$$D_{z^j} L = 0,\ D_{z^j} L = 0, \tag{19}$$

正是 Hamilton 方程

$$\dot{z}^j = -2\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial z^j},\ \dot{\bar{z}}^j = 2\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial z^j}, \tag{20}$$

这里,

$$\Omega = -\mathrm{d}\omega = (\mathrm{i}/2)\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}z^j, \tag{21}$$

Hamilton 向量场是

$$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = -2\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial z^j}\partial_{z^j} + 2\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial z^j}\partial_{z^j}, \tag{22}$$

(20) 是(22) X 的积分曲线的方程• 这正是当 $M^n = C^n$ 时或者局部平坦的 K¾hler 流形时的情况• 更一般地, 若在 $U \subset M^n$ 上, $\omega = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j \in \mathscr{F}^1(M)$, V 如上, $H \in C^k(T^* M, C)$• 因此, $\omega(V) = p_j \dot{z}^j + p_j \dot{\bar{z}}^j$, (18) 的 Lagrange 方程是

$$\mathrm{D}_{z^j} L = 0,\ \mathrm{D}_{z^j} L = 0,\ \mathrm{D}_{p_j} L = 0,\ \mathrm{D}_{p_j} L = 0,$$

它正是 Hamilton 方程(17)• 可以看到 $\omega(V)$ 是连结 TM 上的 Lagrange 力学和 $T^* M$ 上的 Hamilton 力学的纽带• ω 和 V 是两个支点• 由方程(18), 可见若 $L \in C^m(TM, C)$, $H \in C^k(T^* M, C)$ 给出, 则形式 $\omega \in \mathscr{F}^1(M)$ 不是任意的, 它必须是 $p_j = \partial L/\partial \dot{z}^j$, $p_j = \partial L/\partial \dot{\bar{z}}^j$• 且 $\dot{z}^j$、$\dot{\bar{z}}^j$ 可解出作为 (z^j, z^j, p_j, p_j) 的函数• 按照古典力学, p_j、p_j 称为复的“广义冲量”• 由此, 我们可以定义丛同构如

$$\mathscr{L}: TM \to T^* M,\ (z^j, z^j, \dot{z}^j, \dot{\bar{z}}^j) \mapsto (z^j, z^j, p_j, p_j), \tag{23}$$

它相当于古典力学中的 Legendre 变换• 特别, 若在 M^n 上运动的质点的速度向量 $V = \dot{z}^j \partial_{z^j} + \dot{\bar{z}}^j \partial_{z^j}$ 已知, 且 $L = T = h_{jk} \dot{z}^j \dot{\bar{z}}^k / 2$ 或者 $L = T - U = h_{jk} \dot{z}^j \dot{\bar{z}}^k / 2 - U(z^j, z^j)$, 那末, $p_k = h_{kj} \dot{\bar{z}}^j / 2$, $p_k = h_{jk} \dot{z}^j / 2$,

$$\omega = p_k \mathrm{d}z^k + p_k \mathrm{d}z^k = (1/2) h_{kj} \dot{\bar{z}}^j \mathrm{d}z^k + (1/2) h_{jk} \dot{z}^j \mathrm{d}z^k = V^b = \mathscr{L}(V), \tag{24}$$

这时, 丛同构 $\mathscr{L}$ 正是 $b: TM \to T^* M$• (18) 中 ω 正是(24)• 这样, 一旦我们知道了运动质点的速度向量 V, 那末我们便得到 $\omega = V^b$• 若我们还知道了 Lagrange 函数 $L \in C^m(TM, C)$ 那末, 由(18) 我们得到相应的 Hamilton 函数 $H = \omega(V) - L \in C^k(T^* M, C)$•

例　设 $V = \dot{z}^j \partial_{z^j} + \dot{\bar{z}}^j \partial_{z^j}$ 已知, 则 $2T = h(V, V) = \langle V^b, V \rangle = \omega(V)$, $T = (h/2)(V, V)$ 是动能• 命 $L = T - U = h_{jk} \dot{z}^j \dot{\bar{z}}^k / 2 - U(z^j, z^j)$ 则

$$\begin{aligned} H(z^j, z^j, p_j, p_j) &= \omega(V) - L = 2h^{kj} p_j p_k + U(z^j, z^j) = \\ &\quad E \circ \mathscr{L}^{-1}(z^j, z^j, p_j, p_j), \end{aligned} \tag{25}$$

