应用数学和力学, 第 27 卷 第 2 期(2006 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2006) 02_0237_06

集值映射及其应用*

李 挺

(苏州大学 数学科学学院, 江苏 苏州 215006)

(刘曾荣推荐)

摘要: 考虑集值映射的动力学, 证明了对于上半连续的集值映射在一定条件下吸引子的存在性及吸引子在扰动下的上半连续性, 进一步考虑集值映射在微分方程数值模拟中的应用• 利用集值映射的吸引子在扰动下的上半连续性, 阐明微分方程数值模拟中的次分算法及区间算法的合理性•

关 键 词: 集值映射; 吸引子; 上半连续性

中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

假定我们要研究及模拟给定一个微分方程的复杂性态, 合理的方法是直接逼近所要考虑的不变集的拓扑结构•

集值映射自然出现在微分方程的数值模拟中, 我们来描述一下这个问题• 首先我们考虑一个自治的常微分方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = F(x)$• 在文献[1] 中, 作者证明如果上述系统有一个紧致渐近的吸引子 Λ, 那么它的单步长数值模拟 $F_h: x_{n+1} = x_n + hF(h, x_n, x_{n+1})$ 也有一个数值吸引子 Λ^h_{num}, 且当 $h \to 0$ 时, Λ^h_{num} 下半连续地收敛到 Λ• 为了模拟 Λ^h_{num}, 文献[2] 引入了次分算法, 下面我们来简述一下次分算法• 给定一个 R^n 上的离散动力系统 ϕ, 次分算法以下列方式定义了一个集值动力系统 $\hat{\phi}$• R^n 中的状态空间被分成具有不相交内部的小盒, 对于每一个点 x, $\hat{\phi}(x)$ 是所有包含 $\phi(x)$ 的小盒的并, 因而 $\phi(x) \in \hat{\phi}(x)$ 且 $H^*(\phi(x), \hat{\phi}(x))$ 至多是小盒的直径, 这些小盒能够被进一步次分, 这样就给出了一个集值映射序列 $\hat{\phi}_k$, $\hat{\phi}_k$ 描述了 k 次分后的集值映射•

另一方面, 集值映射也出现在微分方程的区间算法中• 在文献[3, 4] 中, 作者考虑了对于单值映射, 吸引子在小的非自治及随机扰动下的上半连续性• 在本文中, 我们考虑集值映射吸引子的存在性及在自治扰动下的上半连续性•

1 预 备 知 识

假定 (X, d) 是一个度量空间, $x \in X$, x 到一个非空紧集 K 的距离定义为

* 收稿日期: 2004_09_10; 修订日期: 2005_08_17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571130)

作者简介: 李挺(1967—), 女, 江苏启东人, 讲师, 硕士(Tel: + 86_512_67625815; E_mail: suzhouliting67@yahoo.com.cn)•

$$\mathrm{dist}(x, K) = \min_{a\in K} d(x, a);$$

X 中两个非空紧子集K、L 的Hausdorff 半距离$H^*(K, L)$ 定义为

$$H^*(K, L) = \max_{a\in K}\mathrm{dist}(a, L) = \max_{a\in K}\min_{b\in L}(a, b);$$

用 $\mathscr{H}(X)$ 表示 X 的所有非空紧子集组成的集合,用$N_\varepsilon(K) = \{x \in X: \mathrm{dist}(x, K) < \varepsilon\}$ 表示$K \in \mathscr{H}(X)$ 的 ε开邻域,用 $N_\varepsilon[K] = \{x \in X: \mathrm{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\}$ 表示K 的 ε闭邻域.

定义 1 对于集值映射 $\Phi: X \to \mathscr{H}(X)$,如果对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $y \in N_\delta(\{x\})$ 时, $\Phi(y) \subset N_\varepsilon(\Phi(x))$,或当$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 时, $\lim_{n\to\infty} H^*(\Phi(x_n), \Phi(x)) = 0$,我们称集值映射 Φ 在x 点上半连续.

