

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0105-07

短距离竞技游泳运动的推进力 最优化分析初探*

王新峰, 王连泽

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(叶庆凯推荐)

摘要: 通过建立竞技游泳运动的动力学模型和能量转换模型, 并运用最优控制理论对于在给定时间内所游进的路程进行了最优化分析, 结合奥运会记录和前人实验结果推导出在一定假设和限制条件下推进力的最优解, 得到了与实际情况吻合的最佳速度和体能分配方案

关键词: 竞技游泳; 能量; 最优化; 推进力

中图分类号: O232 文献标识码: A

引 言

竞技游泳经过多年的发展已成为当今体育运动的重要项目, 为了提高游泳成绩, 世界泳坛经历了一场观念上的更新, 主要是提高训练技术, 使游泳动作更趋合理, 实际上竞技策略的研究和应用也同样重要。本文正是基于策略的考虑, 将最优控制理论应用到竞技游泳运动的分析中来, 将给定路程求最小时间问题经过等价转化成给定时间求最大路程的问题, 经过理论推导, 求出了一定条件下的最优解, 即怎样合理分配速度和体能, 以使得在给定的时间内所游进的路程最大。

1 数学模型

将人体简化成一个质点, 且只考虑水平方向运动, 根据牛顿第二定律得:

$$mV(t) = F(t) - \frac{1}{2}C_d A \rho V^2(t), \quad (1)$$

其中 $F(t)$ 是等效水平推进力, m 是运动员质量, ρ 是水的密度, C_d 是阻力系数^[1], A 是人体的垂直投影截面积, $V(t)$ 是人体游进速度, 由于推进力有限, 设其最大值为 Q , 将 $F(t)$ 归一化成 $u(t)$:

$$u(t) = \frac{F(t)}{Q}, \quad (2)$$

* 收稿日期: 2004_04_29; 修订日期: 2005_06_17

基金项目: 国家体育总局备战奥运会重点科研攻关项目(020330)

作者简介: 王新峰(1979—), 男, 湖北人, 硕士(Tel: + 86_937_2466445; E_mail: wangxinfeng@tsinghua.edu.cn);

王连泽, 副教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86_10_62771824; E_mail: wanglz@tsinghua.edu.cn).

因此 $0 \leq u(t) \leq 1$, 由于 A 、 Q 因人而异, 但与 m 很大程度上成线性关系^[2,3], 因此质量单位化得如下两系数:

$$a = \frac{\rho C_d A}{2m}, \quad (3)$$

$$b = \frac{Q}{m}, \quad (4)$$

则动力学方程简化为:

$$\dot{V}(t) = -aV^2(t) + bu(t) \cdot V(t) \quad (5)$$

此外游泳运动还涉及到一个复杂的生理学过程, 人体是依靠有氧代谢和无氧代谢提供运动所需的能量, 可以用下式描述人体储能 $E(t)$ 的变化率^[4]:

$$\dot{E}(t) = K - P - N - R, \quad (6)$$

其中 K 为通过有氧代谢和无氧代谢生成能量的功率, $P = bu(t)V(t)$ 为水平推进功率, N 为非推进功率, R 是以热能形式耗散的功率。研究发现, 竞技游泳中 50 m 比赛中无氧代谢占 95%, 100 m 比赛中占 80%^[5]。可见赛程越大, 无氧代谢所占比例越小, 而有氧代谢所占比例越高。本文针对短距离(不超过 200 m) 竞技游泳运动建模, 认为短距离比赛中人体输出功率全部由无氧代谢提供, 且忽略热量的耗散和非推进功, 则有:

$$\dot{E}(t) = -b \cdot u(t) \cdot V(t) \quad (7)$$

即人体可利用的储能全部消耗在水平推进上。

2 最优问题的提法

实际竞技游泳追求的是给定路程所用的时间最短, 为方便, 此处分析其等价问题^[6], 即在给定时间内如何分配速度和体能使游进路程最大。由于不同泳式对应的出发技术不同, 为统一起见假定运动员均是从水中池壁出发且初速度均为 0, 并忽略运动员到池壁的转身动作。因此最优问题的提法^[7,8]为: 已知非线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = f$, 其中

$$X = \begin{bmatrix} V \\ E \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$f = \begin{bmatrix} -aV^2 + bu \\ -buV \end{bmatrix}, \quad (9)$$

