

文章编号: 1000_0887(2006) 02_0186_07

基于 LMI 方法的 MIMO 系统鲁棒 D_+ 稳定的频域判定*

李海滨^{1,3}, 王志珍², 王 龙¹, 李兆平³, 李尔效⁴

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 上海师范大学 应用数学系, 上海 200234;
3. 北京 1303 信箱 15 分箱, 北京 100073; 4. 兰州 53 信箱 601 分箱, 兰州 730070)

(叶庆凯推荐)

摘要: 研究了具有结构不确定性的多输入多输出(MIMO)系统的鲁棒 D_+ 稳定性判定问题。首先提出了系统的 3 种数学模型, 包括凸多面体型多项式矩阵模型、多线性型多项式矩阵模型和反馈型多项式矩阵模型。然后分析了各模型在参数空间中的凸性, 从而将系统的稳定性检验问题转化为线性矩阵不等式(LMI)的可行性问题, 并由此给出了 D_+ 稳定性的判定方法。

关键词: 多项式矩阵; 鲁棒 D_+ 稳定性; 线性矩阵不等式(LMI); 参数不确定性

中图分类号: O175.13; TP273.1 文献标识码: A

引 言

在 20 世纪末, 对一类含有结构不确定性的线性时不变系统的研究取得了许多成果。这类系统常采用含有不确定参数的系统传递函数描述形式, 不确定参数空间为凸多面体的形式。尽管一般情况下, 系统的稳定性检验问题已经被证明是 \mathcal{NP} 难问题, 但是在满足一定假定条件下, 仍然可以得到一些有价值的结果。

对于单输入单输出系统, 作为近代最重要的研究成果之一的 Kharitonov 定理, 证明了对区间多项式描述的系统稳定性, 只需要检验 4 个顶点多项式即可; 文献[1]将这个结果扩展到一个更为复杂的系统模型中; 文献[2]给出了基于映射定理的一个保守的结果; 对于更一般的含有不确定参数系统的 D_+ 稳定性问题, 棱边定理给出了更具普适性的结果^[3]。

在一般情况下, 对于多项式矩阵描述的多输入多输出系统, 上面的结论大部分不能直接引用过来, 因此只能通过增加对多项式矩阵表达形式的约束来得到有意义的结果。由于直接计算矩阵的行列式来检验其稳定性的方法在计算上非常复杂, 于是需要采用一些间接的研究方法, 如特征值估计、Liapunov 理论、谱理论以及代数方法等。基于 Liapunov 理论的线性矩阵不等式方法是一种有效、可行的研究手段, 已被用来检验多输入多输出系统的稳定性。

本文的主要工作是构造了参数空间中多项式矩阵族的顶点表示, 揭示了凸包性质, 并在文献[4, 5]的基础上, 给出了改进的线性矩阵不等式表达形式。

* 收稿日期: 2003_11_21; 修订日期: 2005_11_10

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目

作者简介: 李海滨(1970—), 男, 辽宁沈阳人, 工程师, 博士(联系人, Tel: + 86_10_66952778; E_mail: irving@water.pku.edu.cn)。

1 定义和符号准备

多项式矩阵是指矩阵的每个元都属于多项式环,表示为 $G(s) = G_0 + G_1s + \dots + G_d s^d$, 其中 s 是复数域中的变量, d 是阶次, 常数矩阵 G_i 称为系数矩阵. 文中如不特别说明, 多项式均指实系数多项式, 相应的多项式矩阵为实多项式矩阵. 与多项式矩阵 $G(s)$ 的系数矩阵相关的常值矩阵定义为 $\mathcal{G} = [G_0 \ G_1 \ \dots \ G_i \ \dots \ G_d]$, 其右零空间的一个基矩阵用 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ 表示.