引理 1 如果 $K_n, K \in \mathscr{H}(X)$ 满足$\lim_{n\to\infty} H^*(K_n, K) = 0$,则对于任何序列 $b_n \in K_n$, $n \in \mathrm{Z}^+$, 存在一个子序列 b_{n_j},使得$\lim_{j\to\infty} b_{n_j} = b$, $b \in K$.

证明 由定义我们有,对于所有的 $n \in \mathrm{Z}^+$, $\mathrm{dist}(b_n, K) \leqslant H^*(K_n, K)$, 由于 K 是紧的,存在 $c_n \in K$,使得$\mathrm{dist}(b_n, K) = \mathrm{dist}(b_n, c_n)$. 再由$K$ 的紧性,可知存在一个收敛子序列 c_{n_j},使得$\lim_{j\to+\infty} c_{n_j} = c \in K$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(b_{n_j}, c) &\leqslant \mathrm{dist}(b_{n_j}, c_{n_j}) + \mathrm{dist}(c_{n_j}, c) \leqslant \\ &H^*(b_{n_j}, K) + \mathrm{dist}(c_{n_j}, c) \leqslant \\ &H^*(K_{n_j}, K) + \mathrm{eist}(c_{n_j}, c),\end{aligned}$$

因此 $\lim_{j\to\infty} b_{n_j} = c$.

引理 2 假设 $\Phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是一个上半连续映射, 对 $\forall A \in \mathscr{H}(X)$, 定义 $\Phi(A) = \bigcup_{a\in A}\Phi(a)$,则 $\Phi(A)$ 是一紧集.

证明 假定$\{z_n\}$是一个包含在$\Phi(A)$ 中的序列,对每个z_n 存在$y_n \in A$ 使得$z_n \in \Phi(y_n)$. 由A 的紧性可知存在一个收敛子列 y_{n_k},使得$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in A$. 由于 Φ 是上半连续的,所以 $\lim_{k\to\infty} H^*(\Phi(y_{n_k}), \Phi(y)) = 0$. 又因 $\Phi(y_{n_k})$, $\Phi(y)$ 是紧的,由引理 1 可知,存在子序列 z_{n_k} 收敛到 $z \in \Phi(y) \subset \Phi(A)$. 因而 $\Phi(A)$ 是紧集.

定义 2 $\Phi^2(x) = \Phi\circ\Phi(x) = \bigcup_{y\in\Phi(x)}\Phi(y)$. 类似地我们可以对于 $n \geqslant 2$, 定义

$$\Phi^{n+1}(x) = \Phi\circ\Phi^n(x) = \bigcup_{y\in\Phi^n(x)}\Phi(y), \qquad n \geqslant 2.$$

注 由引理 2 可知 $\Phi^{n+1}(x)$ 是紧集.

定义 3 $\Phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是一个上半连续映射.

1. 对于集合 $U \subset X$,如果 $\Phi(U) \subset U$,则称 U 为Φ 正向不变的.
2. 对于紧集合 A,如果 $\Phi(A) = A$,则称 A 是 Φ 不变的.
3. 对于紧不变集 $A \subset U$, 如果对于 U 中的每个紧集 $C \subset U$,

$$\lim_{n\to\infty} H^*(\Phi^n(C), A) = 0,$$

则称 A 为 U 吸引子.

2 主 要 定 理

本节,我们首先考虑吸引子的存在性,然后考虑吸引子在扰动下的上半连续性.

定理 1 假定 $\phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是一个上半连续映射, 如果 U 是一个紧的正向不变集, 则 $A = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)$ 是一个 U 吸引子•

证明 首先证明 A 是 ϕ 不变的•

因为 $A = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)$, 所以

$$\phi(A) = \phi\left(\bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)\right) \subset \bigcap_{n\geqslant 1}\phi^n(U) \subset \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U) = A•$$

又因为 $\phi^{n+1}(U) \subset \phi^n(U)$, 我们要证明

$$\phi\left(\bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)\right) \supset \bigcap_{n\geqslant 1}\phi^n(U)•$$

