应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2006) 01_0112_07

加权 Sobolev 空间中的 Poincar 不等式*

王万义[1,2,3], 孙 炯[1], 郑志明[3]

(1. 内蒙古大学 数学系, 呼和浩特 010021;
2. 内蒙古师范大学 数学系, 呼和浩特 010022;
3. 北京大学 数学科学学院, 北京 100871)

(张石生推荐)

摘要: 在加权 Sobolov 空间中讨论了加权的 Poincar 不等式, 利用嵌入映射给出了加权 Poincar 不等式成立的充分和必要条件•

关 键 词: 加权的 Sobolev 空间; Poincar 不等式; 嵌入映射
中图分类号: O177 文献标识码: A

引 言

Poincar 不等式是数学中的一类重要不等式, 对于 Poincar 不等式成立的充分和必要条件的研究, 在理论和应用上都是十分有意义的, 如 Amick[1], Edmunds[2,3], Hurri[4], Kufner[5,6], Edmunds[7~9]等• 文献[4]研究了加权的 Poincar 不等式• 文献[7]在加权 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega; w, v)$ 中研究了加权的 Poincar 不等式• 文献[8]和文献[9]在抽象的 Sobolev 空间中研究了 Poincar 不等式•

本文推广了文献[7], 在加权 Sobolov 空间 $W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 中讨论了加权的 Poincar 不等式, 给出了加权的 Poincar 不等式成立的充分与必要条件•

1 预 备 知 识

本文的讨论是在实函数空间中进行的, 对于复空间来说, 结果也成立•

Ω 表示R^n 中的一个域, $W(\Omega)$ 表示权函数的集合, 即 Ω 上所有几乎处处正的、有限的可测函数集•

设$1 \leqslant p < \infty$, $w(x) \in W(\Omega)$, 加权Lebesgue空间$L^p(\Omega; w)$ 表示 Ω 上所有可测函数集, 且带有如下定义的有限范数:

$$\| u(x) \|_{p,\Omega,w} = \left(\int_\Omega | u(x) |^p w(x) \mathrm{d}x \right)^{1/p}, \tag{1}$$

显然, $L^p(\Omega; w)$ 是完备的•

---

* 收稿日期: 2003_02_25; 修订日期: 2005_08_23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10261004, 10461006); 高校重点实验室访问学者基金和内蒙古自治区自然科学基金资助项目(200408020104)
作者简介: 王万义(1963—), 男, 内蒙人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_471_4392228; Fax: + 86_471_4393006; E_mail: wwy@ imnu. edu. cn)•

设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 α_i 是非负整数 $(i=1,2,\cdots,n)$，令

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad D^{\alpha}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}.$$

设 $w,v_\alpha\in W(\Omega)$，$0\leqslant m<\infty$，加权Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 表示所有满足以下条件的函数 $u(x)$ 的集合：

1) 对于任意满足 $|\alpha|=m$ 的 α，在 Ω 上 u 的弱导数 $D^\alpha u(x)$ 存在。

2) 范数

$$\|u(x)\|_{m,p,\Omega,w,v_\alpha}=\left(\|u(x)\|_{p,\Omega,w}^{p}+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u(x)\|_{p,\Omega,v_\alpha}^{p}\right)^{1/p}\tag{2}$$

有限。

引理 1.1

1) 设 $w^{-1/p},v_\alpha^{-1/p}\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$（$q$ 是 p 的共轭指数）。则 $W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 是一个 Banach 空间。

2) 设 $w,v_\alpha\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。则 $C_0^\infty(\Omega)\subset W^{w,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$。

3) 设 $w^{-1/p},v_\alpha^{-1/p}\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$w,v_\alpha\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。则 $W_0^{m,p}(\Omega,w,v\langle\alpha\rangle)$ 也是一个Banach 空间，其中 $W_0^{m,p}(\Omega,w,v\langle\alpha\rangle)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包。