矩阵多项式 $G(s)$ 称为 D_{R-} 稳定, 当且仅当其根集包含在稳定域 D_R 中. 为简单起见, 常采用线性矩阵不等式(LMI)域, 即 $D = \left\{ s \in \mathcal{C} : B_{00} + B_{01}s + B_{10}s^* < 0 \right\}$. 如 Hurwitz 稳定域可写成一阶 LMI 域的形式

$$D = \left\{ s \in \mathcal{C} : s + s^* = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}^* B_c \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} < 0 \right\},$$

$$\text{其中 } B_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在实空间 \mathcal{R}^m 中, 区间不确定参数可以表示为: $Q = \left\{ (q_1, \dots, q_m) : q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i] \right\}$, 相应的顶点记为 $K_Q = \left\{ (q_1, \dots, q_m) : q_i \in \{ \underline{q}_i, \overline{q}_i \} \right\}$. 为表达方便起见, 定义不完全顶点集合为 $K_Q^{(l)} = \left\{ \mathbf{q} : q_i \in \{ \underline{q}_i, \overline{q}_i \}, i \leq l; q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i], l < i \leq m \right\}$, 且 $K_Q = K_Q^{(m)}$.

文中用到的一个 $2dn \times (d+1)n$ 投影矩阵 \mathcal{R} 定义为:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} I_n & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_n & 0 \\ 0 & I_n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_n \end{pmatrix}.$$

2 基本引理

本节介绍了 3 种不确定多项式矩阵族的模型表示, 然后研究了一般情况下的稳定性检验条件.

$$\text{令 } G_P(s) = \left\{ (p_{ij}(s))_{n \times n} : p_{ij}(s) \in \mathcal{P}_{ij}(s), i, j = 1, \dots, n \right\} \quad (1)$$

表示凸多面体型多项式矩阵, 式中 $\mathcal{P}_{ij}(s)$ 表示一组确定多项式的所有凸组合集合, 即

$$\mathcal{P}_{ij}(s) = \left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_k p_{ij}^{(k)}(s) : \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right\};$$

其相应的顶点集合及棱边集合分别为:

$$K_{\mathcal{P}_{ij}} = \left\{ p_{ij}^{(k)}(s), k = 1, \dots, m \right\},$$

$$E_{\mathcal{P}_{ij}} = \left\{ p_{ij}^{(k)}(s) + (1-\lambda)p_{ij}^{(t)}(s), k, t = 1, \dots, m, k \neq t, \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

多线性型模型表示为:

$$G_A(s) = \left\{ \sum_{k=1}^N a_k(\mathbf{q}) A_k(s), \mathbf{q} \in Q \right\}, \quad (2)$$

式中 $a_k(\mathbf{q})$ 为不确定向量 \mathbf{q} 的多线性函数.

反馈型模型定义为如下形式:

$$G_F(s) = \left\{ \sum_{k=1}^N P_k(s, \mathbf{q}) C_k(s), \mathbf{q} \in Q \right\}, \quad (3)$$

其中, $C_i(s)$ 为确定的多项式矩阵, $P_i(s, q) = (p_{kl}^{(i)}(s, q))_{n \times n}$, $p_{kl}^{(i)}(s, q)$ 为区间多项式.

引理 1^[4] 多项式矩阵 $G(s)$ 稳定的充分必要条件为存在一个常数矩阵 P , 且 $P = P^* > 0$, $P \in \mathcal{C}^{d_n \times d_n}$, 使得线性矩阵不等式

$$\mathcal{N}_{G'}^* \mathcal{R}^* (B + P) \mathcal{R} \mathcal{N}_G < 0 \quad (4)$$

是可行的.

引理 2(棱边定理)^[3] 多项式多面体记为 $\Omega \subset \mathcal{R}^{+1}$, $\sigma: \mathcal{R}^{+1} \rightarrow \mathcal{C}$ 为多项式的根映射 $\sigma(\Omega) = \{s: p(s) = 0, \exists p \in \Omega\}$. 对于单连通域 D , 若 Ω 中的多项式不降次, 则 $\sigma(\Omega) \subset D$ 的充分必要条件为 Ω 所有棱边多项式的根集包含于稳定区域 D^* .

