

文章编号: 1000\_0887(2006) 03\_0281\_04

# 一个柔性边界条件约束下的随机变量的分布<sup>\*</sup>

陈汉栋<sup>1</sup>, 乔宇<sup>2</sup>

(1. 斯坦福大学 应用物理系, 斯坦福 CA94305, 美国;  
2. 阿克伦大学 土木工程系, 阿克伦 OH44325\_3905, 美国)

(周哲玮推荐)

摘要: 讨论  $n$  个受柔性边界条件约束的随机变量的概率分布。理论解显示其概率密度函数随变量值增大而减小, 当  $n$  趋于无穷大时收敛于 Delta 函数。在有序统计的理论框架下, 同时得到最小值分布的解析解

关键词: 柔性边界条件; 受约束随机变量; 概率密度; 有序统计  
中图分类号: O211.6 文献标识码: A

## 引 言

在很长时间里, 受约束随机变量的分布是一个重要的研究领域<sup>[1]</sup>。本文讨论在边界条件为

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \quad (1)$$

时,  $n$  个  $[0, 1]$  区间内的随机变量  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; n \geq 1$ ) 的概率密度  $p(x)$ 。这一问题对基础科学研究和工程技术发展有重要的意义。它是讨论弱相互作用基本粒子行为<sup>[2]</sup>, 固体材料中群体微损伤演化<sup>[3,4]</sup>, 交通信号系统优化<sup>[5]</sup> 等问题的一个基础。虽然刚性边界条件, 比如  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , 约束下的随机变量是一个已经被研究成熟的问题<sup>[6]</sup>, 对柔性边界条件的研究还处于初步阶段。这样一类问题通常是通过 Monte Carlo 模拟或者近似分布来讨论。这些手段对确定性现象控制以及相关机制和过程不能有效分析。

除了  $p(x)$ ,  $x_i$  的最小值的概率分布  $p_m(x)$  对很多问题也很重要。例如, 晶体材料的损伤矩是小于某一极限尺度的位错对存在概率的单值函数<sup>[7]</sup>。目前, 唯一一类建立成熟的有序统计理论是针对独立并且同样分布(i. i. d.)的随机变量序列<sup>[8]</sup>。对于受边界条件或者内部过程约束的随机过程, 通常很难获得理论解<sup>[9]</sup>。

在本文以下部分,  $p(x)$  和  $p_m(x)$  将被分别讨论。结果显示, 通过条件概率分析, 我们能

\* 收稿日期: 2005\_03\_10; 修订日期: 2005\_10\_18

基金项目: 美国国家科学基金资助项目(CMS\_0503910)

作者简介: 陈汉栋(1974—), 男, 吉林人, 博士后研究助理, 博士;

乔宇(1972—), 男, 北京人, 助理教授, 博士(联系人. Tel: + 1\_330\_972\_2426; Fax: + 1\_330\_972\_6020; E\_mail: yqiao@uakron.edu)。

够获得解析解, 而且理论结果与 Monte Carlo 模拟的数据符合很好·

## 1 推导过程

### 1.1 随机变量的分布

定义

$$y_j = y_1 + \sum_{i=1}^{j-1} x_i, \quad \text{当 } j \geq 2, \quad (2)$$

其中  $j = 2, 3, \dots, n+1$ ; 并且  $y_1 = 0$ · 易见

$$0 = y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_j \leq y_{j+1} \leq \dots \leq y_{n+1} \leq 1, \quad (3)$$

并且  $\{y_j\}$  在  $[0, 1]$  区间随机分布·

不失普遍性, 令  $y_{j+1} - y_j = \Delta (1 \leq j \leq n+1)$ · 在区间  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$0 = z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_j \leq z_{j+1} \leq \dots \leq z_{n+1} \leq 1 - \Delta, \quad (4)$$

其中

$$z_i = \begin{cases} y_i, & \text{当 } i \leq j, \\ y_i - x, & \text{当 } i > j, \end{cases}$$