事实上给定 $x \in \bigcap_{n\geqslant 1}\phi^n(U)$, 则对于 $\forall n \geqslant 1, x \in \phi^n(U)$, 因而 $\exists y_n \in \phi^{n-1}(U)$ 使得 $x \in \phi(y_n)$• 对于固定的 n, $\phi^n(U)$ 是紧的, $\left\{y_k\right\}_{k>n} \subset \phi^n(U)$, 不失一般性, 可以假定 $y_k \to y(k \to \infty)$• 因而 $y \in \phi^n(U), \forall n \geqslant 0$• 于是 $y \in \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)$• 根据 ϕ 的上半连续性, $\lim\limits_{k\to\infty}H^*(\phi(y_k), \phi(y)) = 0$, 于是 $x \in \phi(y)$, 即 $\phi(\bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)) \supset \bigcap_{n\geqslant 1}\phi^n(U)$, 因此

$$\phi(A) = \left(\bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)\right) \supset \bigcap_{n\geqslant 1}\phi^n(U) = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U) = A,$$

所以 $\phi(A) = A$•

因为 $A = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)$, 容易验证对任一紧集 $C \subset U$,

$$\lim_{n\to\infty}H^*(\phi^n(C), A) = 0,$$

因而 A 是一个 U 吸引子• □

定理 2 假定 $\phi_k(k \in \mathrm{N})$, $\phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是上半连续映射, 满足对于每个 $k \in \mathrm{N}$, $x \in X$ 有 $\phi(x) \subset \phi_{k+1}(x) \subset \phi_k(x)$, 进一步假定 ϕ_1 有一个正不变集 U 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) = 0$, 其中

$$\mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) = \sup_{x\in U}H^*(\phi_k(x), \phi(x)),$$

则对于每个 ϕ_k 有一个吸引子 A_k, 且 $A_{k+1} \subset A_k$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$•

证明 因为 U 是 ϕ_1 正向不变的且对于每个 $k \in \mathrm{N}$,

$$\phi(x) \subset \phi_{k+1}(x) \subset \phi_k(x),$$

可知对每个 $k \in \mathrm{N}$, U 是 ϕ_k 不变的且 U 是 ϕ 不变的•

由定理 1 可知, 对每个 $k \in \mathrm{N}$, $A_k = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi_k^n(U)$ 是 ϕ_k 的吸引子, 且 $A = \bigcap_{n\geqslant 0}\phi^n(U)$ 是 ϕ 的吸引子, 且 $A \subset A_{k+1} \subset A_k$•

令 $A' = \bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$, 则 $A \subset A'$, 且

$$\phi(A') = \phi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\phi(A_k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\phi_k(A_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty}A_k = A'•$$

另一方面

$$H^*(A_k, \phi(A_k)) = H^*(\phi_k(A_k), \phi(A_k)) \leqslant \mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) \to 0 \qquad (k \to \infty)•$$

因为 $A_k \to A'(k \to \infty)$, 由 ϕ 的上半连续性, 可知

$$H^*(\phi(A_k), \phi(A')) \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

因而

$$H^*(A', \phi(A')) \leqslant H^*(A', A_k) + H^*(A_k, \phi(A_k)) + H^*(\phi(A_k), \phi(A')) \to 0 \qquad (k \to \infty)•$$

于是有 $H^*(A', \phi(A')) = 0$, 因而 $A' \subset \phi(A')$, 因此 $A' = \phi(A')$•

又对于 $n \geqslant 0$, $A' = \phi^n(A') \subset \phi^n(U)$, 所以

$$A' \subset \bigcap_{n\geq 0}\phi^n(U) = A,$$

因而有

$$A = A' = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

□

定理3　设 $\phi_k(k \in \mathrm{N})$, $\phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是上半连续映射, 假定存在一个紧集 U 对所有的 $k \in \mathrm{N}$, 它是 ϕ_k 不变的. 进一步假定

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) = 0,$$

其中　$\mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) = \sup_{x\in U} H^*(\phi_k(x), \phi(x))$.

则存在 ϕ 的吸引子 A 及 ϕ_k 的吸引子 A_k, 满足 $\lim_{k\to\infty} H^*(A_k, A) = 0$.

证明　由 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}_U(\phi_k, \phi) = 0$ 及 U 对所有的 ϕ_k 是正向不变的, 可知 U 是 ϕ 正向不变的.