证明是常规性的，此处略。

本文的讨论中始终假定 $w^{-1/p},v_\alpha^{-1/p}\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$w,v_\alpha\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。

设 X,Y 是两个 Banach 空间，若 $X\subset Y$ 且 X 到 Y 的自然内射是连续的（或紧的），则记作 $X\hookrightarrow Y$（或 $X\hookrightarrow\hookrightarrow Y$）。

2　加权的 Poincaré 不等式

设 $1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant m<\infty$，$w,v_\alpha\in W(\Omega)$。若存在一个正数 K_1，使得对于 $\forall u(x)\in W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 有

$$\int_\Omega|u(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\leqslant K_1\left[\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|^p+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u(x)\|_{p,\Omega,v_\alpha}^p\right]$$

成立，则称 $(\Omega,w,v\langle\alpha\rangle)$ 满足加权的 Poincaré 不等式。

引理 2.1　设 $w(x)\in W(\Omega)$，且

$$\int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x<\infty,$$

则对于 $\forall u(x)\in W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$，$u(x)$ 的加权平均 $u_{\Omega,w}$：

$$u_{\Omega,w}=\left(\int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\left(\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

是有限的。

证明　由 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}|u_{\Omega,w}|&=\left(\int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\\&\left(\int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\int_\Omega|u(x)||w(x)|^{1/p}|w(x)|^{1/q}\,\mathrm{d}x\leqslant\\&\left(\int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1/p}\|u(x)\|_{p,\Omega,w}.\end{aligned}$$

定理 2.2 设 $w, v_\alpha \in W(\Omega)$, $w \in L^1(\Omega)$, 则以下结论等价:

1) $(\Omega, w, v\{\alpha\})$ 满足加权的 Poincar 不等式•

2) 存在一个正数 K_2, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 有

$$\int_\Omega | u - u_{\Omega,w} |^p w \,\mathrm{d}x \leqslant K_2 \sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p•$$

3) 存在一个正数 K_3, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 有

$$\inf_{c \in R} \| u(x) - c \|_{p,\Omega,w} \leqslant K_3 \left(\sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p \right)^{1/p}•$$

证明 1) $\Rightarrow$ 2) : 设 $u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$, 则 $u(x) - u_{\Omega,w} \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 且

$$\int_\Omega (u(x) - u_{\Omega,w}) w \,\mathrm{d}x = 0,$$

由 1) 得

$$\int_\Omega | u(x) - u_{\Omega,w} |^p w \,\mathrm{d}x \leqslant K_1 \sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p•$$

2) $\Rightarrow$ 3) : 设 $u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$, 则

$$\inf_{c \in R} \| u(x) - c \|_{p,\Omega,w} \leqslant \| u(x) - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w} \leqslant K_2^{1/p} \left(\sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p \right)^{1/p}•$$

3) $\Rightarrow$ 2) : 设 $u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$, $c \in R$ 则

$$\| u(x) - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w} \leqslant \| u(x) - c \|_{p,\Omega,w} + \| c - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w}, \tag{3}$$

由 Hölder 不等式, 我们有

$$\| u_{\Omega,w} - c \|_{p,\Omega,w} = \left[\int_\Omega | u_{\Omega,w} - c |^p w \,\mathrm{d}x \right]^{1/p} =$$

$$\left[\int_\Omega \left| \left(\int_\Omega w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{-1} \left(\int_\Omega u(y) w(y) \,\mathrm{d}y \right) - c \right|^p w(x) \,\mathrm{d}x \right]^{1/p} =$$

$$\left(\int_\Omega w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{-1} \left[\int_\Omega \left| \int_\Omega (u(y) - c) w(y) \,\mathrm{d}y \right|^p w(x) \,\mathrm{d}x \right]^{1/p} =$$

$$\left(\int_\Omega w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{1/p - 1} \left| \int_\Omega (u(y) - c) w(y) \,\mathrm{d}y \right| \leqslant$$

$$\left(\int_\Omega w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{-1/q} \left(\int_\Omega | u(y) - c |^p w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{1/p} \left(\int_\Omega w(y) \,\mathrm{d}y \right)^{1/q} =$$

$$\| u - c \|_{p,\Omega,w},$$

由 (3) 得

$$\| u(x) - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w} \leqslant 2 \inf_{c \in R} \| u(x) - c \|_{p,\Omega,w}, \tag{4}$$

