应用数学和力学, 第 27 卷 第 2 期(2006 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2006) 02_0243_10

Kähler 流形上的不变形式和积分不变量*

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(周哲玮推荐)

摘要: 用现代微分几何理论和高等微积分把 Poincaré 和 Cartan_Poincaré 积分不变量的重要思想和结果以及 E. Cartan 在经典力学中首先建立的积分不变量和不变形式的关系推广到 Kähler 流形上的 Hamilton 力学中去, 得到相应的更广泛的结果•

关 键 词: Kähler 流形; Symplectic 流形; 不变形式; 积分不变量; 向量场; 形式场; Lie 导数; 外微分

中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

在分析力学中, Poincaré 积分不变量和 Cartan_Poincaré 积分不变量被看作基本力学原则(见文献[1], [2]) , 而且运用到分析力学、流体力学、统计力学中去• 这结果再推广到 Riemann 流形中去(见文献[3], [4])• E. Cartan 首先建立积分不变量和不变形式之间的关系• 他推广了积分不变量的概念• 这样, 不变形式的概念把新的见解提供到 Lie 导数和外形式的内积中去• 我们把这思想推广到 Kähler 流形, 并且得到一些更广泛更深入的结果•

1 基本假设和概念

设 M^n 是一具有联络 D 的 n 维 Kähler 流形, 在局部坐标系 $(U;\varphi)$ 下, $\forall p\in U\subset M^n$, $\varphi(p)=(z^1,z^2,\cdots,z^n)\in\mathscr{U}=\varphi(U)\subset C^n$, 它的度量

$$h=h_{j\bar{k}}\mathrm{d}z^j\otimes\mathrm{d}\overline{z}^k, \tag{1}$$

Kähler 形式

$$\Omega=\frac{\mathrm{i}}{2}h_{j\bar{k}}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\overline{z}^k• \tag{2}$$

设 δ_t 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的流, $\mathscr{X}^r(M)$ 是 r 次连续可微的向量场的集合• $\left\{\delta_t\right\}$ 是由 X 生成的单参数微分同胚群• $\forall p\in M^n$, $\delta_t(p)$ 是 X 通过点 p 的积分曲线• 而且我们有

$$\begin{cases}\varphi\circ\delta_t=\tilde{\delta}_t\circ\varphi,\quad \delta_t\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t,\\ \delta_t=\varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t\circ\varphi,\ \tilde{\delta}_t=\varphi\circ\delta_t\circ\varphi^{-1},\\ \delta_t^*\circ\varphi^*=(\varphi\circ\delta_t)^*=(\tilde{\delta}_t\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\tilde{\delta}_t^*;\end{cases} \tag{3}$$

* 收稿日期: 2004_11_10; 修订日期: 2005_08_02
作者简介: 张荣业(1938—), 男, 广东开平人, 研究员, 研究方向: 微分方程, 微分几何(Tel: + 86_10_62588645; E_mail: zry@math.ac.cn)•

$$\begin{cases} \delta_t^* = (\varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\tilde{\delta}_t^*\circ\varphi^{-1*} = \varphi^*\circ\tilde{\delta}_t^*\circ\varphi^{*-1},\ \varphi^{-1*} = \varphi^{*-1}, \\ \tilde{\delta}_t^* = (\varphi\circ\delta_t\circ\varphi^{-1})^* = \varphi^{-1*}\circ\delta_t^*\circ\varphi^* = \varphi^{*-1}\circ\delta_t^*\circ\varphi^*; \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi^*\varphi_* = I = \varphi_*\varphi^*,\quad \varphi_* = \varphi^{*-1} = \varphi^{-1*},\quad \varphi^* = \varphi_*^{-1}; \tag{5}$$

其中, $\tilde{\delta}_t$ 是 $\tilde{X} = \varphi_* X \in \mathscr{X}^r(C^n)$ 的流。$\delta_t(p)$ 是 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 通过 p 点的积分曲线, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t(p) = X\circ\delta_t(p)。\tag{6}$$

而且,

$$\varphi_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t(p) = \varphi_* X\circ\delta_t(p) = X\circ\delta_t\circ\varphi^{-1}(z) =$$

$$X\circ\varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t(z) = \tilde{X}\circ\tilde{\delta}_t(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\delta}_t(z)。$$

$\tilde{\delta}_t(z) = \varphi\circ\delta_t\circ\varphi^{-1}(z)$ 是 $\tilde{X}$ 通过点 $z = \varphi(p) \in \mathscr{U} = \varphi(U) \subset C^n$ 的积分曲线。而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\delta}_t(z) = \tilde{X}\circ\tilde{\delta}_t(z) = \tilde{X}\circ\tilde{\delta}_t\circ\varphi(p) = \tilde{X}\circ\varphi\circ\delta_t\circ\varphi^{-1}(z), \tag{7}$$