下面将这个结果应用到凸多面体型多项式矩阵的情况.

引理 3^[6] 令(1)式中 $G_P(s)$ 的棱边多项式矩阵集合表示为:

$$E_{G_P}(s) = \left\{ \begin{array}{l} p_{kl_k}(s) \in E_{P_{kl_k}}(s), (l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{P}_n^n, k = 1, \dots, n \\ (p_{\bar{j}}(s))_{n \times n}: \\ p_{ki_k}(s) \in E_{P_{ki_k}}(s), i_k = 1, \dots, l_k - 1, l_k + 1, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (5)$$

式中 \mathcal{P}_n^n 表示 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列的集合. 则 $G_P(s)$ 是 D_+ 稳定的当且仅当 $E_{G_P}(s)$ 是 D_+ 稳定的.

引理 4 令 M_1, M_2 和 M_3 为空间 \mathcal{R}^d 中的子集. 若 $M_1 \subset \text{conv} M_2, M_2 \subset \text{conv} M_3$, 则 $M_1 \subset \text{conv} M_3$.

3 主要结果

在本节中, 首先给出了一个改进的检验系统稳定的线性矩阵不等式(LMI)判定条件. 然后分别研究了模型的凸包性质, 并在此基础上建立了相应稳定性的判定条件.

令多项式矩阵表示为 $G(s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i G_i(s)$, 其中 $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, G_i(s)$ 是首一的多项式矩阵, 维数为 n , 阶次为 d . 与多项式矩阵 $G(s)$ 关联的常值矩阵可表示为 $\mathcal{G}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{G}_i$, 相应的右零空间为 $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i}$.

进一步地, 设 $P = \sum_{i=1}^N \lambda_i P_i$, 式中 P_i 是与每一个 $G_i(s)$ 对应的线性矩阵不等式组(4)的一个可行解. 那么有下面的基本结论:

定理 1 多项式矩阵族 $\{G_i(s)\}$ 的凸包 G 是 Hurwitz 稳定的, 若存在常数矩阵 $P_i = P_i^* > 0 (i = 1, \dots, N)$, 以及标量 $0 < \lambda \leq 1$, 满足下面的一组线性矩阵不等式:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i} < -\lambda & i = 1, \dots, N, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i} + \mathcal{N}_{\mathcal{G}_j}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_j} < \frac{2}{N-1}, \\ & i = 1, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

证明 由引理 1 得, $G(s)$ 是鲁棒稳定的充要条件为

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^* \mathcal{R}^* (B + P) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}} < 0 \quad (7)$$

因为考虑左半平面的鲁棒稳定性, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{G}}^* \mathcal{R}^* (B_c + P) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}} &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 (\mathcal{N}_{\mathcal{G}_i}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_i}) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \lambda_j \lambda_k (\mathcal{N}_{\mathcal{G}_j}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_j} + \mathcal{N}_{\mathcal{G}_k}^* \mathcal{R}^* (B_c + P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}_k}). \end{aligned} \quad (8)$$

再将线性矩阵不等式组(6)代入上式, 可得

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^* \mathcal{R}^*(\mathbf{B}_c + \mathbf{P}) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{G}} < -\lambda \sum_i \lambda_i^2 + \frac{2}{N-1} \sum_j \sum_k \lambda_j \lambda_k \quad (9)$$

又由已知多项式不等式

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\lambda_i - \lambda_j)^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \lambda_j \lambda_k \geq 0,$$

当且仅当 $\lambda_1 = \dots = \lambda_N$ 时等号成立, 可知存在常数 $0 < \lambda \leq 1$, 使得 $(N-1)\lambda \sum \lambda_i^2 \geq 2 \sum \sum \lambda_j \lambda_k$.

代入(9)式, 得 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(\mathbf{B} + \mathbf{P}) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} < \mathbf{0}$ □

注1 与文献[5]中的结果比较, 容易看出线性矩阵不等式条件(6)更具一般性, 也就是说, 如果存在 P_i 满足文献[5]中提出的条件, 那么也一定满足(6)式, 反之则不一定成立.