求一容许的推进力 $u(t)$, $0 \leq u(t) \leq 1$, 使系统由给定的初态

$$X(t) |_{t=0} = X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

出发, 到达某一给定的末态时刻 t_f , 使之满足末态约束

$$E(t_f) \geq 0, \quad (11)$$

并使下列性能指标达到极小。

$$J[u(\cdot)] = \int_0^{t_f} -V dt \quad (12)$$

3 分析及求解

对于状态方程右端为非线性函数的情况, 至今还没有判断最优控制存在性的一般性判别方法, 但从该极值问题的物理意义可以认为最优解是存在的^[7]。应用拉格朗日乘子法和库恩-塔克尔定理将上述性能指标化成等价的性能指标^[7,9]:

$$J[u(\cdot)] = -\beta E(t_f) + \int_0^{t_f} [-V + \bar{\lambda}^T(f - X)] dt, \quad (13)$$

其中 $\bar{\lambda} = [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]^T$ 为非 0 协态向量, β 为常数, 且要满足:

$$\beta \geq 0, \quad \beta E(t_f) = 0 \quad (14)$$

构造哈密顿(Hamilton)函数 H 如下:

$$H(X, \bar{\lambda}, u) = -V + \bar{\lambda}^T f = -V + \lambda_1(-aV^2 + bu) + \lambda_2(-buV) \quad (15)$$

记 $S(X(t_f)) = -\beta E(t_f)$, 则原指标变成:

$$J[u(\cdot)] = S(X(t_f)) + \int_0^{t_f} (H(X, \bar{\lambda}, u) - \bar{\lambda}^T X) dt \quad (16)$$

应用庞特里亚金极小值原理^[10], 可得:

(i) 协态方程:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial V} = 1 + 2a\lambda_1 V + \lambda_2 bu, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial E} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

(ii) 横截条件:

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f) = \frac{\partial S(X(t_f))}{\partial V(t_f)} = 0, \\ \lambda_2(t_f) = \frac{\partial S(X(t_f))}{\partial E(t_f)} = -\beta \end{cases} \quad (18)$$

(iii) 哈密顿函数 H 作为 $u(t)$ 的函数, 在 $u(t) = u^*(t)$ 时取绝对极小:

$$H(X^*(t), \bar{\lambda}(t), u^*(t)) = \min_{0 \leq u(t) \leq 1} H(X^*(t), \bar{\lambda}(t), u(t)) \quad (19)$$

(iv) 哈密顿函数 H 在最优轨线上为常值, 即:

$$H(X^*(t), \bar{\lambda}(t), u^*(t)) = H(X^*(t_f), \bar{\lambda}(t_f), u^*(t_f)) = \text{const} \quad (20)$$

由于 t_f 给定, 故(20)自动满足, 由(17)、(18)得:

$$\lambda_2(t) = -\beta, \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = 1 + 2a\lambda_1 V - \beta bu \quad (22)$$

从而哈密顿函数变为:

$$H(X, \bar{\lambda}, u) = -V - a\lambda_1 V^2 + (\lambda_1 + \beta V) bu \quad (23)$$

由(iii)可知在其它量保持不变时, $u^*(t)$ 应使 H 取绝对极小, 所以:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda_1 + \beta V < 0, \\ 0, & \lambda_1 + \beta V > 0, \\ \text{undetermined}, & \lambda_1 + \beta V = 0, \end{cases} \quad (24)$$

其中 undetermined(不定)表示可取满足约束 $0 \leq u^*(t) \leq 1$ 的任意值^{[7], [10], [11]}. 当存在长度非零的时间区间 $(t_i, t_j) \subset [0, t_f]$, 满足 $\lambda_1 + \beta V = 0$ 时, 称最优问题是奇异的, 反之该最优问题是正常的, 此时最优解是 0、1 的跳变函数; 当出现奇异情况时, 对 $\lambda_1 + \beta V = 0$ 求导并联立(5)和(17)可得:

$$1 - 3a\beta V^2 = 0, \quad (25)$$

故只有当 $\beta > 0$ 时上式才能成立, 并有:

$$V(t) = \sqrt{\frac{1}{3a\beta}}, \quad (26)$$

$$u(t) = u_c = \frac{1}{3b\beta^2} \quad (27)$$

可见奇异情况只会出现在 $\beta > 0$ 条件下, 而正常情况在 $\beta = 0$ 和 $\beta > 0$ 都可能出现. 如果出现奇异情况, 则在奇异时间区间上速度和推进力都是常值. 下面针对 β 的不同情况进行讨论.