$t = 0$, $\delta_0(p) = p$, $\tilde{\delta}_0(z) = z = \varphi(p)$。这样, 在 U 中求 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的积分曲线变成求 $\tilde{X} = \varphi_* X$ 在 $\mathscr{U} = \varphi(U)$ 的积分曲线。这样, $\delta_t(p) = \varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t\circ\varphi(p)$ 是 X 通过 $p \in U$ 的积分曲线。而且我们把它归纳为:

定理 若 $\delta_t(p)$ 是 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 通过点 $p \in M^n$ 的积分曲线, 那末, $\tilde{\delta}_t(z) = \tilde{\delta}_t\circ\varphi(p) = \varphi\circ\delta_t\circ\varphi^{-1}(z)$ 是 $\tilde{X} = \varphi_* X$ 通过点 $z = \varphi(p) \in \mathscr{U} = \varphi(U) \subset C^n$ 的积分曲线, 而且,

$$\delta_t(p) = \varphi^{-1}\circ\tilde{\delta}_t\circ\varphi(p)。$$

对 $\omega \in \mathscr{F}(M)$, $\forall p \in U \subset M^n$, $\omega(p) = \omega\circ\varphi^{-1}(z) = \tilde{\omega}(z)$, 因此

$$\tilde{\omega} = \varphi^{-1*}\omega = \varphi_*\omega,\quad \omega = \varphi^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\circ\varphi, \tag{8}$$

δ_t 是 X 的流, 那末, 计算表明:

$$\delta_t^* L_X\,\omega(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^*\circ\omega(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^*\varphi^*\tilde{\omega}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^*\tilde{\delta}_t^*\tilde{\omega}(p) =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\delta}_t^*\tilde{\omega}(z) = \tilde{\delta}_t^* L_{\tilde{X}}\tilde{\omega}(z), \tag{9}$$

$$L_{\tilde{X}}\tilde{\omega} = L_{\varphi_* X}\varphi_*\omega = \varphi_* X \rightharpoonup \mathrm{d}\varphi_*\omega + \mathrm{d}(\varphi_* X \rightharpoonup \varphi_*\omega) = \varphi_* L_X\,\omega, \tag{10}$$

其中, $L_X\,\omega$ 是 ω 关于 X 的 Lie 导数。

设 $\omega \in \mathscr{F}^1(M)$, $\Gamma_0 \subset M^n$ 是光滑曲线, δ_t 是 X 的流, 那末, $\Gamma = \delta_t(\Gamma_0)$, $\gamma_0 = \varphi(\Gamma_0) \subset \varphi(U)$, $\gamma = \tilde{\delta}_t(\gamma_0) = \tilde{\delta}_t\circ\varphi(\Gamma_0) = \varphi\circ\delta_t(\Gamma_0) = \varphi(\Gamma)$。我们有

$$\int_\Gamma\omega = \int_{\delta_t(\Gamma_0)}\omega = \int_{\Gamma_0}\delta_t^*\omega = \int_{\Gamma_0}\varphi^*\tilde{\delta}_t^*\varphi^{-1*}\omega =$$

$$\int_{\varphi(\Gamma_0)}\tilde{\delta}_t^*\tilde{\omega} = \int_{\gamma_0}\tilde{\delta}_t^*\tilde{\omega} = \int_\gamma\tilde{\omega}, \tag{11}$$

$$\int_\Gamma L_X\,\omega = \int_{\delta_t(\Gamma_0)}L_X\,\omega = \int_{\Gamma_0}\delta_t^* L_X\,\omega = \int_{\Gamma_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^*\omega =$$

$$\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\delta}_t^*\tilde{\omega} = \int_{\gamma_0}\tilde{\delta}_t^* L_{\tilde{X}}\tilde{\omega} = \int_\gamma L_{\tilde{X}}\tilde{\omega}。\tag{12}$$

这样, ω 在 M^n 中的积分变成 $\tilde{\omega} = \varphi_*\omega \in C^n$ 的积分, 或者, M^n 局部的看成 C^n。二者的改变可以通过相应的 Lie 导数来测量。它是高维积分的相似物。

2 不变形式和积分不变量

定义 2.1 形式场 $\omega \in \mathscr{F}(M)$ 称为向量场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的不变形式, 如果在由 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 生成的局部单参数微分同胚群的作用下它是不变的•

定义 2.2 k_形式场 $\omega \in \mathscr{F}^k(M)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 称为向量场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的绝对积分不变量, 如果 ω 在一 k_维区域 $D \subset M^n$ 的积分当 D 在 X 的群 $\{\delta_t\}$ 的作用下连续变形时不变($k = 1$ 时 D 是曲线, $k = 2, \cdots, n-1$ 时 D 是曲面)•

定义 2.3 k_形式场 $\omega \in \mathscr{F}^k(M)$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 称为 X 的相对积分不变量, 如果它在 $k+1$_维区域 $D \subset M^n$ 的 k_维边界 ∂D 上的积分当在 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的群 $\{\delta_t\}$ 的作用下 ∂D 连续变形时不变($k = 1$, D 是曲面, ∂D 是曲线, 等等)•