于是由 (4) 可得

$$\int_\Omega | u(x) - u_{\Omega,w} |^p w \,\mathrm{d}x = \| u(x) - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w}^p \leqslant$$

$$\left(2 \inf_{c \in R} \| u(x) - c \|_{p,\Omega,w} \right)^p \leqslant \left(2K_3 \left(\sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p \right)^{1/p} \right)^p =$$

$$(2K_3)^p \sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u(x) \|_{p,\Omega,v_\alpha}^p•$$

2) $\Rightarrow$ 1) : 设 $u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$• 因为:

$$\| u(x) \|_{p,\Omega,w} \leqslant \| u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w} + \| u - u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w},$$

$$\| u_{\Omega,w} \|_{p,\Omega,w} = \left(\int_\Omega | u_{\Omega,w} |^p w \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} = | u_{\Omega,w} | \left(\int_\Omega w \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} =$$

$$\left|\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}=$$
$$\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{-1/q}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|,$$

所以

$$\|u(x)\|_{p,\Omega,w}\leqslant\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{-1/q}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|+\|u(x)-u_{\Omega,w}\|_{p,\Omega,w},\tag{5}$$

由(5)与条件 2) 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u|^p w\,\mathrm{d}x&=\|u\|^p_{p,\Omega,w}\leqslant\\ &\left[\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|+\|u(x)-u_{\Omega,w}\|_{p,\Omega,w}\right]^p\leqslant\\ &2^{p-1}\left[\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{p/q}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|^p+\|u-u_{\Omega,w}\|^p_{p,\Omega,w}\right]\leqslant\\ &2^{p-1}\left[\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{p/q}\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|^p+K_2\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u(x)\|^p_{p,\Omega,v_\alpha}\right]\leqslant\\ &K_1\left(\left|\int_\Omega u(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}x+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u(x)\|^p_{p,\Omega,v_\alpha}\right),\end{aligned}$$

其中

$$K_1=2^{p-1}\max\left\{K_2,\left(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x\right)^{p/q}\right\},$$

故定理得证•

令 $W_c(\Omega)=\left\{w(x)\in W(\Omega)\mid\right.$ 在 Ω 的任一个紧子集 Q 上, $a_Q\leqslant w(x)\leqslant b_Q$, a_Q, b_Q 为正的常数$\left.\right\}$• 若 $w(x)\in W_c(\Omega)$, 则由文献[7] 知 $w\in L^1_{loc}(\Omega)$, $w^{-1/p}\in L^q_{loc}(\Omega)$•

对于 R^n 的任一个域 Ω, 我们能把 Ω 表示为:

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k,\tag{6}$$

其中 $\Omega_k\in C^{0,1}$(即, Ω_k 是一个边界能被满足Lipschitz条件的函数局部描述的有界域• 详细定义见文献[5, p21] 和文献[7, p83]), 且对于 $\forall k\in N$ 有

$$\Omega_k\subset\bar{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}\subset\Omega,$$

令 $\Omega^k=\Omega\setminus\bar{\Omega}_k$,

$$A_k=\sup_{\|u\|_{m,p,\Omega,w,v_\alpha}\leqslant 1}\|u\|_{p,\Omega^k,w},\tag{7}$$

由(7)和文献[7]的注 3.10 知,

$$0\leqslant A_{k+1}\leqslant A_k\leqslant 1,\ \lim_{k\to\infty}A_k=A\in[0,1],\ A=\beta(I),$$