1) $\beta = 0$. 此时 u^* 只是 0, 1 的组合函数, 当 t_f 相对 E_0 而言小到某种程度以至于对任意方案都满足 $E(t_f) > 0$ 时, 由 (14) 知 $\beta = 0$, 此时不难推导出最优解 $u^* = \{1\}$, 即应该一直以最大推进力推进, 速度为:

$$V(t) = \frac{\exp(rt) - 1}{\exp(rt) + 1} V_e, \quad t \in [0, t_f], \quad (28)$$

其中 $r = 2\sqrt{ab}$, $V_e = \sqrt{b/a}$, 满足在末时刻 t_f 时能量为正:

$$E_0 + \int_0^{t_f} -b \cdot 1 \cdot V_e \frac{\exp(rt) - 1}{\exp(rt) + 1} dt = E_0 - b \int_0^{t_f} \frac{\exp(rt) - 1}{\exp(rt) + 1} V_e dt > 0, \quad (29)$$

此时最大路程可以由 (28) 式积分得到. 对于任意一个 E_0 , 总对应一个临界时刻 T_c , 它是方案 $\{1\}$ 消耗完所有能量的时间, 显然当 $t_f \leq T_c$ 时, $\{1\}$ 是最优解. 以下讨论 $t_f > T_c$ 情况, 若某一可行解在给定末时刻 t_f 时能量仍为正, 则必有一种解在 t_f 时能量为 0, 且所游路程更大, 故 $t_f > T_c$ 时, 应当消耗完所有的能量即 $E(t_f) = 0$ 才会使路程更大, 此时必有 $\beta \neq 0$, 才能使原性能指标 $J[u(\cdot)]$ 取极小值.

2) $\beta > 0$. 此时推进力不论是正常解还是奇异解, 推进力在开始一个时间区间上不能恒为 0, 否则一定不是最优解; 任何以非 0 开始的推进力可行解对应的速度在整个时间区间 $t \in (0, t_f)$ 上均为正, 即 $V(t) > 0$. 如果推进力在最后一个时间区间上恒为 1, 由 (24) 式知 $\lambda(t) < -\beta V$, 又 $\beta > 0$ 且 $\lambda(t)$ 是连续函数, 所以必存在一个很小的正数 ε , 使得最后时间区间上任何时刻都有 $\lambda(t) \leq -\varepsilon < 0$, 与横截条件 $\lambda(t_f) = 0$ 相矛盾. 所以推进力在开始阶段不能恒为 0, 在最后阶段不能恒为 1, 即正常可行解有 $\{1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, 0, 1, 0\}$...; 奇异可行解有 $\{1, u_c, 0\}$ 、 $\{1, u_c, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, u_c, 0\}$ 、 $\{1, 0, u_c, 1, 0\}$ 、 $\{1, u_c, 0, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, u_c, 0\}$ 、 $\{1, u_c, 0, 1, u_c, 0\}$...

通过以上分析可知可行解有多种而不是唯一的, 这是因为对于非线性系统而言极小值原理给出的只是最优控制的必要条件而非充要条件^[7]. 另外 E_0, t_f, a, b 等都是未知参数, 因此求出的各种可行解对应的最大路程的解析表达式异常复杂, 且在推进力分段次数较大时甚至求不出显式表达式, 这样就很难确定最优解. 考虑到游泳运动的实际情况, 本文认为不宜采用推进力的频繁交替变换方案, 一是由于这种推进力的频繁交替变化使得速度不断起伏变化, 必然导致较大额外阻力的产生; 二是推进力的频繁交替变化会使游泳运动员更容易过早疲劳, 二者均不利于提高成绩. 基于此, 对推进力的跳变次数作如下限制: 正常解跳变不超过 5 次, 奇异解跳变不超过 4 次. 综合 $\beta = 0$ 和 $\beta > 0$ 可知正常可行解有 4 个, 分别是 $\{1\}$ 、 $\{1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, 0, 1, 0\}$; 奇异可行解 6 个分别是 $\{1, u_c, 0\}$ 、 $\{1, u_c, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, u_c, 0\}$ 、 $\{1, 0, u_c, 1, 0\}$ 、 $\{1, 0, 1, u_c, 0\}$ 、 $\{1, u_c, 0, 1, u_c, 0\}$. 在该限制范围内进行选择以确定最优解, 实际上为全局的次优解. 尽管对推进力的跳变次数做了限制, 但是诸多参数没有具体的数值, 即使在数目有限的可行解中进行最优解的选择也是很困难的. 虽然参数 a, b 通过实验可以测量出来, 但是 E_0 到目前为止尚未有好的测量或计算方法. 为此根据前人实验测量结果以及第 27 届奥运会冠军纪录算出 a, b 的值, 以此来求最优解并拟合出最佳的 E_0 值.