计算表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \omega = \delta_t^* L_X \omega, \tag{13}$$

ω 在 δ_t 下不变, 则 $\delta_t^* \omega = \omega$, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\delta_t^* \omega = 0 \Leftrightarrow L_X \omega = 0$• 再者

$$L_X \omega = X \rightarrow \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(X \rightarrow \omega)\text{•} \tag{14}$$

定理 2.4 $\omega \in \mathscr{F}(M)$ 是 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的不变形式, 若且仅若

$$L_X \omega = 0 \Leftrightarrow X \rightarrow \mathrm{d}\omega = 0,\ \mathrm{d}(X \rightarrow \omega) = 0\text{•} \tag{15}$$

定理 2.5 ω 是 X 的绝对积分不变量, 若且仅若 ω 是 X 的不变形式•

证明 设 $D_0 \in M^n$, 那末

$$D = \delta_t(D_0),\ \int_D \omega = \int_{\delta_t(D_0)} \omega = \int_{D_0} \delta_t^* \omega,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_D \omega = \int_{D_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \omega = \int_{D_0} \delta_t^* L_X \omega = \int_D L_X \omega,$$

$$L_X \omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \omega = 0 \Leftrightarrow \delta_t^* \omega = \omega \Leftrightarrow \int_D \omega = \int_{D_0} \delta_t^* \omega = \int_{D_0} \omega\text{•}$$

定理 2.6 ω 是 X 的相对积分不变量, 若且仅若 $X \rightarrow \mathrm{d}\omega = 0$• (若 $\omega \in \mathscr{F}^1(M)$ 是 1_形式, 则若且仅若 $X \rightarrow \mathrm{d}\omega$ 是恰当的•)

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \omega = \int_{\partial D_0} \delta_t^* L_X \omega = \int_{\delta_t(\partial D_0)} L_X \omega = \int_{\partial D} L_X \omega =$$

$$\int_{\partial D} (X \rightarrow \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(X \rightarrow \omega)) = \int_{\partial D} (X \rightarrow \mathrm{d}\omega),$$

易见

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial D} \omega = 0 \Leftrightarrow X \rightarrow \mathrm{d}\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \omega = 0 \Leftrightarrow \delta_t^* \omega = \omega \Leftrightarrow$$

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D_0} \delta_t^* \omega = \int_{\partial D_0} \omega\text{•}$$

当 $k = 1$ 时 ∂D 是闭曲线• 如果, $X \rightarrow \mathrm{d}\omega$ 是恰当的, 那末, $\exists f \in \mathscr{F}^0(M)$ 使得 $X \rightarrow \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f$• 因此, $\int_{\partial D} X \rightarrow \mathrm{d}\omega = 0$, ω 是相对 X 的积分不变量• 反之, ω 是 X 的相对积分不变量, 则 $X \rightarrow \mathrm{d}\omega = 0$ 或者是某函数 $f \in \mathscr{F}^0(M)$ 的全微分, 即 $X \rightarrow \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f$• 它是恰当的•

由 Stokes 定理: $\int_{\partial D}\omega=\int_D d\omega$, 我们有

定理 2.7　若 ω 是相对积分不变量, 则 $d\omega$ 是绝对积分不变量• 反之亦然•

证明　由 $\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D_0}\omega=\int_{D_0}d\omega$ 可知:

命题 2.8　下列说法是等价的:

1) ω 是 X 的相对积分不变量;

2) $d\omega$ 是 X 的绝对积分不变量;

3) $d\omega$ 是 X 的不变形式•

命题 2.9　若 ω 是 X 的绝对积分不变量, 那末

1) $L_X\omega=0$;

2) $\delta_t^*\omega=\omega$;

3) $\int_D\omega=\int_{D_0}\omega\qquad(D=\delta_t(D_0))$•　(16)

定理 2.10　当 $M^n=C^n$,

$$\omega=\frac{i}{2}\bar{z}^j dz^j\Big/\frac{i}{4}(\bar{z}^j dz^j-z^j d\bar{z}^j)\in\mathscr{F}^1(M)\tag{17}$$

是 Hamilton 向量场

$$X=-2i\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^j}+2i\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j},\qquad\forall H\in C^k(M,C)\tag{18}$$

的相对积分不变量•

证明　$\Omega=-d\omega=(i/2)dz^j\wedge d\bar{z}^j$, Hamilton 向量场 $X=\Omega^{-1}(dH)$, $\forall H\in C^k(M,C)$,

$$L_X\omega=X\rightharpoondown d\omega+d(X\rightharpoondown\omega)=-dH+d\left(\bar{z}^j\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\right),$$

即 $X\rightharpoondown d\omega=-dH$ 是恰当的•　由定理 2.6, ω 是 X 的相对积分不变量•

当 $\omega=(i/4)(\bar{z}^j dz^j-z^j d\bar{z}^j)$, $\Omega=-d\omega=(i/2)dz^j\wedge d\bar{z}^j$•　如前,

$$L_X\omega=-dH+d\left(z^j\frac{\partial H}{\partial z^j}+\bar{z}^j\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\right),$$