其中 $\beta(I)$ 是自然嵌入映射 I 的非紧球测度:

$$\mathrm{I}: W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)\rightarrow L^p(\Omega;w)•$$

定理 2.3 设 $1\leqslant p<\infty$, w, $v_\alpha\in W_c(\Omega)$, F 是 $W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 上的一个函数且满足:

(c_1) F 在 $W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 上连续•

(c_2) $F(\lambda u)=\lambda F(u)$, $\lambda>0$, $u\in W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$•

(c_3) 如果 $u\in P_{m-1}\cap W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$, 其中 P_{m-1} 是 R^n 上次数小于 m 的多项式集合, 且 $F(u)=0$, 那么 $u=0$•

若 $A<1$, 则存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x)\in W^{m,p}(\Omega;w,v\langle\alpha\rangle)$ 有

$$\int_{\Omega} |u|^p w\,dx \leqslant K\Big[|F(u)|^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{p,\Omega,v_\alpha}\Big], \tag{8}$$

证明 设 $\alpha \in (A,1)$, 则存在 $n_0 \in N$, 使得对于 $n \geqslant n_0$ 有

$$A_n \leqslant \alpha, \tag{9}$$

取定 $n \in N$, $n \geqslant n_0$, 由(7) 与(9) 知, 对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 有

$$\int_{\Omega^n} |u|^p w\,dx \leqslant \alpha^p \|u\|^p_{m,p,\Omega,w,v\langle\alpha\rangle},$$

$$\int_{\Omega^n} |u|^p w\,dx \leqslant \frac{\alpha^p}{1-\alpha^p}\Big(\|u(x)\|^p_{p,\Omega_n,w} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u(x)\|^p_{p,\Omega,v_\alpha}\Big). \tag{10}$$

假设定理 2.3 的结论不成立, 则存在 $\{u_j\} \subset W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 使得

$$\int_{\Omega} |u_j|^p w\,dx = 1 \qquad (\forall j \in N), \tag{11}$$

$$F(u_j) \to 0 \qquad (j \to \infty), \tag{12}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u_j\|^p_{p,\Omega,v_\alpha} \to 0 \qquad (j \to \infty), \tag{13}$$

因为 $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $\Omega_n \in C^{0,1}$, 所以

$$W^{m,p}(\Omega_n; w, v\langle\alpha\rangle) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega_n; w),$$

由(11) 与(13) 知, $\{u_j\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega_n; w, v\langle\alpha\rangle)$ 上有界, 因此存在 $\{u_j\}$ 的一个子列 $\{u_{j(k)}\}$ 是 $L^p(\Omega_n; w)$ 中的 Cauchy 列. 由(10) 与(13) 知, $\{u_{j(k)}\}$ 也是 $L^p(\Omega^n; w)$ 中的 Cauchy 列. 因此, 存在 $u \in L^p(\Omega; w)$ 使得在 $L^p(\Omega; w)$ 中有

$$u_{j(k)} \to u \qquad (k \to \infty), \tag{14}$$

由(14) 与(13) 知, 在 $W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 中也有

$$u_{j(k)} \to u \qquad (k \to \infty),$$

由(c_1) 知, $F(u_{j(k)}) \to F(u)\ (k \to \infty)$. 再由(12) 得, $F(u) = 0$.

设 $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 则由(14) 与(13) 得

$$\int_{\Omega} \Phi D^\alpha u\,dx = (-1)^m \int_{\Omega} u D^\alpha \Phi\,dx = (-1)^m \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} u_{j(k)} D^\alpha \Phi\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} \Phi D^\alpha u_{j(k)}\,dx = 0,$$

因此在 Ω 中 $D^\alpha u = 0$ ($|\alpha| = m$), 故 $u \in P_{m-1}$. 由(c_3) 知, $u = 0$, 这使得(11) 与(14) 矛盾. 故定理得证.