$E = \omega(V) - L = T + U$ 是 TM 上的总机械能的表达, 而 $H = E \circ \mathscr{L}^{-1}$ 是总机械能在 $T^* M$ 上

的表达• 由(25)我们得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial z^s} = 2\dfrac{\partial h^{kj}}{\partial z^s}p_j p_k + \dfrac{\partial U}{\partial z^s}, & \dfrac{\partial H}{\partial \bar z^s} = 2\dfrac{\partial h^{kj}}{\partial \bar z^s}p_{\bar j} p_{\bar k} + \dfrac{\partial U}{\partial \bar z^s}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_s} = 2h^{ks}p_k, & \dfrac{\partial H}{\partial p_{\bar s}} = 2h^{sk}p_{\bar k}\bullet \end{cases} \tag{26}$$

由(17), 相应的 Hamilton 方程是

$$\begin{cases}\dot z^s = 2h^{ks}p_k, \quad \dot p_s = -2\dfrac{\partial h^{kj}}{\partial z^s}p_j p_k - \dfrac{\partial U}{\partial z^s}, \\ \dot{\bar z}^s = 2h^{sk}p_{\bar k}, \quad \dot p_{\bar s} = -2\dfrac{\partial h^{kj}}{\partial \bar z^s}p_{\bar j} p_{\bar k} - \dfrac{\partial U}{\partial \bar z^s}, \end{cases} \tag{27}$$

由(27)的第 1 个方程得到

$$\ddot z^s = 2(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)h^{ks}p_k + 2h^{ks}\dot p_k\bullet$$

注意: $0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_{s\bar k}h^{ks}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{s\bar k}h^{ks} + h_{s\bar k}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^{ks}$, 而且,

$$0 = \frac{\partial}{\partial z^k}(h^{sj}h_{j\bar s}) = \frac{\partial h^{sj}}{\partial z^k}h_{j\bar s} + h^{sj}\frac{\partial h_{j\bar s}}{\partial z^k},$$

上式两边用 $h_{s\bar k}$ 相乘, 并用(27)的第 4 个方程我们得到

$$\begin{aligned} h_{s\bar k}\ddot z^s = {} & 2h_{s\bar k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^{ks}p_k + 2\dot p_{\bar k} = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{s\bar k}h^{ks}p_k - 4\frac{\partial h^{sj}}{\partial \bar z^k}p_{\bar s}p_{\bar j} - 2\frac{\partial U}{\partial \bar z^k} = \\ & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{s\bar k}\dot z^s - \frac{\partial h^{sj}}{\partial \bar z^k}h_{j\bar s}\dot z^j h_{j\bar r}\dot{\bar z}^r - 2\frac{\partial U}{\partial \bar z^k} = \\ & -\left(\frac{\partial h_{s\bar k}}{\partial z^l}\dot z^l + \frac{\partial h_{s\bar k}}{\partial \bar z^l}\dot{\bar z}^l\right)\dot z^s + \frac{\partial h_{j\bar s}}{\partial \bar z^k}\dot z^l\dot{\bar z}^s - 2\frac{\partial U}{\partial \bar z^k} = \\ & -\frac{\partial h_{s\bar k}}{\partial z^l}\dot z^l\dot z^s + \left(\frac{\partial h_{s\bar l}}{\partial \bar z^k} - \frac{\partial h_{s\bar k}}{\partial \bar z^l}\right)\dot z^s\dot{\bar z}^l - 2\frac{\partial U}{\partial \bar z^k}, \end{aligned}$$

由于 M^n 是 K¾hler 流形, K¾hler 形式 Ω 的外微分为0: $\mathrm{d}\Omega = 0$, 因此上式的第 2 项为 0, 而且我们有

$$h_{s\bar k}\ddot z^s + \frac{\partial h_{s\bar k}}{\partial z^l}\dot z^l\dot z^s = -2\frac{\partial U}{\partial \bar z^k}, \tag{28}$$