$X\rightharpoondown d\omega=-dH$ 是恰当的, 如前•

定理 2.11　$\omega=(i/2)\bar{z}^j dz^j\setminus(i/4)(\bar{z}^j dz^j-z^j d\bar{z}^j)$ 是向量场 $X=\xi^j(\partial/\partial z^j)+\xi^{\bar{j}}(\partial/\partial\bar{z}^j)$ 的相对积分不变量, 那末 X 是 Hamilton 向量场•

证明　若 ω 是 X 的相对积分不变量, 则在 X 的流 δ_t 的作用下

$$0=\frac{d}{dt}\oint_\Gamma\omega=\frac{d}{dt}\oint_{\delta_t(\Gamma_0)}\omega=\oint_\Gamma L_X\omega=\oint_\Gamma X\rightharpoondown d\omega=\frac{i}{2}\oint_\Gamma(\xi^j d\bar{z}^j-\xi^{\bar{j}}dz^j),$$

那末, $X\rightharpoondown d\omega$ 是恰当的, 是函数 $H\in C^k(M,C)$ 的全微分•　即 $(i/2)(\xi^j d\bar{z}^j-\xi^{\bar{j}}dz^j)=-dH$, 因此, $\xi^j=-2i\partial H/\partial\bar{z}^j$, $\xi^{\bar{j}}=2i\partial H/\partial z^j$•

$$X=\Omega^{-1}(dH)=-2i\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^j}+2i\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}\qquad(\Omega=-d\omega)$$

是 Hamlton 向量场•

当 $\omega=(i/4)(\bar{z}^j dz^j-z^j d\bar{z}^j)$ 时, 类似地得到同样的结果•

系 2.12　若 $X\rightharpoondown d\omega$ 是恰当的 1_形式, 则 ω 一定是由 ω 决定的 Hamilton 向量场 X 的相对积分不变量•

命题 2. 13　在 $M^n = C^n$ 中, $\omega = (\mathrm{i}/2)(\bar{z}^j \mathrm{d}z^j) \setminus (\mathrm{i}/4)(\bar{z}^j \mathrm{d}z^j - z^j \mathrm{d}\bar{z}^j)$ 是向量场 $X \in \mathscr{X}^r(M)$ 的相对积分不变量, 若且仅若 X 是 Hamilton 向量场, 而且, $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $\forall H \in C^k(M, C)$ 其中 $\Omega = -\mathrm{d}\omega$.

定理 2. 14　$\Omega = -\mathrm{d}\omega$ 是 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $\forall H \in C^k(M, C)$ 的绝对积分不变量(不变形式), ω 如前.

证明　结论包含在命题 2. 8 中.

注意　R^{2n} 是 C^n 的底空间, 二者由 $z^j = x^j + \mathrm{i}y^j$ 一致起来, 而且,

$$\Omega = -\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j = dx^j \wedge \mathrm{d}y^j, \tag{19}$$

即 $\Omega = (\mathrm{i}/2)\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j$ 是 C^n 的 Kähler 形式, 但 $\Omega = dx^j \wedge \mathrm{d}y^j$ 是 R^{2n} 的辛形式(Symplectic 形式). 这样, (C^n, Ω) 是平坦的 Kähler 流形, 但 (R^{2n}, Ω) 是平坦的 Symplectic 流形. 在 (C^n, Ω) 中, 由 Ω 决定的 Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $H \in C^k(M, C)$ 是(18) 式. 在 R^{2n} 中, 由 Ω, $H \in C^k(R^{2n}, \Omega)$ 决定的 Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 是

$$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \frac{\partial H}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

在 Symplectic 空间 (R^{2n}, Ω) 中, $\omega = y^j \mathrm{d}x^j$ 是 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的相对积分不变量. 这是古典力学中的 Poincaré 积分不变量. 反之, ω 是 X 的相对积分不变量, 则如上述 (C^n, Ω) 中所说的 X 是由 ω 决定的 Hamilton 向量场. 再者, $\mathrm{d}\omega = -\Omega$ 是 Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的绝对积分不变量, 而且

$$\int_D \mathrm{d}\omega = -\sum_{j=1}^{n}\int_{D_j} dx^j \wedge \mathrm{d}y^j = -\sum_{j=1}^{n}\int_{D_j} \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j, \tag{20}$$

表明当 D、D_j 在 X 的流 δ_t 下运动而且连续变形时, 在第 j 个平面的区域 D_j 的面积的代数和不变, 见命题 2. 9. 其中 D_j 是 D 在第 j 平面上的投影. 上标'–'表明它的定向是从 y^j 到 x^j. 再者,

$$\begin{aligned}\Omega^n = {} & n!\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge \mathrm{d}y^n = \\ & n!\,(-1)^{n(n-1)/2}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \cdots \wedge dy^n = \\ & n!\,(\mathrm{i}/2)^n \mathrm{d}z^1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n \wedge \mathrm{d}\bar{z}^n = \\ & \underbrace{n!\,(-1)^{n(n-1)/2}}_{n}(\mathrm{i}/2)^n \mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n \wedge \mathrm{d}\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^n,\end{aligned} \tag{21}$$

其中, $\Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$ 是 Ω 的 n 次外积(the exterior product).