3.1 凸多面体型

设 $G_P = \left\{ \mathbf{G}_P(s, \mathbf{q}), q_i \geq 0, \sum q_i = 1 \right\}$, 其顶点集为 $K_{G_P} = \left\{ (p_{ij}(s)) : p_{ij}(s) \in K_{P_j} \right\}$. 为了得到 G_P 的稳定性检验条件, 先讨论 G_P 的一个重要性质.

引理5 G_P 是 D_- 稳定的充分必要条件是顶点集 K_{G_P} 的凸包是 D_- 稳定的.

证明 充分性: 任给棱边多项式矩阵 $E(s) \in E_{G_P}(s)$, 由定义(5) 可得, 存在一个指标序列 $(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{I}_n^n$, 对于棱边多项式 $p_{l_1 l_1}(s) \in E_{P_{l_1}}(s)$ 对应的棱边多项式矩阵为

$$E_{l_1 l_1}^{(k)}(s) = (e_{\bar{j}}(s))_{n \times n}: \begin{cases} e_{l_1 l_1}(s) = p_{l_1 l_1}^{(k)}(s) \\ e_{\bar{j}}(s) = p_{ij}(s), \quad i = 1, j \neq l_1 \end{cases}$$

容易看出 $E(s) = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{l_1 l_1}^{(k)}$. 对每一个多项式矩阵 $E_{l_1 l_1}^{(k)}$ 重复上面的分解过程, 直到 $E^{(k)} \in K_{G_P}$. 根据引理3, $\text{conv}(K_{G_P})$ 是 D_- 稳定的 $\Rightarrow G_P(s)$ 是 D_- 稳定的.

必要性: 对任意 $G(s) \in \text{conv}(K_{G_P})$, 有 $G(s) = \sum_{k,j=1}^n \lambda_j K_{\bar{j}}(s)$, 式中 $K_{\bar{j}} \in K_{G_P}$, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_j \lambda_j = 1$.

令 $K_{\bar{j}}(s) = (k_{\bar{j}l}^{(j)}(s))_{n \times n}$, 可得 $\text{conv}(K_{G_P}) \subset G_P$. □

根据引理3和引理5可以进一步写成简洁的形式, $G_P(s) = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i K_{P^{(i)}}(s)$, 进而可以容易得到下面的结果:

定理2 若存在常数矩阵 $P_i = P_i^* > \mathbf{0}$ 和标量 $\lambda > 0$, 使得下面线性矩阵不等式组

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(i)}}^* \mathcal{R}^*(\mathbf{B}_c + \mathbf{P}_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(i)}} < -\lambda & i = 1, \dots, n^2, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(i)}}^* \mathcal{R}^*(\mathbf{B}_c + \mathbf{P}_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(i)}} + \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(j)}}^* \mathcal{R}^*(\mathbf{B}_c + \mathbf{P}_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{X}_P^{(j)}} < \frac{2}{n^2 - 1}, \\ & i = 1, \dots, n^2 - 1; j = i + 1, \dots, n^2, \\ \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

有可行解, 则 G_P 是鲁棒稳定的.

3.2 多线性型

设 $G_A = \left\{ \mathbf{G}_A(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q \right\}$, 其中 $\mathbf{G}_A(s, \mathbf{q})$ 如(2)中所定义, $Q \subset \mathcal{R}^N$ 为不确定参数空间, 其顶点多项式矩阵集合表示为 $K_{G_A} = \left\{ \mathbf{K}_A(s) = \mathbf{G}_A(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in K_Q \right\}$.

引理6 $G_A \subset \text{conv}(K_{G_A})$.