推论 2.4 设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$. 若 $A < 1$ 且以下条件成立:

(c_4) 如果 $u \in P_{m-1} \cap W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$, $\int_{\Omega} uw\,dx = 0$, 那么 $u = 0$.

则 $(\Omega, w, v\langle\alpha\rangle)$ 满足加权的 Poincar 不等式.

证明 令 $F(u) = \int_{\Omega} uw\,dx$, 由定理 2.3 可知.

推论 2.5 设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, 若 $P_{m-1} \cap W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle) = \{0\}$, $A < 1$, 则存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 有

$$\int_{\Omega} |u|^p w\,dx \leqslant K \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u_j\|^p_{p,\Omega,v_\alpha}. \tag{15}$$

证明 令 $F(u) = 0$, 由定理 2.3 可知.

定理 2.6 设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $F \in W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)^*$ 且条件(c_1)、(c_2)、(c_3)成立. 若存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 有(8) 成立, 则 $A < 1$.

证明　由 A_j 的定义知, 存在 $u_j \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$, $\| u_j \|_{m,p,\Omega,w,v\{\alpha\}} \leqslant 1$, 使得

$$A_j - \frac{1}{j} \leqslant \| u_j \|_{p,\Omega^j,w} \leqslant A_j \qquad (j \in N), \tag{16}$$

假设 $\lim_{j\to\infty} A_j = A = 1$, 则由(16)得

$$\lim_{j\to\infty} \| u_j \|_{p,\Omega^j,w} = 1, \tag{17}$$

因为:

$$\| u_j \|_{p,\Omega^j,w} \leqslant \| u_j \|_{p,\Omega,w} \leqslant \| u_j \|_{m,p,\Omega,w,v\{\alpha\}} \leqslant 1,$$

所以由(17)得

$$\| u_j \|_{p,\Omega,w} \to 1 \qquad (j \to \infty), \tag{18}$$

$$\| u_j \|_{m,p,\Omega,w,v\{\alpha\}} \to 1 \qquad (j \to \infty), \tag{19}$$

因此

$$\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u_j \|^p_{p,\Omega,v_\alpha} \to 0 \qquad (j \to \infty), \tag{20}$$

$$\| u_j \|_{p,\Omega,w} \to 0 \qquad (j \to \infty), \tag{21}$$

由(19)式知, $\{u_j\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 中有界, $\{F(u_j)\}$ 也有界. 于是 $\{F(u_j)\}$ 有 Cauchy 子列 $\{F(u_{j(k)})\}$.

由(8)有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega | u_{j(k)} - u_{j(l)} |^p w\, dx \leqslant \\
&\quad K\Big[| F(u_{j(k)} - u_{j(l)}) |^p + \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u_{j(k)} - u_{j(l)} \|^p_{p,\Omega,v_\alpha} \Big] \leqslant \\
&\quad K\Big[| F(u_{j(k)} - u_{j(l)}) |^p + 2^{p-1} \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha (u_{j(k)}) \|^p_{p,\Omega,v_\alpha} + \\
&\quad 2^{p-1} \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha (u_{j(l)}) \|^p_{p,\Omega,v_\alpha} \Big],
\end{aligned}$$

由(20)知, $\{u_{j(k)}\}$ 是 $L^p(\Omega; w)$ 中 Cauchy 列. 因此存在 $u \in L^p(\Omega; w)$, 使得在 $L^p(\Omega; w)$ 中有

$$u_{j(k)} \to u \qquad (j \to \infty), \tag{22}$$

利用(21)可得

$$0 \leqslant \| u \|_{p,\Omega,w} \leqslant \| u - u_{j(k)} \|_{p,\Omega,w} + \| u_{j(k)} \|_{p,\Omega_{j(k)},w} \to 0,$$

因此 $u = 0$, 这使得(18)与(22)矛盾. 故定理得证.