根据文献[12]提供的男子自由泳动态阻力的实验结果可算得 $a = 0.32/m$; 第 27 届奥运

会男子短池自由泳 50 m、100 m、200 m 的冠军记录分别是 21.98 s、48.30 s、105.35 s^[13]。由于 50 m 为最短赛程,可以假定 50 m 赛程中运动员都是一直以最大推进力游进,记 50 m 冠军记录为 T_{50} (100 m 冠军记录为 T_{100} ,以此类推),即当 $t_f = T_{50}$ 时最优解为 $\{1\}$,并有:

$$\int_0^{T_{50}} \frac{\exp(rt) - 1}{\exp(rt) + 1} \cdot V_e dt = 50, \quad (30)$$

将 $T_{50} = 21.98$ s 代入上式中可以解得 $V_e = 2.37$ m/s, $b = 1.79$ N/kg, $r = 1.52$ /s, 末时刻时能量应为正,代入(28)式得 $E_0 > 89.9$ J/kg。如果在 100 m 及以上距离中若仍用方案 $\{1\}$,则在末时刻时能量应为负,将 $t_f = T_{100} = 48.30$ s 代入(28)式得 $E_0 < 201.9$ J/kg。对 10 个可行解,使 E_0 在区间 $[89.9, 201.9]$ 按步长为 1 逐渐增大进行数值求解,运用最小二乘法拟合 100 m、200 m 赛程,可以确定出最优解为 $\{1, u_c, 0\}$,能量初值的最佳拟合为 $E_0^* = 176$ J/kg,进而可以求出当给定 $t_f = 48.30$ s 和 $t_f = 105.35$ s 时对应的最大距离,相对误差对比情况如表 1 所示。由 E_0^* 可计算出 $T_c = 42.23$ s,当 $t_f = T_c = 42.23$ s,可得最大路程为 $D_{\max} = 98.32$ m,当 $t_f > T_c = 42.23$ s 时,最优解为 $\{1, u_c, 0\}$,其推进力和速度分布为:

表 1 理论解对应的距离与实际距离的对比

t_f/s	实际距离 D/m	理论最优解 D^*/m	相对误差 $e/(%)$
21.98	50	50.00	0
48.30	100	107.55	7.55
105.35	200	182.01	- 8.88

$$u^* = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1^-], \\ u_c, & t \in [t_1^+, t_2^-], \\ 0, & t \in [t_2^+, t_f], \end{cases} \quad (31)$$

$$V^* = \begin{cases} \frac{2.37\exp(1.52t) - 2.37}{\exp(1.52t) + 1}, & t \in [0, t_1^-], \\ V_c, & t \in [t_1^+, t_2^-], \\ \frac{V_c}{0.32V_c(t - t_2) + 1}, & t \in [t_2^+, t_f], \end{cases} \quad (32)$$

其中:

$$V_c = \frac{2.37\exp(1.52t_1) - 2.37}{\exp(1.52t_1) + 1}, \quad (33)$$

$$u_c = 0.18V_c^2, \quad (34)$$

最优时刻 t_1^* 、 t_2^* 是关于 t_f 的函数,但解析式很复杂,图 1 给出了 t_f 在 $[44, 105]$ 变化时对应的 t_1^* 、 t_2^* 的数值解曲线。