证明 定义不完全多项式矩阵集合 $G_A^{(k)} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{q}) A_i(s), \mathbf{q} \in K_Q^{(k)} \right\} \cdot \forall G(s, \mathbf{q})$

∈ G_A, 且 a_i(q) 是多线性函数, 则

$$G(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) A_i(s) = \sum [\lambda_1 a_i(q_1^{(1)}) + (1 - \lambda_1) a_i(q_2^{(1)})] A_i(s) \approx \lambda_1 G_1^{(1)} + (1 - \lambda_1) G_2^{(1)}.$$

显然, q⁽¹⁾, q⁽²⁾ ∈ K⁽¹⁾; G⁽¹⁾, G⁽²⁾ ∈ G⁽¹⁾ 故 G(s, q) ∈ conv(G⁽¹⁾). 对 G⁽¹⁾, G⁽²⁾ 重复这个迭代过程, 根据引理 4, 可得 G(s, q) ∈ conv(G^(N)).

由 G^(N) = K_{G_F}, G(s, q) ∈ conv(K_{G_A}) ⇒ G_A ⊂ conv(K_{G_A}). □

由引理 6, ∃ λ ≥ 0, 且 ∑ λ = 1, 使得 G_A = ∑_{t=1}^N λ K^(t)_G(s), K^(t)_G(s) ∈ K_{G_A}.

定理 3 G_A 是鲁棒稳定的, 若存在常数矩阵 P_i = P^{*}_i > 0 和标量 λ > 0, 使得下面的线性矩阵不等式组有可行解.

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(i)}}^* \mathcal{R}^*(B_c + P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(i)}} < -\lambda, & i = 1, \dots, 2^N, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(i)}}^* \mathcal{R}^*(B_c + P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(i)}} + \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(j)}}^* \mathcal{R}^*(B_c + P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{K}_G^{(j)}} < \frac{2}{2^N - 1}, \\ & i = 1, \dots, 2^N - 1; j = i + 1, \dots, 2^N, \\ \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

3.3 反馈型

先考虑一个简单模型, 设 F = { F(s) : F(s) = ∑_{i=1}ⁿ p_i(s, q) C_i(s), q ∈ Q }, 其中 p_i(s, q) 为区间多项式. 由 Kharitonov 定理知, p_i(s, q) 的值集在复平面上是一个矩形, 令相应的 4 个顶点表示为 p⁽¹⁾_i(s), p⁽²⁾_i(s), p⁽³⁾_i(s) 以及 p⁽⁴⁾_i(s). 定义顶点集合 K_F 为 K_F = { K_F(s) : K_F(s) = ∑_{i=1}ⁿ p^(l_i)_i(s) C_i(s), l_i = 1, 2, 3, 4 }, 一般情况下, 集合中有 4ⁿ 个元素.

引理 7 F = conv(K_F).

证明 令 K^(k)_F 为集合 F 的不完全顶点, 由定义得

$$K_{F^{(k)}} = \left\{ \sum_{i=1}^k p_i^{(l_i)}(s) C_i(s) + \sum_{i=k+1}^n p_i(s, q) C_i(s), q \in Q, l_i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

对于任意给定 K^(k)_F ∈ K^(k)_F, 有

$$\begin{aligned} K_{F^{(k)}} &= \sum_{i=1}^k p_i^{(l_i)} C_i + p_{k+1} C_{k+1} + \sum_{i=k+2}^n p_i(q) C_i = \\ &= \sum_i^k p_i^{(l_i)} C_i + (\lambda_1^{(k+1)} p_{k+1}^{(1)} + \lambda_2^{(k+1)} p_{k+1}^{(2)} + \lambda_3^{(k+1)} p_{k+1}^{(3)} + \\ &+ \lambda_4^{(k+1)} p_{k+1}^{(4)}) C_{k+1} + \sum_i^n p_i(q) C_i = \\ &= \lambda_1^{(k+1)} K_{F_1^{(k+1)}} + \lambda_2^{(k+1)} K_{F_2^{(k+1)}} + \lambda_3^{(k+1)} K_{F_3^{(k+1)}} + \lambda_4^{(k+1)} K_{F_4^{(k+1)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

显然, K^(k)_F ∈ conv(K^(k+1)_F), 从而 K^(k)_F ⊂ conv(K^(k+1)_F).