定义 $f_k(x) = \phi(x) \bigcup_{j\geq k}(\phi_j(x))$. 下面我们要证 f_k 满足定理2的条件.

容易证明 $\phi(x) \subset f_{k+1}(x) \subset f_k(x)$, 且对 $\forall k$, U 是 f_k 正向不变的, 且

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}_U(f_k, \phi) = 0,$$

由引理1可知 $f_k(x)$ 是紧集.

下证 f_k 是上半连续的. 为了证明它, 我们需要证明如果存在序列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} H^*(f_k(x_n), f_k(x)) = 0.$$

只要证明, 如果 $y_n \in f_k(x_n)$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, 则 $y \in f_k(x)$. 分3种情况:

1) 如果存在子序列 $n_j \to \infty$, 使得 $y_{n_j} \in \phi(x_{n_j})$, 由 ϕ 的上半连续性, 有 $y \in \phi(x)$, 于是 $y \in f_k(x)$.

2) 存在 N 使得当 $n \geq N$, $y_n \notin \phi(x_n)$, 因而存在 $s(n) \geq k$, 使得 $y_n \in \phi_{s(n)}(x_n)$. 当 $s(n)$ 有界时, 我们能找到子序列 $n_j \to \infty$, $N_0 \geq k$ 使得 $y_{n_j} \in \phi_{N_0}(x_{n_j})$, 由 ϕ_{N_0} 的上半连续性 $y \in \phi_{N_0}(x)$, 因而 $y \in f_k(x)$.

3) 当 $s(n)$ 无界时, 不失一般性, 假定 $s(n) \to \infty$, 则 $n \to \infty$ 时

$$H^*(\phi_{s(n)}(x_n), \phi(x)) \leqslant H^*(\phi_{s(n)}(x_n), \phi(x_n)) + H^*(\phi(x_n), \phi(x)) \to 0,$$

因而 $y \in \phi(x)$, 于是 $y \in f_k(x)$.

□

定理4　设 $\phi_k(k \in \mathrm{N})$, $\phi: X \to \mathscr{H}(X)$ 是上半连续映射, 假定存在一个紧集 U, 它是 ϕ 正不变集及一紧集序列 U_k, 它们分别是 ϕ_k 正不变集. 假定对

$$\forall x \in X, \lim_{k\to\infty} H^*(\phi_k(x), \phi(x)) = 0 \text{ 及 } \lim_{k\to\infty} H^*(U_k, U) = 0,$$

那么分别存在 ϕ 及 ϕ_k 的吸引子 A 和 A_k, 满足 $\lim_{k\to\infty} H^*(A_k, A) = 0$.

证明　A, A_k 的存在性由定理1可得.

假定结果不对, 因而存在序列 n_k, 当 $k \to \infty$ 时, $n_k \to \infty$, 及 $\delta > 0$ 使得

$$H^*(A_{n_k}, A) > \delta.$$

由 A_{n_k} 是紧的可知存在序列 $\{x_k\} \in A_{n_k}$, 使得 $\forall x \in A$, $\mathrm{dist}(x_k, x) > \delta$. 因为

$$x_k \in A_{n_k} \subset U_{n_k}, \quad \lim_{k\to\infty} H^*(U_{n_k}, U) = 0,$$

我们有

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(x_k, U) = 0.$$

因而有一个收敛子序列, 不失一般性, 我们假定 x_k 收敛到某个 $z\in U$, 对每个固定 n, 因为 A_{n_k} 是 ϕ_{n_k} 不变的, 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 取 $y_{n_k}^n\in A_{n_k}\subset U_{n_k}$, 使得 $x_n\in\phi_{n_k}^n(y_{n_k}^n)$, 于是

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}(y_{n_k}^n, U)\leqslant\lim_{k\to\infty}H^*(U_{n_k}, U)=0,$$

因而存在收敛子序列. 不失一般性, 假定 $y_{n_k}^n$ 收敛到某个 $y^n\in U$. 因为 ϕ_{n_k} 是上半连续且 $\lim_{k\to\infty}H^*(\phi_{n_k}(x),\phi(x))=0$, 因而有

$$H^*(\phi_{n_k}^n(y_{n_k}^n),\phi^n(y^n))\leqslant H^*(\phi_{n_k}^n(y_{n_k}^n),\phi^n(y_{n_k}^n))+H^*(\phi^n(y_{n_k}^n),\phi^n(y^n)).$$

于是 $\lim_{k\to\infty}H^*(\phi_{n_k}^n(y_{n_k}^n),\phi^n(y^n))=0$, 因而 $\mathrm{dist}(z,\phi^n(y^n))=0$.