同样, 由(27)的另一对方程我们得到

$$h_{k\bar s}\ddot{\bar z}^s + \frac{\partial h_{k\bar s}}{\partial \bar z^l}\dot{\bar z}^l\dot{\bar z}^s = -2\frac{\partial U}{\partial z^k}, \tag{29}$$

(28) 和(29)正是 Lagrange 方程 $D_{z^k}L = 0$ 和 $D_{\bar z^k}L = 0$• 而且它们正是在力场 $F = -\mathrm{d}U$ 下的 Newton 方程: $\mathrm{D}V^b/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}U$ 的坐标表示• 重写上述二方程(28)和(29)得到 Newton 方程的另一式样

$$\ddot z^s + \Gamma^s_{lr}\dot z^l\dot z^r = -2h^{ks}\frac{\partial U}{\partial \bar z^k}, \tag{30}$$

$$\ddot{\bar z}^s + \Gamma^{\bar s}_{\bar l\bar r}\dot{\bar z}^l\dot{\bar z}^r = -2h^{sk}\frac{\partial U}{\partial z^k}, \tag{31}$$

这正是 Newton 方程 $\mathrm{D}V/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}U^{\#}$ 的坐标表示• 如前, $\mathrm{D}V/\mathrm{d}t$ 是向量场 $V = \dot z^j\partial_{z^j} + \dot{\bar z}^j\partial_{\bar z^j}$ 关于时间 t 的绝对导数, 是加速度向量• 因此我们可看到 Hamilton 方程(17)或(27)与 Lagrange 方程和 Newton 方程的关系• 这是同一个运动系统的不同表示• 它极像 Riemann 流形上的那些方程• 它们的差别是前者是实的, 后者是复的• 前者的位形空间是 Riemann 流形, 后者的位形空间是 K¾hler 流形• 特别, 前者是 Euclid 空间 R^n 后者是 Hermit 空间 C^n•

由于 $E = T + U = \omega(V) - L$, 其中 $L = T - U$, 而且 $\mathscr{L}(V) = \omega$, $V = \mathscr{L}^{-1}(\omega)$. 由(25)

$$H = \omega(V) - L = \omega(\mathscr{L}^{-1}(\omega)) - L\circ\mathscr{L}^{-1}(\omega) = E\circ\mathscr{L}^{-1}(\omega)$$

以及(23) 和(24), 我们有

$$H = E\circ\mathscr{L}^{-1}(\omega) = p_j\,\mathrm{d}\dot z^j\circ\mathscr{L}^{-1} + p_j\dot{\bar z}^j\circ\mathscr{L}^{-1} - L\circ\mathscr{L}^{-1},$$

$$\mathrm{d}H = \dot z^j\circ\mathscr{L}^{-1}\mathrm{d}p_j + p_j\,\mathrm{d}\dot z^j\circ\mathscr{L}^{-1} + \dot{\bar z}^j\circ\mathscr{L}^{-1}\mathrm{d}p_j + p_j\,\mathrm{d}\dot{\bar z}^j\circ\mathscr{L}^{-1} - \mathrm{d}L\circ\mathscr{L}^{-1},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L\circ\mathscr{L}^{-1} &= (\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}L = (\mathscr{L}^{-1})^*\left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\mathrm{d}z^j + \frac{\partial L}{\partial z^j}\mathrm{d}z^j + \frac{\partial L}{\partial \dot z^j}\mathrm{d}\dot z^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar z}^j}\mathrm{d}\dot{\bar z}^j\right) = \\ &\left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}z^j + \left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}z^j + \\ &\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}\dot z^j + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar z}^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}\dot{\bar z}^j = \\ &\left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)\mathrm{d}z^j + \left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)\mathrm{d}z^j + p_j(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}\dot z^j + p_j(\mathscr{L}^{-1})^*\,\mathrm{d}\dot{\bar z}^j.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}H = \dot z^j\circ\mathscr{L}^{-1}\mathrm{d}p_j + \dot{\bar z}^j\circ\mathscr{L}^{-1}\mathrm{d}p_j - \left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)\mathrm{d}z^j - \left(\frac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}\right)\mathrm{d}z^j,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial z^j} = -\dfrac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}, & \dfrac{\partial H}{\partial p_j} = \dot z^j\circ\mathscr{L}^{-1}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial z^j} = -\dfrac{\partial L}{\partial z^j}\circ\mathscr{L}^{-1}, & \dfrac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{\bar z}^j\circ\mathscr{L}^{-1},\end{cases} \tag{32}$$