∀ F(s) ∈ F, 由上面的迭代关系, F(s) 可以展开为如下形式:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_i p_i(s, q) C_i(s) = p_1 C_1 + \sum_{i=2}^n p_i C_i = \\ &= (\lambda_1^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} p_1^{(2)} + \lambda_3^{(1)} p_1^{(3)} + \lambda_4^{(1)} p_1^{(4)}) C_1 + \sum_i p_i C_i = \\ &= \lambda_1^{(1)} K_{F_1^{(1)}} + \lambda_2^{(1)} K_{F_2^{(1)}} + \lambda_3^{(1)} K_{F_3^{(1)}} + \lambda_4^{(1)} K_{F_4^{(1)}}. \end{aligned}$$

由引理 4, 可得 $F(s) \in \text{conv}(K_F) \bullet$. 另一方面, 因为 $p_i(s, q)$ 的值集是凸的, 由定义知, F 的值集也是凸的, 而 $K_F \in F$, 故 $\text{conv}(K_F) \subset F \bullet$. 综上可得 $F = \text{conv}(K_F) \bullet$. \square

引理 8 对于(3)式中定义的多项式矩阵集合 G_F , 存在 4^{Nn^2} 个多项式矩阵, 使得它们的凸组合包含 $G_F \bullet$.

证明 展开 G_F , 得

$$G_F(s) = \sum_{i=1}^N P_i(s, q) C_i(s) = \sum_{i=1}^N (p_{kl}^{(i)}(s, q))(c_{kl}^{(i)}(s)). \quad (13)$$

由引理 7, 易知 G_F 包含于顶点多项式矩阵的凸包. \square

用 $V_F^{(i)}$ 表示顶点多项式矩阵, 有下面的结论:

定理 4 G_F 是鲁棒稳定的充分条件为, 存在常数矩阵 $P_i = P_i^* > 0$ 和标量 $\lambda > 0$, 满足下面的线性矩阵不等式条件:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{v_F^{(i)}} \mathcal{R}^*(B_c \mp P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{v_F^{(i)}} < -\lambda & i = 1, \dots, 4^{Nn^2}, \\ \mathcal{N}_{v_F^{(i)}} \mathcal{R}^*(B_c \mp P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{v_F^{(i)}} + \mathcal{N}_{v_F^{(j)}} \mathcal{R}^*(B_c \mp P_i) \mathcal{R} \mathcal{N}_{v_F^{(j)}} < \frac{2}{4^{Nn^2} - 1}, \\ \lambda \leq 1. & i = 1, \dots, 4^{Nn^2} - 1; j = i + 1, \dots, 4^{Nn^2}, \end{cases} \quad (14)$$

4 算 例

例 1 考虑如下系统

$$G_A(s) = (q_1 + q_2 - 1.3q_3 - q_1q_2 - 0.7)A_1(s) + (q_1 + 2.1q_2 - 0.7q_1q_3 + 2q_2q_3 - 1)A_2(s),$$

其中

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} 62 + 35s + 7s^2 + s^3 & 2 + 2s^2 & 10 + 4s + 0.6s^2 \\ 4 + s + s^3 & 7 + s + 2s^2 & 9 + 4s + 0.4s^2 \\ 3 + s^3 & 2 + s^2 & 10 + 4s + 0.5s^2 \end{bmatrix},$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} 70 + 40s + 8s^2 + 2s^3 & 2 + s^2 & 9 + 4s + 0.4s^2 \\ 3 + 2s + s^3 & 6 + s + s^2 & 10 + 4s + 0.6s^2 \\ 2 + s^3 & 2 + 2s^2 & 9 + 4s + 0.5s^2 \end{bmatrix},$$

$$q_1 \in [1.1, 1.6], q_2 \in [-1, 0.5], q_3 \in [-1.5, -1].$$

根据定理 3, 可以计算出线性矩阵不等式组是可行的, 从而知 $G_A(s)$ 是鲁棒稳定的, 图 1 给出了其根轨迹分布图, 验证了这个结果的正确性.