于是 $z\in\phi^n(y^n)\subset\phi^n(U)$, 因此 $z\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\phi^n(U)=A$, 引出矛盾. □

3 集值映射的应用

3.1 次分算法

在本节中, 我们来描述次分算法. 次分算法的想法简要描述如下: 首先找 R^n 中的一个有界紧子集 Q, 它包含了我们所要分析的有趣动力系统的性态. 然后把这个集合分成小的盒子, 扔掉那些不包含有趣性态的盒子, 继续这个过程, 用新的更小的盒子代替, 直观上很清楚, 这个过程连续导致整体吸引子更精细的逼近.

更精确地描述次分算法, 算法生成一个 R^n 中的有限紧子集的并组成的序列 $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$, …, 使得

$$\mathrm{diam}(\mathscr{B}_k)=\max_{B\in\mathscr{B}_k}\mathrm{diam}(B)\to 0\qquad(k\to\infty).$$

令 $\mathscr{B}_0=\{Q\}$, 对 $k=1,2,\cdots$; $\mathscr{B}_k$ 由 $\mathscr{B}_{k-1}$ 分 2 步得到:

1. 次分　把 $\mathscr{B}_{k-1}$ 中的每个盒子每边等分得到新的盒子.
2. 选择　构造一个图, 它的顶点是 1 中的新盒子, 如果 $T(B)\cap B'\neq\varnothing$, 则从顶点 B 到 B' 定义的一条边. 计算这个图的强连通分量, 去掉所有不包含在连通分量中的盒子.

对每个 k, 我们需要考虑集值映射 $\hat{\phi}_k$ 以及它的性态, $\hat{\phi}_k$ 是一个集值映射, 它映点到某个盒子. 假定 A_k 是 $\hat{\phi}_k$ 的吸引子, 由引理 2, 我们有 A_k 趋近于整体吸引子 A.

3.2 区间算法

当我们模拟动力系统 f 时, 我们知道任何物理模型总有对初值的某种不确定性, 因而很自然地利用包含初始值 x_0. 一个小盒它的直径反映了数据测量中最大的误差, 因而通过 F 代替映射 f, F 的值是盒值, 因而我们的问题就变成模拟下列系统 $x_1=F([x])$, 也即考虑数值映射的动力学, 由前面的定理表明区间算法的合理性.

[参 考 文 献]

[1] Kloeden P E, Lorenz J. Stable attracting sets in dynamical systems and in their one_step discretizations[J]. SIAM J Numer Anal, 1986, **23**(5): 986—995.

[2] Dellnitz M, Hohmann A. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifold and global attractors[J]. Numer Math, 1997, **75**(3): 293—317.

[3] Caraballo T, Langa J A. On the upper semicontinuity of cocyle attractors for non_autonomous and random dynamical systems[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2003, **10**(4): 491—513.

[4] Caraballo T, Langa J A, Robinson J C. On the upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems[J]. Communication in PDEs, 1998, **23**(9/10): 1557—1581.

Set Value Mapping and Its Application

LI Ting
(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou, Jiangsu 215006, P.R. China)

Abstract: The dynamics of set value mapping is considered. For the upper semi_continuous set value maps, the existence of attractors under some conditions and the upper semi_continuity of attractors under the perturbation were proved. Its application in numerical simulation of differential equation was also considered. The upper semi_continuity of attractors in set value maps under the perturbation was used to show the reasonable of subdivision algorithm and interval arithmetic in numerical simulation of differential equation.

Key words: set value mapping; attractor; upper semi_continuity