

文章编号: 1000-0887(2006)03-0311-05

# 刚性轴对称狭窄血管内压强 及其梯度的研究<sup>\*</sup>

姚 力, 李大治

(南通大学 理学院, 江苏 南通 226001)

(李家春推荐)

摘要: 基于对 Karman\_Pohlhausen 方法的改进, 运用非线性多项式拟合和数值积分, 导出了刚性轴对称狭窄管内压强及其梯度的轴向分布, 讨论了该分布与雷诺数和狭窄管几何形状之间的关系。结果表明随狭窄度和雷诺数的增加, 压强及其梯度在狭窄区域的振荡会迅速加剧, 并逐渐导致舒张区出现负压强。尤其在狭窄的轴向区域变宽时, 舒张区的血流状态会受到较大影响。在高雷诺数和重度狭窄时, 理论计算与过去的实验结果基本一致。

关键词: 刚性管; 狭窄; 压强; 梯度; 雷诺数

中图分类号: R318.01 文献标识码: A

## 引 言

动脉局部狭窄对血液的流动状态会产生明显影响, 带来一系列生理、生化和病理方面的复杂变化, 并导致狭窄进一步发展。例如, 动脉硬化斑块主要发生于几何形状急剧变化和高雷诺数流动状态的血管内<sup>[1]</sup>。因此, 对狭窄管内的压强及其梯度进行研究, 有助于从一个侧面了解狭窄区域血流的动力学状态, 提供动脉狭窄形成和发展的重要信息, 在心血管疾病的临床诊断方面也有十分光明的应用前景。在该领域已获得了大量理论计算<sup>[2~5]</sup>和实验研究<sup>[6,7]</sup>的成果, 但理论计算仍与实验结果存在一定差异, 特别是在重度狭窄和较高雷诺数时, 无法相互印证。考虑到狭窄管的刚性模型已有一些实验数据, 本文对 Karman\_Pohlhausen 方法<sup>[8,9]</sup>加以改进, 轴向速度的抛物线形式被改变为多项式, 导出了狭窄管内较简洁的压强及其梯度的轴向分布, 讨论了该分布与雷诺数和狭窄管几何形状参数的相互关系。

## 1 轴对称刚性狭窄管中血液流动的方程

采用 Karman\_Pohlhausen 方法, 对局部狭窄血管内流体的 Navier\_Stokes 方程组沿管径向  $r$  积分后, 该方程组化为如下形式<sup>[1]</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u^2 \cdot r \cdot dr = - \frac{R^2}{2\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \nu \cdot R \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2004\_05\_08; 修订日期: 2005\_09\_12

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金项目(02KJD180004)

作者简介: 姚力(1962—), 男, 上海人, 副教授, 硕士(Tel: + 86\_513\_85051711; E\_mail: yaoli88@pub.nt.js-info.net)。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u \cdot r \cdot dr = 0, \quad (2)$$

其中  $p$ 、 $u$  和  $v$  分别为压强、轴向和径向速度,  $\rho$  和  $\nu$  分别为流体的密度和运动粘度,  $R$  为管的半径. 方程组满足的边界条件为: (a)  $u|_{r=R} = 0$ ,  $v|_{r=R} = 0$ ; (b)  $\partial u / \partial r|_{r=0} = 0$ ,  $v|_{r=0} = 0$ .

假设满足 (1) 式和 (2) 式的轴向速度具有如下形式

$$u(r, x) = A \cdot \xi + B \cdot \xi^2 + C \cdot \xi^3 + D, \quad (3)$$

其中  $\xi = (R - r)/R$ ,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  是与轴向坐标  $x$  相关的系数. 将 (3) 式代入边界条件 (a)、(b) 和 (2) 式中, 解出该系数后, 轴向速度可表示为

$$u(r, x) = \frac{2q - 3\lambda}{21} \cdot \xi + \frac{q + 9\lambda}{21} \cdot \xi^2 - \frac{4q + 15\lambda}{63} \cdot \xi^3, \quad (4)$$

其中  $q = (30Q)/(\pi R^2)$  为与狭窄断面流速有关的参量,  $\lambda = (R^2/(\rho \nu))(dp/dx)$  为与压强梯度有关的参量.  $Q$  为未狭窄血管处的流量.