基于条件概率分析,  $\Delta \geq x$  的概率为

$$P(x) = \frac{\int_0^{1-x} dz_{n+1} \int_0^{z_{n+1}} dz_n \dots \int_0^{z_3} dz_2}{\int_0^1 dy_{n+1} \int_0^{y_{n+1}} dy_n \dots \int_0^{y_3} dy_2} = (1-x)^n, \quad (5)$$

因此, 随机变量  $x_i$  的概率分布函数为

$$p(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \cdot \end{cases} \quad (6)$$

### 1.2 最小值的分布 $\Delta$ 随机变量 $x_i$ 的最小值, $x_m$ 必须满足

$$(n-1)x_m \leq \sum_{i=1}^n x_i, \quad (7)$$

通过方程(1), 有

$$x_m \leq \frac{1}{n}, \quad (8)$$

基于方程(2), 对于一个在  $x \in [0, x_m]$  区间的随机变量

$$x \leq y_{j+1} - y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

方程(9)可以变形为

$$0 = z'_1 \leq z'_2 \leq \dots \leq z'_{n+1} \leq 1 - nx, \quad (10)$$

其中

$$z'_j = y_j - (j-1)x,$$

最小值  $x_m \geq x (0 \leq x \leq 1/n)$  的概率为

$$P_m(x) = \frac{\int_0^{1-nx} dz'_{n+1} \int_0^{z'_{n+1}} dz'_n \dots \int_0^{z'_3} dz'_2}{\int_0^1 dy'_{n+1} \int_0^{y'_{n+1}} dy'_{n-1} \dots \int_0^{y'_3} dy'_2} = (1-nx)^n, \quad (11)$$

所以,  $x_i$  的概率密度为

$$p_m(x) = \begin{cases} n^2(1 - nx)^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

注意在  $0 \leq x \leq 1/n$  区间  $p_m(x) = n \cdot p(nx)$ 。

## 2 讨 论

方程(6)和(12)分别给出了  $x_i$  以及  $x_i$  最小值的分布。图1显示了不同  $n$  值下  $x_i$  的分布。可以看到, 方程(6)的理论解和 Monte Carlo 模拟结果符合良好。在 Monte Carlo 模拟过程中, 我们使用一个随机数产生程序生成  $x_i$ 。这一过程被重复执行, 直至 10 000 个满足方程(1) 的有效随机变量集合被产生。数据表明  $x_i$  的概率密度随  $x$  下降, 其峰值在  $x = 0$ 。在  $x = 1, p(x)$  总为 0。当  $n = 1, p(x)$  和  $x$  呈线性关系。这一线性关系在  $n > 1$  时不复存在。当  $n$  趋于无穷大时,  $p(x)$  趋于 Delta 函数。通过方程(6),  $x_i$  的平均值  $E$  为