推论 2.7　设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $w \in L^1(\Omega)$, 且条件(c4)成立. 若 $(\Omega, w, v\{\alpha\})$ 满足加权的 Poincaré 不等式, 则 $A < 1$.

推论 2.8　设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $P_{m-1} \cap W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\}) = \{0\}$. 若存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 有(15)成立, 则 $A < 1$.

由定理 2.3 和 2.6 可得

定理 2.9　设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $F \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})^*$ 且条件(c1)、(c2)、(c3)成立. 则存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\{\alpha\})$ 有

$$\int_\Omega | u |^p w\, dx \leqslant K\Big[| F(u) |^p + \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|^p_{p,\Omega,v_\alpha} \Big],$$

成立的充分必要条件是 $A < 1$.

由推论 2.4 和 2.7 可得

定理 2.10　设 $1 \leqslant p < \infty$, $w, v_\alpha \in W_c(\Omega)$, $w \in L^1(\Omega)$, 且条件(c4)成立. 则 $(\Omega, w,$

$v\langle\alpha\rangle$) 满足加权的 Poincar 不等式的充分必要条件是 $A < 1$•

由推论 2.5 和 2.8 可得

定理 2.11 设 $1 \leqslant p < \infty, w, v_\alpha \in W_c(\Omega), P_{m-1} \cap W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle) = \{0\}$• 则存在一个常数 K, 使得对于 $\forall u(x) \in W^{m,p}(\Omega; w, v\langle\alpha\rangle)$ 有

$$\int_\Omega |u|^p w \, dx \leqslant K \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega,v_\alpha}^p,$$

成立的充分必要条件是 $A < 1$•

[参 考 文 献]

[1] Amick C J. Some remarks on Rellich' s theorem and the Poincare inequality[J]. J London Mathematics Society, 1978, **18**(2): 319—328.

[2] Edmunds D E, Evans W D. Spectral Theory and embeddings of Sobolev spaces[J]. Quarterly J Mathematics Oxford Series, 1979, **30**(2): 431—453.

[3] Edmunds D E, Evans W D. Spectral Theory and Differential Operators[M]. Oxford: Oxford University Press, 1987, 1—50.

[4] Hurri R. The weighted Poincare inequalities[J]. Mathematics Scand, 1990, **67**(1): 145—160.

[5] Kufner A. Weighted Sobolev Spaces[M]. Wiley: Wiley Chichester Press, 1985, 1—100.

[6] Kufner A, Opic B. How to define reasonably weighted Sobolev spaces[J]. Commentarii Mathematics University Coarlinae, 1984, **25**(3): 537—554.

[7] Edmunds D E, Opic B. Weighted Poincar and friedrichs inequalitics[J]. J London Mathematics Society, 1993, **47**(2): 79—96.

[8] Edmunds D E, Opic B, Pick L. Poincar and friedrichs inequalities in abstract Sobolev spaces[J]. Mathematics Proceeding Cambridge Philosophy Society, 1993, **113**(1): 355—379.

[9] Edmunds D E, Opic B, Rakosnik J. Poincare and Friedrichs inequalities in abstract Sobolev spaces(2)[J]. Mathematics Proceeding Cambridge Philosophy Society, 1994, **115**(1): 159—173.

Poincar Inequalities in Weighted Sobolev Spaces

WANG Wan_yi[1,2,3], SUN Jiong[1], ZHENG Zhi_ming[3]

(1. Deptartment of Mathematics, Inner Mongolia University, Huhhot 010021, P.R.China;

2. Deptartment of Mathematics, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, P.R.China;

3. School of Mathematics, Sciences Peking University, Beijing 100871, P.R.China)

Abstract: The weighted Poincar inequalities in weighted Sobolev spaces were discussed and some necessary and sufficient conditions for them to hold were given.

Key words: weighted Sobolev spaces; Poincar inequality; embedding