设

$$\begin{aligned}\mu = {} & dx^1 \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge \mathrm{d}y^n = \\ & (\mathrm{i}/2)^n \mathrm{d}z^1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n \wedge \mathrm{d}\bar{z}^n = \Omega^n / n!\end{aligned} \tag{22}$$

分别是 C^n 和 R^{2n} 的体积元素.

Ω 是向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的不变形式. 因此, $L_X \Omega = 0$, $L_X \Omega^n = 0$. 对 X 的流 δ_t

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^* \Omega^n = \delta_t^* L_X \Omega^n = 0, \quad \delta_t^* \Omega^n = \Omega^n, \\ \displaystyle\int_V \frac{\Omega^n}{n!} = \int_{\delta_t(V_0)} \frac{\Omega^n}{n!} = \int_{V_0} \delta_t^* \frac{\Omega^n}{n!} = \int_{V_0} \frac{\Omega^n}{n!},\end{cases} \tag{23}$$

即 μ 是 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的绝对积分不变量. 这是命题 2. 9 的特殊化.

定理 2.15　Ω^n 是Hamilton向量场$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $\forall H \in C^k(M, C)$ 的不变形式• $\Omega^n/n!$ 是 X 的绝对积分不变量•

这个定理的结论应用于 Symplectic 空间 (R^{2n}, Ω) 正是分析力学中的 Liouville 定理•

这是Hamilton 向量场的结论•

其次,我们要问除了Hamilton 向量场以外什么类型的向量场有不变形式 $\Omega^n/n!$?在那种情况下函数f 的积分$\int_V f\frac{\Omega^n}{n!}$ 不变?

μ (如前述) 的外微分(the exterior differential) 为零, $\mathrm{d}\mu = 0$•　因此,

$$\forall X \in \mathscr{X}^r(M),\ L_X\mu = X \rightharpoondown \mathrm{d}\mu + \mathrm{d}(X \rightharpoondown \mu) = \mathrm{d}(X \rightharpoondown \mu)•$$

首先,考虑 (R^{2n}, Ω)•　设

$$X = \xi^j\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^j\frac{\partial}{\partial y^j} \in \mathscr{X}^r(R^{2n}),$$

$$X \rightharpoondown \mu = X \rightharpoondown \frac{\Omega^n}{n!} = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}y^{j-1} \wedge$$
$$(\xi^j\mathrm{d}y^j - \eta^j\mathrm{d}x^j) \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge \mathrm{d}y^n,$$

$$\mathrm{d}(X \rightharpoondown \mu) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial x^j} + \frac{\partial\eta^j}{\partial y^j}\right)\mu = \mathrm{div}X \cdot \mu = L_X\mu, \tag{24}$$

由 (R^{2n}, Ω) 中的 Stokes 定理: $\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega$ 立即得到散度定理:

定理 2.16　设 $D \subset R^{2n}$ 是具有光滑边界∂D 的 $2n$_维区域,那末,

$$\int_{\partial D}X \rightharpoondown \frac{\Omega^n}{n!} = \int_D \mathrm{div}X \cdot \frac{\Omega^n}{n!}, \tag{25}$$

其中 $\mathrm{div}X = \partial\xi^j/\partial x^j + \partial\eta^j/\partial y^j$ 称为X 的散度•

定理 2.17　在 (R^{2n}, Ω) 中,体积元素 $\mu = \Omega^n/n!$是 $X \in \mathscr{X}^r(R^{2n})$ 的不变形式(积分不变量) 若且仅若

$$\mathrm{div}X = 0•$$

证明　$0 = L_X\mu = \mathrm{div}X \cdot \mu$, $\mu \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}X = 0$•

若 X 是R^{2n} 中的流动的流体的速度,那末, $\mathrm{div}X = 0$意味着这个流体是不可压缩的•

若同时 $X = \mathrm{d}\phi^{\#} = \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial\phi}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^j}$, 那末,

$$\mathrm{div}X = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{j2}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^{j2}} = 0, \tag{26}$$

即产生不可压缩流的速度势(the velocity potential) ϕ必须满足方程(26)•

显然, $\forall H \in C^k(R^{2n}, \mathrm{R})$, $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 产生一不可压缩流•

定理 2.18　在 (R^{2n}, Ω) 中,$f \cdot \Omega^n/n!$是Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $\forall H \in C^k(R^{2n}, \mathrm{R})$ 的不变形式,若且仅若

$$L_Xf = \{X, f\} = 0, \tag{27}$$

即f 是Hamilton系统: $\dot{x}^j = \partial H/\partial y^j$, $\dot{y}^j = -\partial H/\partial x^j$ 的首次积分•