为了确定  $\lambda$ , 将 (4) 式代入 (1) 式, 并注意到

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{2a \cdot q}{R^2}, \quad \frac{d\lambda}{dx} \approx -\frac{2 \cdot a \cdot \lambda}{R^2},$$

其中  $a = R \cdot (dR/dx)$ , 可得  $\lambda$  满足的方程为

$$D_1 \cdot \lambda^2 + D_2 \cdot \lambda + D_3 = 0, \quad (5)$$

其中  $D_1 = 15 \cdot a$ ,  $D_2 = 36 \cdot a \cdot q - 22050 \cdot \nu$ ,  $D_3 = 100 \cdot a \cdot q^2 - 5880 \cdot \nu \cdot q$ . 从方程 (5) 式中解  $\lambda$  得

$$\lambda = \frac{R^2}{\mu} \left[ \frac{dp}{dx} \right] = -\frac{[D_2 + \sqrt{\Delta}]}{2 \cdot D_1}, \quad (6)$$

其中  $\Delta = D_2^2 - 4D_1 \cdot D_3$ . 二次方程的正根不符合管内轴向压强梯度为负的假设, 因而舍去. 由 (6) 式可直接解出压强梯度和压强

$$\left[ -\frac{dp}{dx} \right] = \frac{[D_2 + \sqrt{\Delta}] \cdot \mu}{2 \cdot D_1 \cdot R^2}, \quad (7)$$

$$\frac{p_0 - p}{\rho U_0^2} = \int_{-x_0}^x \frac{2 \cdot [D_2 + \sqrt{\Delta}] \cdot R_0^2}{D_1 \cdot \nu \cdot Re^2 \cdot R^2} dx, \quad (8)$$

其中  $p_0$  为  $x = -x_0$  处的压强,  $U_0$  为未狭窄处的血液流速, 以下计算取无狭窄处的管半径  $R_0 = 1.0$  cm, 血粘度  $\mu = 3.5$  cP (1 Pa · s = 1000 cP), 密度  $\rho = 1.05$  g/cm<sup>3</sup>.

## 2 结果与讨论

### 2.1 轴对称刚性狭窄管中压强梯度的轴向分布

压强梯度 (7) 式有实数解的轴线区间是由  $\Delta \geq 0$  确定的, 而在  $\Delta < 0$  的轴线区间内, 压强梯度仍然存在, 只是不满足方程组 (1) 式和 (2) 式. 考虑到压强梯度在轴线上的连续性, 可数值

采样  $\Delta > 0$  区间的压强梯度, 运用最小二乘原理<sup>[10]</sup> 在  $\Delta < 0$  区间内对  $n$  次多项式  $\sum_{i=1}^n B_i \cdot x^{i-1}$  ( $B_i$  为系数) 进行拟合, 以确定压强梯度在整个狭窄区间内的分布.

为了研究压强梯度的轴向分布与雷诺数和狭窄管几何参数的关系, 选取高斯狭窄模型:  $R = R_0(1 - \delta e^{-bx^2})$ , 其中  $\delta$  为无量纲狭窄度,  $b$  (单位: cm<sup>-2</sup>) 为轴向狭窄宽度参数. 结果如图 1~ 图 4 所示, 图中虚线为放大 100 倍的高斯狭窄管模型, 轴向坐标  $x$  从 -8 cm 到 8 cm.