这样, 若 $\gamma(t) = (z^j(t), z^j(t), \dot z^j(t), \dot{\bar z}^j(t)) \subset \pi^{-1}(U) \subset TM$ 是Lagrang系统运动的轨线, 那末它满足 Lagrange 方程 $D_{z^j}L = 0$, $D_{z^j}L = 0$. 由(32)

$$\mathscr{L}\circ\gamma(t) = (z^j(t), z^j(t), p_j(t), p_j(t)) \subset \pi^{*-1}(U) \subset T^*M,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_j}(\mathscr{L}\circ\gamma(t)) = \dot z^j(t), \quad \dfrac{\partial H}{\partial p_j}(\mathscr{L}\circ\gamma(t)) = \dot{\bar z}^j(t), \\ \dfrac{\partial H}{\partial z^j}(\mathscr{L}\circ\gamma(t)) = -\dfrac{\partial L}{\partial z^j}(\gamma(t)) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot z^j}(\gamma(t)) = -\dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}(t), \\ \dfrac{\partial H}{\partial z^j}(\mathscr{L}\circ\gamma(t)) = -\dfrac{\partial L}{\partial z^j}(\gamma(t)) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\bar z}^j}(\gamma(t)) = -\dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}(t).\end{cases} \tag{33}$$

定理 2.9　若 $\gamma(t)$ 是Lagrange方程 $D_{z^j}L = 0$, $D_{z^j}L = 0$ 的解, 则 $\mathscr{L}\circ\gamma$ 是Hamilton 方程(17)的解.

这样, 质点按照Lagrange 方程在 TM 上的运动的轨线 γ 的像 $\mathscr{L}\circ\gamma$ 是此质点按照Hamilton方程在 T^*M 上运动的轨线. 它在 M^n 上的投影 $\pi\circ\gamma$ 是该质点在 M^n 上按照Newton 方程运动的轨线.

当 $L = T - U$ 时, 总机械能是

$$E = T + U = \omega(V) - L = \frac{\partial L}{\partial \dot z^k}\dot z^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar z}^k}\dot{\bar z}^k - L.$$

因此有

定理 2.10(能量守恒定律)　质点在势场的作用下在Kähler 流形上运动的动能和势能之和是常数.

证明　只要证明 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. 事实上,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot z^k}\dot z^k+\frac{\partial L}{\partial\dot z^k}\ddot z^k+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar z}^k}\dot{\bar z}^k+\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar z}^k}\ddot{\bar z}^k-\frac{\partial L}{\partial z^k}\dot z^k-\frac{\partial L}{\partial \bar z^k}\dot{\bar z}^k-\frac{\partial L}{\partial\dot z^k}\ddot z^k-\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar z}^k}\ddot{\bar z}^k=$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot z^k}-\frac{\partial L}{\partial z^k}\right)\dot z^k+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar z}^k}-\frac{\partial L}{\partial \bar z^k}\right)\dot{\bar z}^k=$$

$$(D_{z^k}L)\dot z^k+(D_{\bar z^k}L)\dot{\bar z}^k=0,$$

因为,质点运动的轨迹满足 Lagrange 方程 $D_{z^j}L=0,\ D_{\bar z^j}L=0$。 再者

$$H=E\circ\mathscr{L}^{-1}(z^j,\bar z^j,p_j,\bar p_j)=2h^{kj}p_j\bar p_k+U(z^j,\bar z^j),$$

我们另有一定理。

定理 2.11 Hamilton 函数(总能量) $H(z^j,\bar z^j,p_j,\bar p_j)$ 沿着由它决定的 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的积分曲线是常数,即 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=0$,或者说,$H$ 沿 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的方向导数(Lie 导数)为 0,$L_XH=0$,而 H 是 X 的首次积分。