证明　$0 = L_X\left(f \cdot \frac{\Omega^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}(L_Xf \cdot \Omega^n + f\,L_X\,\Omega^n) = L_Xf \cdot \frac{\Omega^n}{n!} \Leftrightarrow L_Xf = 0$•

对任何向量场

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \in \mathscr{X}^r(R^{2n}),\ \mu = \frac{\Omega^n}{n!},$$

$$L_X(f\mu) = L_X f \cdot \mu + f L_X \mu = (L_X f + f \operatorname{div} X)\mu =$$

$$\left(\frac{\partial(f\xi^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial(f\eta^j)}{\partial y^j}\right)\mu = \operatorname{div}(fX)\mu. \tag{28}$$

定理 2.19 在 (R^{2n}, Ω) 中, $f \cdot \Omega^n / n!$ 是向量场 $X \in \mathscr{X}^r(R^{2n})$ 的不变形式, 若且仅若

$$\operatorname{div}(fX) = \frac{\partial(f\xi^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial(f\eta^j)}{\partial y^j} = 0. \tag{29}$$

设一具有密度 $\rho(t, p)$ 的流体在 R^{2n} 中运动, 它的速度是 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$. 从这一流体中取一体积元素为 μ 的流体元素. 它的质量是 $m = \rho\mu$. 当这流元素沿 X 的流 δ_t 运动时, 质量 m 是守恒的, 那末,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mu) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + L_X\rho\right)\mu + \rho L_X\mu = 0,$$

$L_X\mu = 0$. 因此

$$\partial\rho/\partial t + L_X\rho = 0,$$

即

$$\partial\rho/\partial t + \{H, \rho\} = 0. \tag{30}$$

如前, 其中 $\{\ ,\ \}$ 是 Poisson 括号. 如果 $X = \xi^j(\partial/\partial x^j) + \eta^j(\partial/\partial y^j) \in \mathscr{X}^r(R^{2n})$ 是任意的, 那末,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho X) = 0. \tag{31}$$

式(30)、(31)都是该流体的连续方程, 当它的速度是 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 或 $X = \xi^j(\partial/\partial x^j) + \eta^j(\partial/\partial y^j)$ 时.

下一步, 回至 (C^n, Ω), 类似地, 我们有

定理 2.20 在 (C^n, Ω) 中, $\Omega^n/n!$ 是 Hamilton 向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的不变形式.

定理 2.21 在 (C^n, Ω) 中, $\Omega^n/n!$ 是 $\xi^j(\partial/\partial z^j) + \xi^{\bar{j}}(\partial/\partial \bar{z}^j) \in \mathscr{X}^r(C^n)$ 的不变形式, 若且仅若

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial\xi^j}{\partial z^j} + \frac{\partial\xi^{\bar{j}}}{\partial \bar{z}^j} = 0. \tag{32}$$

证明 如前.

这样, 若在 C^n 中流动的流体, 它的速度 X, 而且 $\operatorname{div} X = 0$, 则这个流体是不可压缩的: $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 生成不可压缩流. 若同时

$$X = \mathrm{d}\phi^{\#} = 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial\phi}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}\right),$$

则

$$\operatorname{div} X = 4\frac{\partial^2\phi}{\partial z^j\partial\bar{z}^j}, \tag{33}$$

$$\operatorname{div} X = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial z^j\partial\bar{z}^j} = 0, \tag{34}$$

即产生不可压缩流的速度势 ϕ 必须满足式(34).

顺便, 我们得到 C^n 中的散度定理, 那是和式(25)一样的. 它们的差别是 $\operatorname{div} X$ 是式(32)而 μ 是式(22), D 是 C^n 中的 n 维区域.

定理 2.22 $f\cdot\Omega^n/n!$ 是 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 不变形式, 若且仅若

$$L_X f = 0, \tag{35}$$

即 f 是系统 $\dot z^j=-2\mathrm{i}(\partial H/\partial\bar z^j)$, $\dot{\bar z}^j=2\mathrm{i}(\partial H/\partial z^j)$ 的首次积分.

证明 如前. $L_X(f\cdot\Omega^n)=L_X f\cdot\Omega^n+f L_X\Omega=L_X f\cdot\Omega^n=0\Rightarrow L_X f=0$.

定理 2.23 $f\cdot\Omega^n/n!$ 是 $X=\xi^j(\partial/\partial z^j)+\xi^{\bar j}(\partial/\partial\bar z^j)\in\mathscr{X}^r(C^n)$ 的不变形式, 若且仅若

$$\mathrm{div}(fX)=\frac{\partial(f\xi^j)}{\partial z^j}+\frac{\partial(f\xi^{\bar j})}{\partial\bar z^j}=0. \tag{36}$$

证明 如前, 略.