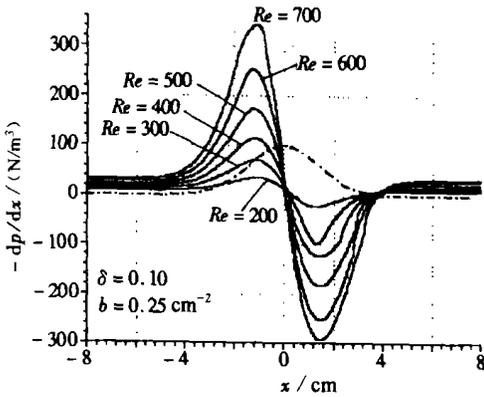


图1 压强梯度分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.10$ ,  $b = 0.25 \text{ cm}^{-2}$ ) 时随雷诺数的变化

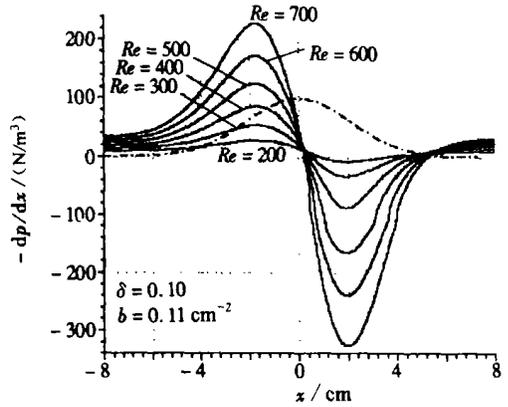


图2 压强梯度分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.10$ ,  $b = 0.11 \text{ cm}^{-2}$ ) 时随雷诺数的变化

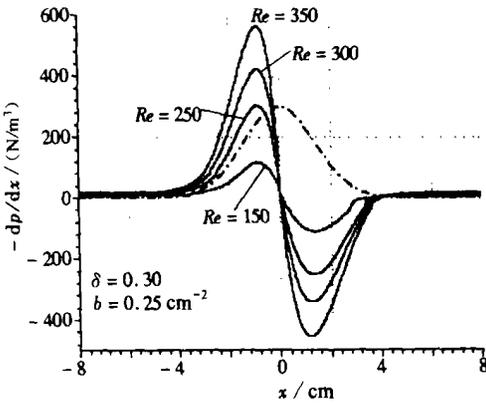


图3 压强梯度分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.30$ ,  $b = 0.25 \text{ cm}^{-2}$ ) 时随雷诺数的变化

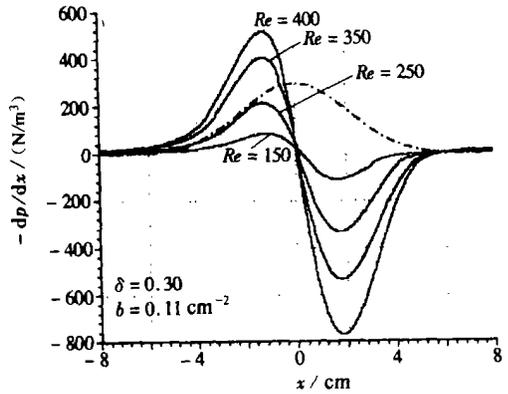


图4 压强梯度分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.30$ ,  $b = 0.11 \text{ cm}^{-2}$ ) 时随雷诺数的变化

从图1~图4可知: 1) 狭窄区域的压强梯度随雷诺数增大而呈现波动加剧的特征。在收缩区 ( $x < 0$ ) 压强梯度 ( $dp/dx$ ) 小于0, 而在舒张区 ( $x > 0$ ) 压强梯度则大于0。2) 当  $b$  和  $Re$  一定时, 狭窄度  $\delta$  从0.1(图1和图2) 变化为0.3(图3和图4) 后, 压强梯度的峰值会急剧增大。3) 当  $\delta$  和  $Re$  一定时, 随轴向狭窄宽度增大(即  $b$  变小), 在收缩区压强梯度峰高的绝对值会从大于舒张区的峰值转向小于, 且收缩区的峰值会减小, 而舒张区则增加。这表明动脉硬化斑块变宽会更明显地影响舒张区的血流状态, 因而斑块更多向舒张区域发展。4) 根据均直圆管的 Stokes 公式, 狭窄管的壁面剪应力  $\tau_w$  与压强梯度  $dp/dx$  具有相似性, 这一点从过去剪应力的理论计算曲线中<sup>[4]</sup> 也可得到印证。因此, 在斑块发展的初期(无流动分离), 管壁的剪应力  $\tau_w$  随压强梯度的增加而相应增大, 对血管壁的内皮细胞造成损伤, 导致壁面进一步异常增生。