证明 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的轨线的方程是 Hamilton 方程。 因此

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial z^j}\dot z^j+\frac{\partial H}{\partial \bar z^j}\dot{\bar z}^j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot p_j+\frac{\partial H}{\partial \bar p_j}\dot{\bar p}_j=L_XH=0,$$

但是,$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=X(H)=L_XH=0$。 而 L_XH 是 H 关于 X 的 Lie 导数。

系 2.12 Hamilton 函数 $H\in C^k(M^n,C)$ 沿 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的积分曲线是常数,即 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=0$。 事实上,由定义 2.5

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial z^j}\dot z^j+\frac{\partial H}{\partial \bar z^j}\dot{\bar z}^j=-2\mathrm{i}h^{kj}\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\partial H}{\partial \bar z^k}+2\mathrm{i}h^{jk}\frac{\partial H}{\partial \bar z^j}\frac{\partial H}{\partial z^k}=0。$$

定理 2.13 对 Hamilton 函数 $H\in C^k(T^*M,C)$(相应地,$\in C^k(M^n,C)$) $\Omega=\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}p_j+\mathrm{d}\bar z^j\wedge\mathrm{d}\bar p_j$(相应地,$\Omega=(\mathrm{i}/2)h_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar z^k$),$\Omega$ 关于 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的 Lie 导数是 0

$$L_X\Omega=0。\tag{34}$$

事实上,$L_X\Omega=X\lrcorner\mathrm{d}\Omega+\mathrm{d}(X\lrcorner\Omega)$,$\mathrm{d}\Omega=0$,而 $X\lrcorner\Omega=\mathrm{d}H$。 因此 $L_X\Omega=0$。 这里 d 是外微分算子。 而 $\lrcorner$ 是向量场和形式场的内积。

另方面,设 F_t 是由 Hamilton 向量场 $X\in\mathscr{X}(T^*M)$(或 $\in\mathscr{X}(M)$)决定的流。 它决定力学系统的运动的定律。

若 $(z^j,\bar z^j,p_j,\bar p_j)\in T^*M$ 是系统 S 在 $t=0$ 的运动的初始状态,则在 $t>0$ 系统 S 的运动状态是 $(z^j(t),\bar z^j(t),p_j(t),\bar p_j(t))$。 它是当系统的状态随着时间的过去而发展时在 T^*M 上画出的一条曲线。 它是由 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 决定的 Hamilton 方程(17) 的解。 它的初始条件是系统在 $t=0$ 时的初始状态。

同样,若 F_t 是 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)\in\mathscr{X}(M)$ 的流,系统 S 在 $t=0$ 初始状态是 $(z^j,\bar z^j)$,则 S 在 $t>0$ 的状态是 $(z^j(t),\bar z^j(t))=F_t(z^j,\bar z^j)$。 它是 Hamilton 方程(9) 在初始条件 $(z^j,\bar z^j)$ 下的解。 二者综合起来得到

定理 2.14 设 $X\in\mathscr{X}(M)$ 或者 $X\in\mathscr{X}(T^*M)$ 是 Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$,$F_t$ 是 X 的流,那末

1) $F_t^*\Omega=\Omega$,$\Omega=(\mathrm{i}/2)h_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar z^k$,或 $\Omega=\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}p_j+\mathrm{d}\bar z^j\wedge\mathrm{d}\bar p_j$, (35)

2) $F_t^*H=H$,能量是守恒的。 (36)

证明 1) 设 $\Omega=(\mathrm{i}/2)h_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar z^k$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t^*\Omega=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega\circ F_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}h_{jk}\circ F_t\mathrm{d}z^j\circ F_j\wedge\mathrm{d}\bar z^k\circ F_t\right)=$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{jk}\circ F_t\mathrm{d}z^j\circ F_t\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k\circ F_t+\right.$$
$$\left.h_{jk}\circ F_t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z^j\circ F_t\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k\circ F_t+\mathrm{d}z^j\circ F_t\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\bar{z}^k\circ F_t\right]\right)=$$
$$(\mathrm{i}/2)F_t^*(L_Xh_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k+h_{jk}L_X\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k+h_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge L_X\mathrm{d}\bar{z}^k)=$$
$$F_t^*L_X\Omega,$$