如前, 若具有密度 $\rho(t,p)$ 的流体在 (C^n,Ω) 中流动, 速度 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 或者 $X=\xi^j(\partial/\partial z^j)+\xi^{\bar j}(\partial/\partial\bar z^j)$. 质量是守恒的, 那末我们有如同式(30) 和式(31) 一样的连续方程, $L_X\rho$ 和 $\mathrm{div}(\rho X)$ 是式(35) 和(36) 的左边, 代替 f 的是 ρ.

下一步, 回至一般的 Kähler 流形 M^n、h、Ω, 如同式(1)、(2).

设 δ_t 是下列 Hamilton 向量场的流:

$$X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)=-2\mathrm{i}h^{\bar k j}\frac{\partial H}{\partial\bar z^k}\frac{\partial}{\partial z^j}+2\mathrm{i}h^{\bar j k}\frac{\partial H}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial\bar z^j}, \tag{37}$$

$\forall H\in C^k(M,C)$, 那末

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t^*\Omega=\delta_t^*L_X\Omega=0, \tag{38}$$

其中, $L_X\Omega=X\rfloor\mathrm{d}\Omega+\mathrm{d}(X\rfloor\Omega)=\mathrm{dd}H=0$. 由于 Kähler 形式 Ω 是闭的, $\mathrm{d}\Omega=0$. 这样, 我们有包含于命题 2.9 的结论. 其中, $D_0\subset M^n$, 即 Ω 是 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的不变形式和绝对积分不变量.

$$\begin{aligned}\Omega^n=&\overbrace{\Omega\wedge\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega}^{n}=n!(\mathrm{i}/2)^n|h|\,\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}\bar z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar z^n=\\&n!|h|\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^n=\\&n!(-1)^{n(n-1)/2}(\mathrm{i}/2)^n|h|\,\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}z^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar z^1\wedge\mathrm{d}\bar z^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar z^n=\\&n!(-1)^{n(n-1)/2}|h|\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n.\end{aligned} \tag{39}$$

令 $$\mu=\frac{\Omega^n}{n!}=\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n|h|\,\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}\bar z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar z^n, \tag{40}$$

其中, μ 是 M^n 的体积元, 而 $|h|=\det(h_{j\bar k})$. 易见:

定理 2.24 μ 是 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的不变形式(绝对积分不变量).

定理 2.25 $f\cdot\Omega^n/n!$ 是 $X=\Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$, $\forall H\in C^k(M,C)$ 的不变形式, 若且仅若

$$L_X f=0, \tag{41}$$

即 f 是下列系统的首次积分:

$$\dot z^j=-2\mathrm{i}h^{\bar k j}\frac{\partial H}{\partial\bar z^k},\quad \dot{\bar z}^j=2\mathrm{i}h^{\bar j k}\frac{\partial H}{\partial z^k}. \tag{42}$$

证明 如前.

定理 2.26 $f\cdot\Omega^n/n!$ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的不变形式, 若且仅若

$$\mathrm{div}(fX)=\frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial(f|h|\xi^j)}{\partial z^j}+\frac{\partial(f|h|\xi^{\bar j})}{\partial\bar z^j}\right)=0. \tag{43}$$

证明

$$L_X\left(f\frac{\Omega^n}{n!}\right)=\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n L_X(f|h|\,\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}\bar z^j\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar z^n)=$$

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n\left(\frac{\partial(f|h|\xi^j)}{\partial z^j}+\frac{\partial(f|h|\xi^{\bar{j}})}{\partial \bar{z}^j}\right)dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n=$$
$$\frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial(f|h|\xi^j)}{\partial z^j}+\frac{\partial(f|h|\xi^{\bar{j}})}{\partial \bar{z}^j}\right)\frac{\Omega^n}{n!},\tag{44}$$

因此, $L_X(f\cdot\Omega^n/n!)=0\Leftrightarrow\operatorname{div}(fX)=0$ 由于 $\Omega^n\neq 0$, 当 $M^n=C^n$ 时, $h_{j\bar{k}}=\delta_{j\bar{k}}$, $|h|=1$ 如上•

系 2.27 $\Omega^n/n!$ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的不变形式, 若且仅若

$$\operatorname{div}X=\frac{1}{|h|}\left(\frac{\partial(|h|\xi^j)}{\partial z^j}+\frac{\partial(|h|\xi^{\bar{j}})}{\partial \bar{z}^j}\right)=0\text{•}\tag{45}$$

系 2.28 $\Omega^n/n!$ 是下列向量场的不变形式:

$$X=d\psi^{\#}=2h^{\bar{k}j}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}^k}\frac{\partial}{\partial z^j}+2h^{\bar{j}k}\frac{\partial\psi}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j},\tag{46}$$

若且仅若

$$\operatorname{div}X=\frac{2}{|h|}\left(\frac{\partial(|h|h^{\bar{k}j}\partial\psi/\partial\bar{z}^k)}{\partial z^j}+\frac{\partial(|h|h^{\bar{j}k}\partial\psi/\partial z^k)}{\partial\bar{z}^j}\right)=0,\tag{47}$$