### 2.2 轴对称刚性狭窄管中压强的轴向分布

选取不同雷诺数  $Re$ 、狭窄度 ( $\delta = 0.10$  和  $\delta = 0.30$ ) 以及不同的狭窄管几何曲线: 1) 高斯型  $R = R_0(1 - \delta e^{-bx^2})$ , 2) 余弦型  $R = R_0[1 - (\delta/2)(1 + \cos(\pi x/x_0))]$ , 对(8)式右边进行数值积分<sup>[10]</sup>, 作压强在狭窄区间变化的曲线如图5~图8所示, 其中  $b = 0.25 \text{ cm}^{-2}$ ,  $x_0 = 4.0 \text{ cm}$ 。

从图5~图8可知: 1) 在相同的雷诺数和狭窄类型下, 血管狭窄度越大, 收缩区压强的下

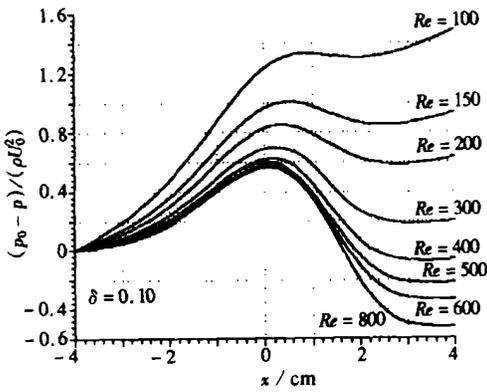


图5 压强分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.10$ ) 时随雷诺数的变化

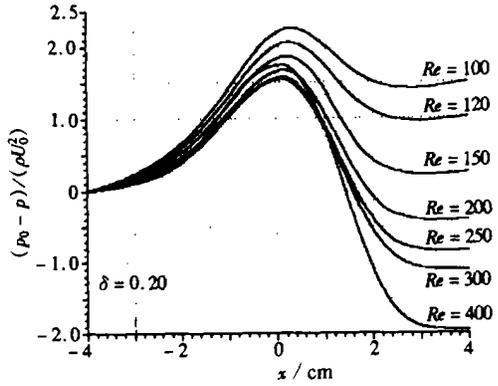


图6 压强分布在高斯型狭窄 ( $\delta = 0.20$ ) 时随雷诺数的变化

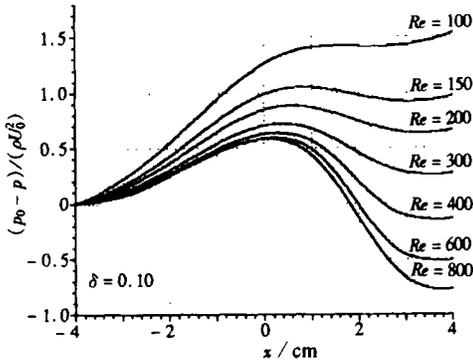


图7 压强分布在余弦型狭窄 ( $\delta = 0.10$ ) 时随雷诺数的变化

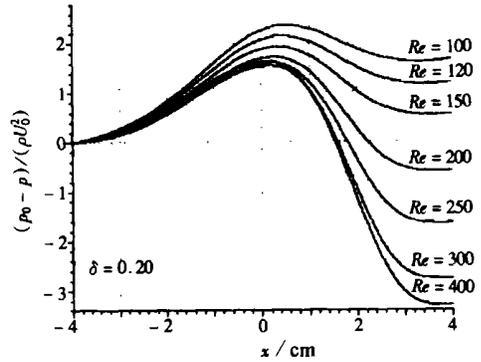


图8 压强分布在余弦型狭窄 ( $\delta = 0.20$ ) 时随雷诺数的变化

降和舒张区压强的上升也越大,同时管两端 ( $x_0 = -4.0$  和  $x = 4.0$ ) 的压强落差也越大。2) 在相同的雷诺数和狭窄度  $\delta$  下,高斯型狭窄的压强起伏较余弦型大,但管两端的压强落差则比余弦型小。这表明压强的起伏和管两端的压强差取决于狭窄管半径的轴向变化率 ( $dR/dx$ )。3) 在雷诺数较小时,收缩区的压强下降比较平缓,过最大狭窄处 ( $x = 0$ ) 后,压强有一个急剧上升段,最后再趋向于均直圆管的压强下降线。这与过去的结论一致<sup>[1]、[4]</sup>。4) 在较高雷诺数或重度狭窄时,舒张区会出现负压强 ( $p_0 - p < 0$ ),这与秦杰等<sup>[7]</sup>的实验工作一致。负压强是产生流动分离,形成旋涡的主要因素,另外,负压强影响血管壁面内外的压强差,改变动脉壁内物质运输的微循环过程,这也可能是硬化斑块在收缩区进一步发展的原因。

总之,改进后的 Karman-Pohlhausen 理论方法所计算的狭窄区域压强分布,不但在低雷诺数和缓慢狭窄情况下与过去的理论计算一致,而且在高雷诺数和重度狭窄时,负压强的结果也与实验吻合。另外,通过对相同狭窄度下轴向宽度增加的分析表明,在舒张区的压强、压强梯度和剪应力的变化比较急剧,因此动脉硬化斑块的发展更容易在该区域产生。由于动脉硬化机理的复杂性,从血液动力学的角度对其成因的研究还有待更精确的理论和实验研究。

### [参 考 文 献]

[1] 柳兆荣. 心血管流体力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1986, 130-160.

- [2] Lee J S, Fung Y C. Flow in a locally constricted tube at low Reynolds number[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, 37(1): 9—16.
- [3] 吴驰, 柳兆荣. 动脉狭窄对血流速的影响[J]. *上海力学*, 1995, 16(3): 192—199.