例 2 系统

$$G_P(s) = \begin{bmatrix} [5 + 7s - 7s^2 + 4s^3, 6 + 8s - 5s^2 + 5s^3] \\ [-3 + 3s + 6s^2 + 4s^3, -5 + 4s + 7s^2 + 5s^3] \\ [8 - 5s - 6s^2 - 6s^3, 7 - 6s - 7s^2 - 5s^3] \\ [9 + 15s + 11s^2 + 8s^3, 11 + 14s + 12s^2 + 9s^3] \end{bmatrix}.$$

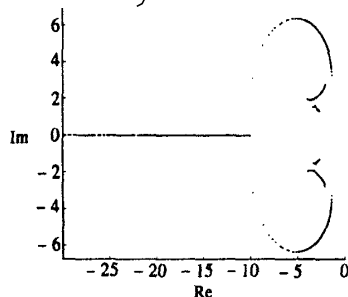


图 1 多线性多项式矩阵的根轨迹分布图

由定理2, 构造顶点多项式矩阵, 然后通过计算可得对应的线性矩阵不等式是可行的。

5 结 论

本文研究了多输入多输出系统的鲁棒 D -稳定性问题。对于含有区间不确定参数的系统, 给出了3种多项式矩阵模型, 并分别讨论了它们在参数空间中的凸包性质。文中还提出了一种改进的鲁棒稳定性的线性矩阵不等式检验条件, 从而得到各模型的鲁棒稳定性的数值检验条件。

[参 考 文 献]

- [1] Chapellat H, Bhattacharyya S P. A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, AC $\mathbf{34}$ (3): 306—311.
- [2] Zadeh L, Desoer C A. Linear System Theory[M]. New York: McGraw Hill, 1963.
- [3] Bartlett A C, Hollot C V, Huang L. Root locations for an entire polytope of polynomial: it suffices to check the edges[J]. Math Contr Signals Syst, 1988, $\mathbf{1}$ (1): 61—71.
- [4] Henrion D, Arzelier D, Peaucelle D. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytope[J]. Automatica, 2001, $\mathbf{37}$ (3): 461—468.
- [5] Oliveira P J, Oliveira R C L F, Peres P L D. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, $\mathbf{47}$ (10): 1770—1775.
- [6] WANG Long, WANG Zhi_zhen, YU Wen_sheng. Stability of polytopic polynomial matrices[A]. In: Proc American Control Conference [C]. Arlington, Virginia, 2001, 4695—4696.
- [7] Henrion D, Bachelier, Sebek M. D -stability of polynomial matrices[J]. International Journal of Control, 2001, $\mathbf{74}$ (8): 845—856.

Frequency Domain Criteria for Robust D -Stability of MIMO Systems Based on LMI Method

LI Hai_bin^{1,3} WANG Zhi_zhen², WANG Long¹,
LI Zhao_ping³, LI Er_xiao⁴

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University,
Beijing 100871, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China;

3. Beijing 1303_15[#], Beijing 100073, P. R. China;

4. Lanzhou 53[#]_601, Lanzhou 730070, P. R. China)

Abstract: The problem of checking robust D -stability of multi_in and multi_out (MIMO) systems is studied. Three system models were introduced, i. e. multilinear polynomial matrix, polytopic polynomial matrix and feedback system model. Furthermore, the convex property of each model with respect to the parametric uncertainties was established respectively. Based on this, sufficient conditions for D -stability were expressed in terms of linear matrix inequalities (LMIs) involving only the convex vertices. Therefore, the robust D -stability was tested by solving an LMI optimal problem.

Key words: polynomial matrix; robust D -stability; linear matrix inequality; parametric uncertainty