$\psi\in C^k(M,C)$•

我们想象在 M^n 中的一个流体, 它的速度 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 满足式(45), 那末, 这个流体是不可压缩的• 如果同时 $X=d\psi^{\#}$, 则产生不可压缩流的速度势必须满足式(47)• $M^n=C^n$, 则如前, $X=\Omega^{-1}(dH)$ 产生一压缩流• 如果质量守恒, 则连续方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+L_X\rho=0,$$

其中 $X=\Omega^{-1}(dH)$, X 是式(37), 或者

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+L_X\rho+\rho\operatorname{div}X=0,$$

其中 $\operatorname{div}X$ 是式(45)的左边• 当 $X=d\psi^{\#}$ 时, 我们可以得到相应的连续方程, 不再写出• 同时, 我们可以得到 M^n 中的散度定理, 如同式(25)•

下一步转到 M^n 的余切从 T^*M 的情形•

$$\theta=p_j dz^j+p_{\bar{j}}d\bar{z}^j\in\mathscr{F}^1(T^*M),\tag{48}$$

那末,

$$\Omega=-d\theta=dz^j\wedge dp_j+d\bar{z}^j\wedge dp_{\bar{j}}\in\mathscr{F}^2(T^*M),\tag{49}$$

是 T^*M 上的 Symplectic 形式• Hamilton 向量场

$$X=\Omega^{-1}(dH)=\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial z^j}+\frac{\partial H}{\partial p_{\bar{j}}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}-\frac{\partial H}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial\bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial p_{\bar{j}}},$$

$\forall H\in C^k(T^*M,C)$• $\pi^*:T^*M\to M^n$ 是丛投影, $(U;z^j)$ 是 M^n 的局部坐标系, 那末, $(\pi^{*-1}(U);z^j;\bar{z}^j;p_j;p_{\bar{j}})$ 是 T^*M 的局部坐标系• δ_t 是 $X=\Omega^{-1}(dH)$, $\forall H\in C^k(T^*M,C)$ 的流• γ_0 是 T^*M 中的光滑闭曲线•

定理 2.29 θ 是 $X=\Omega^{-1}(dH)$ 的相对积分不变量•

证明 如前, 略•

定理 2.30 θ 是向量场

$$X=\xi^j\frac{\partial}{\partial z^j}+\xi^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}+\eta^j\frac{\partial}{\partial p_j}+\eta^{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial p_{\bar{j}}}\in\mathscr{X}^r(T^*M)$$

的相对积分不变量. 那末, X 是 Hamilton 向量场, 即对某函数 $f \in C^a(T^* M, C)$, $x \in \Omega^{-1}(df)$.

证明 略.

命题 2.31 θ 是 $X \in \mathscr{X}^r(T^* M)$ 的相对积分不变量, 若且仅若 X 是 Hamilton 向量场.

再者, 对 $X = \Omega^{-1}(df)$, $\forall f \in C^k(T^* M, C)$,

$$L_X \Omega = X \rightharpoonup d\Omega + d(X \rightharpoonup \Omega) = 0,$$

Ω 是 X 的不变形式, 而且包含于命题 2.9 的结论中, 那里的 ω 是这里的 $\Omega = -d\theta$. 余者明白, 待续.

[参 考 文 献]

[1] Gantimaher F R. 分析力学讲义[M]. 钟奉俄, 薛问西 译. 北京: 北京人民教育出版社, 1963, 1—161.

[2] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. New York: Springer_Verlage, 1978, 1—300.

[3] von Westenholz C. Differential Form in Mathematical Physics[M]. Amsterdan, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1978, 355—439.

[4] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics[M]. U S A: Academic Press, Inc, 1985, 1—191.

[5] Wells R O, Jr. Differential Analysis on Complex Manifolds[M]. New York: Springer_Verlag, Inc, 1980, 1—216.

[6] Kodaira Kunihiko. Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures[M]. New York: Springer_Verlag, Inc, 1986.

[7] Yvonne Chiuet_Bruhat, Ceciledewitt_Morette, Margaretdillard_Bleick. Analysis, Manifolds and Physics[M]. Amsterdan, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1977.

[8] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.

[9] 张荣业. Kähler 流形上的牛顿力学[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(8): 709—719.

Invariant Form and Integral Invariants on Kähler Manifolds

ZHANG Rong_ye

(Institute of Mathematics, Chinese Academia of Sciences,
Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: The important notions and results of the integral invariants of Poincaré and Cartan_Poincaré and the relationship between integral invariant and invariant form established first by E. Cartan in the classical mechanics are generalized to Hamilton mechanics on Kähler manifold by the theory of modern geometry and advanced calculus, to get wider and deeper related results.

Key words: Kähler manifold; symplectic manifold; invariant form; integal invariant; vector field; form field; Lie derivative; exterior differential