- [4] 丁光宏, 柳兆荣. 缓慢狭窄血管内血液流动的分析[J]. *生物力学*, 1989, 4(6): 30—39.
- [5] 吕岚, 许世雄. 局部缓慢狭窄幅度径向振荡弹性直圆管内脉动血流的压强和压强梯度分析[J]. *医用生物力学*, 1999, 14(3): 144—151.
- [6] Forrester J H, Young D F. Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease[J]. *Journal of Biomechanics*, 1970, 3(3): 297—310.
- [7] 秦杰, 刘辉, 孙利众, 等. 刚性狭窄管内血流压力分布的研究[J]. *生物力学*, 1989, 4(6): 57—61.
- [8] 冈小天. 生物流变学[M]. 吴云鹏, 陶祖莱 译. 北京: 科学出版社, 1980, 273—294.
- [9] 陶祖莱. 生物流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984, 530—538.
- [10] 沃德 切尼, 戴维 金凯德. 数值数学和计算[M]. 薛密 译. 上海: 复旦大学出版社, 1991, 396—424, 163—219.

## Pressure and Pressure Gradient in an Axisymmetric Rigid Vessel With Stenosis

YAO Li, LI Da zhi

(College of Science, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226001, P. R. China)

**Abstract:** Based on an improvement of the Karman-Pohlhausen's method, using nonlinear polynomial fitting and numerical integral, the axial distributions of pressure and its gradient in an axisymmetric rigid vessel with stenosis were obtained, and the distributions related to Reynolds number and the geometry of stenotic vessel were discussed. It shows that with the increasing of stenotic degree or Reynolds number, the fluctuation of pressure and its gradient in stenotic area is intense rapidly, and negative pressure occurs subsequently in the diverging part of stenotic area, especially the axial range of stenosis extended, the flow of blood in the diverging part be more obviously changed. In higher Reynolds number or heavy stenosis, theoretical calculation is mainly in accordance with past experiments.

**Key words:** rigid vessel; stenosis; pressure; gradient; Reynolds number