由定理2.13, $L_X\Omega=0$• 因此, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)F_j^*\Omega=0$, $\Rightarrow F_t^*\Omega=\Omega$, F_t^* 保持 Ω•

同样, 对 $\Omega=\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}p_j+\mathrm{d}\bar{z}^j\wedge\mathrm{d}\bar{p}_j$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t^*\Omega=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}z^j\circ F_t\wedge\mathrm{d}p_j\circ F_t+\mathrm{d}\bar{z}^j\circ F_t\wedge\mathrm{d}\bar{p}_j\circ F_t)=$$
$$F_t^*(L_X\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}p_j+\mathrm{d}z^j\wedge L_X\mathrm{d}p_j+L_X\mathrm{d}\bar{z}^j\wedge\mathrm{d}\bar{p}_j+\mathrm{d}\bar{z}^j\wedge L_X\mathrm{d}\bar{p}_j)=$$
$$F_t^*L_X\Omega,$$

由定理2.13, $L_X\Omega=0$• 因此, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)F_j^*\Omega=0$, $\Rightarrow F_t^*\Omega=\Omega$, F_t^* 保持 Ω•

2) 对 $H\in C^k(M^n,C)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t^*H=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H\circ F_t=\frac{\partial H}{\partial z^j}\circ F_t\frac{\mathrm{d}z^j\circ F_t}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\circ F_t\frac{\mathrm{d}\bar{z}^j\circ F_t}{\mathrm{d}t}=$$
$$F_t^*\left(\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\frac{\mathrm{d}\bar{z}^j}{\mathrm{d}t}\right)=F_t^*L_XH,$$

同样, 对 $H\in C^k(T^*M,C)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t^*H=\frac{\partial H\circ F_t^*}{\partial z^j}\frac{\mathrm{d}z^j\circ F_t^*}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H\circ F_t^*}{\partial\bar{z}^j}\frac{\mathrm{d}\bar{z}^j\circ F_t^*}{\mathrm{d}t}+$$
$$\frac{\partial H\circ F_t^*}{\partial p_j}\frac{\mathrm{d}p_j\circ F_t^*}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H\circ F_t^*}{\partial\bar{p}_j}\frac{\mathrm{d}\bar{p}_j\circ F_t^*}{\mathrm{d}t}=$$
$$F_t^*\left(\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\frac{\mathrm{d}\bar{z}^j}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\bar{p}_j}\frac{\mathrm{d}\bar{p}_j}{\mathrm{d}t}\right)=F_t^*L_XH,$$

由定理2.12• $L_XH=\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=0$, 即 $F_t^*H=H$, F_t^* 保持 H•

2) 是能量守恒定律的另一种式样: 1) 表明 M^n 或 T^*M 上的Hamilton 向量场的流分别保持 M^n 的Kähler 形式和 T^*M 的基本 2_形式•

定义 2. 15　$\forall f,g\in C^k(M^n,C)$,

$$\begin{cases}X_f=\Omega^{-1}(\mathrm{d}f)=-2\mathrm{i}h^{kj}\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}^k}\dfrac{\partial}{\partial z^j}+2\mathrm{i}h^{jk}\dfrac{\partial f}{\partial z^k}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^j},\\ L_{X_f}g=X_f(g)=-2\mathrm{i}h^{kj}\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}^k}\dfrac{\partial g}{\partial z^j}+2\mathrm{i}h^{jk}\dfrac{\partial f}{\partial z^k}\dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}^j}=\{f,g\},\end{cases}\tag{37}$$