$$E = \frac{1}{n + 1}, \quad (13)$$

方差  $\sigma$  为

$$\sigma = \frac{1}{n + 1} \sqrt{\frac{n}{n + 2}}, \quad (14)$$

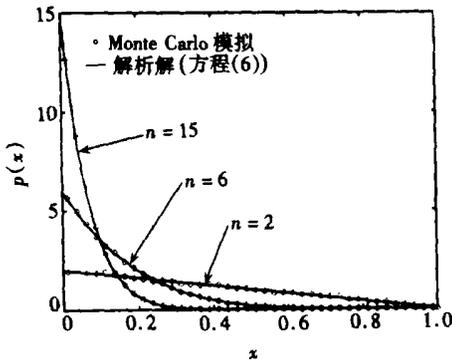


图1 随机变量的概率密度分布

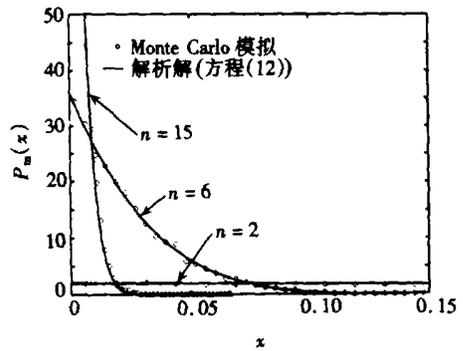


图2 最小值的概率密度分布

$E$  和  $\sigma$  均随  $n$  上升而减小。这一现象和上文讨论的  $p_x$  关系相符合。

在图2中, 我们将方程(12)的理论解和 Monte Carlo 模拟  $x_i$  的最小值的数值结果相比较。  $x_i$  的最小值的概率密度总随  $x$  而减小, 而且总小于  $p(x)$ 。与  $p(x)$  相似, 当  $n = 1$  时,  $p_m x$  曲线呈线性, 并且当  $n$  趋于无穷大时收敛于 Delta 函数。由方程(12), 最小值的均值  $E_m$  为

$$E_m = \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{E}{n}, \quad (15)$$

其方差为

$$\sigma_m = \frac{1}{(n + 1)} \sqrt{\frac{1}{n(n + 2)}} = \frac{\sigma}{n}, \quad (16)$$

注意  $E$  和  $\sigma$  分别大于  $E_m$  和  $\sigma_m$  的  $n$  倍。

## 3 结 论

我们分析了  $n$  个随机变量在柔性边界条件约束下的分布, 并获得其概率密度的解析解。主要结论如下

- 1) 随机变量的概率密度由方程(6)给出•
- 2) 最小值的概率密度由方程(12)给出•
- 3) 均值和方差由方程(13)~ 方程(16)给出•
- 4)  $p(x)$  和  $p_m(x)$  均随  $x$  减小, 并当  $n$  趋于无穷时收敛于 Delta 函数•

### [参 考 文 献]

- [1] Kallenberg O. Foundations of Modern Probability [M]. New York: Springer, 1997.
- [2] Lanyi C S, Liszi J. Monte\_Carlo simulation of a low\_density argon plasma[J]. Can J Appl Sepctrosc, 1993, **38**(2): 37—41.
- [3] Bai Y L, Xia M F, Ke F J, et al. Closed trans\_scale statistical microdamage mechanics[J]. Acta Mech Sinica, 2002, **18**(1): 1—17.
- [4] Hong Y S, Qiao Y. An analysis on overall crack number density of short fatigue cracks[J]. Mech Mater, 1999, **31**(8): 525—534.
- [5] Park B B, Roupail N M, Hummer J E. Probabilistic approach to implementing traffic signal warrants [J]. J Transp Eng ASCE, 2000, **126**(4): 332—342.
- [6] Darling D A. On a class of problems related to the random division of an interval[J]. Ann Math Sta, 1953, **24**(2): 239—253.
- [7] QIAO Yu, Hong Y S. Collective behavior of short cracks and fatigue life prediction[J]. Adv Mech, 1997, **27**(4): 489—503.
- [8] Parzen E. Modern Probability Theory and Its Applications [M]. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [9] Chen D, Lu J C. The asymptotics of maximum\_likelihood estimates of parameters based on a data type where the failure and the censoring time are dependent[J]. Stat Prob Lett, 1998, **36**(4): 379—391.

## Distribution of Random Elements Subjected to a Flexible Boundary Condition

CHEN Han\_dong<sup>1</sup>, QIAO Yu<sup>2</sup>

(1. Department of Applied Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA;

2. Department of Civil Engineering, University of Akron, Akron, OH 44325\_3905, USA)

**Abstract:** The probability distribution function of  $n$  random elements subjected to the flexible boundary condition was derived. The probability density is a descending curve and converges to a delta function as  $n$  tends to infinity. The distribution of the minimum value was discussed in context of ordered statistics.

**Key words:** flexible boundary condition; constrained random element; probability density; ordered statistics