$\forall f,g\in C^k(T^*M,C)$,

$$\begin{cases}X_f=\Omega^{-1}(\mathrm{d}f)=\dfrac{\partial f}{\partial p_j}\dfrac{\partial}{\partial z^j}+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{p}_j}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^j}-\dfrac{\partial f}{\partial z^j}\dfrac{\partial}{\partial p_j}-\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}^j}\dfrac{\partial}{\partial\bar{p}_j},\\ L_{X_f}=X_f(g)=\dfrac{\partial f}{\partial p_j}\dfrac{\partial g}{\partial z^j}+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{p}_j}\dfrac{\partial g}{\partial\bar{z}^j}-\dfrac{\partial f}{\partial z^j}\dfrac{\partial g}{\partial p_j}-\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}^j}\dfrac{\partial g}{\partial\bar{p}_j}=\{f,g\},\end{cases}\tag{38}$$

$\{f,g\}$ 也分别称为 $C^k(M^n,C)$ 和 $C^k(T^*M,C)$ 上的Poisson 括号• 而且显然

$$L_{X_f}g=X_f(g)=\{f,g\}=-\{g,f\}=-X_g(f)=-L_{X_g}f,\tag{39}$$

特别

$$L_{X_H}H=X_H(H)=\{H,H\}=0•\tag{40}$$

在物理和力学中 Hamilton 函数称为能量• 上述表达式是能量守恒定律的另一种表达• 流 F_t 也称为 1_参数变换群•

定理 2. 16 1) 设 $f \in C^k(M^n, C)$ 或 $\in C^k(T^* M, C)$ 是决定 1_参数变换群 $\{F_t\}_t$ 的一个观察(an observe)• 对 $g \in C^l(M^n, C)$ 或 $\in C^l(T^* M, C)$, 若 $X_f(g) = \{f, g\} = 0$ 则 g 在 F_t_轨线上是常数, 即 g 是系统的首次积分•

2) $X_f(g) = 0 \Leftrightarrow X_g(f) = 0$• (41)

3) $\{f, g\} = 0 \Leftrightarrow X_f(g) = 0$ 或 $X_g(f) = 0$• (42)

证明

1) 和定理 2. 15 的证明是一样的• 只要证明 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) g \circ F_t = 0$• 但是

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) F_t^* g = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t) g \circ F_t = F_t^* L_{X_f} g = F_t^* \{f, g\} = 0•$$

2) 是显然的• 它表明若 g 沿 X_f 的积分曲线是常数则 f 沿 X_g 的积分曲线也是常数• 反之也一样•

3) 也显然• 它表明 $H: X_H(g) = \{H, g\} = 0$ 的积分和单参数群之间的对应• 就是说, 若且仅若 H 沿 X_g 的积分曲线是常数等价于若且仅若 g 沿 X_H 的积分曲线是常数•

顺便指出, 当用 Riemann 流形取代 K¾hler 流形时我们可以从上面所讨论的 Newton 力学, Lagrange 力学和 Hamilton 力学得到相应的结果, 即 Riemann 流形上的动力学•

[参 考 文 献]

[1] 干特马赫尔 . 分析力学[M]. 钟奉俄, 薛问西 译. 北京: 人民教育出版社, 1963, 1—163.

[2] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics [M]. New York: Springer_Verlag, 1978, 1—300.

[3] Arnold V I. Mathematical Aspect of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol **3**. Dynamical Systems 3[M]. New York: Springer_Verlag, 1985, 1—48.

[4] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics [M]. Orlando, Florida: Academic Press Inc, 1985, 1—191.

[5] Dubrorin B A, Fomenko A T, Novikov S P. Modern Geometry —Methods and Application [M]. Parts Ⅰ, Parts Ⅱ. New York: Springer_Verlag, New York Inc, 1984, 1—374, 1—357.

[6] von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1978, 335—439.

[7] 张荣业. 关于 K¾hler 流形上的 Newton 力学[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(8): 709—720.

Hamiltonian Mechanics on K¾hler Manifolds

ZHANG Rong_ye

(Institute of Mathematics, Chinese Academia of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: The mechanical principle, the theory of Modem geometry and advanced calculus, Hamiltonian mechanic was generalized to K¾hler manifolds, and the Hamiltonian Mechanic on K¾hler Manifolds was established. Then the complex mathematical aspect of Hamiltonian vector field and Hamilton's equations etc was obtained.

Key words: K¾hler manifold; connection; absolute differential; Lie derivative; Hamiltonian vector; 1_parameter group