以 $t_f = 48.30$ s 为例可求得最优推进力及最优速度曲线如图 2、图 3 所示,其中可得推进力的第 1 次跳变时刻为 2.54 s,第 2 次跳变时刻为 47.61 s,匀速段速度为 2.27 m/s,推进力为 0.92。

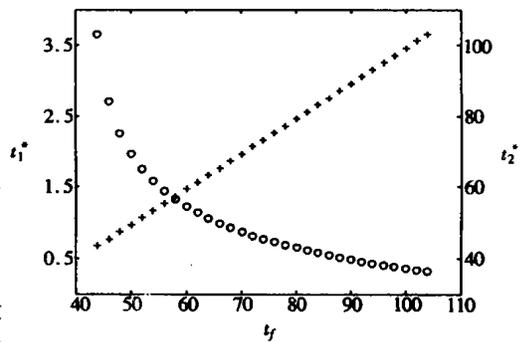
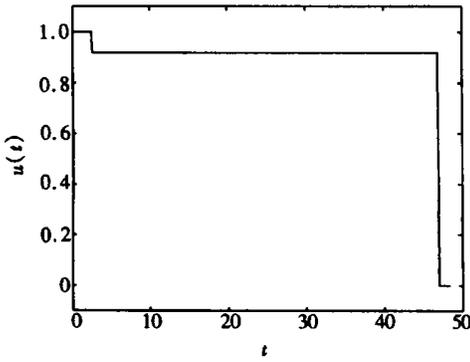
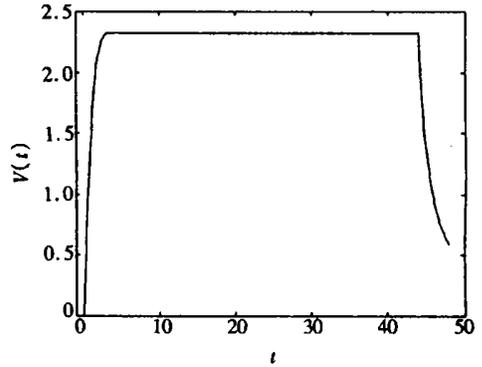


图 1 最优跳变时刻的数值解

(t_1^* : 'O', t_2^* : '+')

图2 $t_f = 48.30$ s时最优推进力的变化图3 $t_f = 48.30$ s时最优速度的变化

4 讨 论

最优解 $\{1, u_c, 0\}$ 将整个时间区间 $[0, t_f]$ 分成3个阶段, 第1阶段表示归一化的推进力恒为最大值1, 对应速度从0迅速增加; 至 t_1^* 时刻推进力跳变至小于1的恒定值 u_c 进入第2阶段, 此时速度也保持为定值。前两个阶段中人体储能不断减少, 至消耗完所有的能量 E_0 而到达 t_2^* 时刻, 推进力跳变为0, 进入第3阶段, 对应的速度不断减小, 即运动员凭借已获得的速度做最后阶段的滑行冲刺, 不过这种冲刺是减速的, 这样会在给定的时间 t_f 内达到最大的路程。结合前面的算例 ($t_f = 48.30$ s) 可以看出第1阶段的加速过程和第3阶段的减速过程所耗时间占的比例很小, 而第2阶段的匀速过程所占比例很大, 即大部分时间运动员应该匀速游进。最优解 $\{1, u_c, 0\}$ 对应的最后阶段为减速, 有些不可理解, 但实际情况可以说明这一点。根据第9届全运会游泳比赛的现场观察和有关资料的统计分析, 发现我国优秀游泳运动员(前3名)在100 m、200 m 游泳比赛中有超过50%的运动员采用了减速游法^[14]; 另外假定人体的储能 $E(t)$ 全部消耗在水平推进上, 但实际竞技游泳运动时人体储能中只有很小的一部分转化成推进功, 推进效率不到10%^[15], 但这并不妨碍假定 $E(t)$ 是人体真正可利用的那部分储能。尽管 $\{1, u_c, 0\}$ 是在短距离的情况下推导出的, 但与实际情况基本吻合, 且对于中、长距离比赛也是有借鉴意义的, 实践表明相当比例的运动员在中长距离比赛中是作匀速运动, 这样可以更有效地节省体力, 取得更好成绩。

5 结 论

竞技游泳运动是已知路程求最短时间, 本文分析的是其等价问题即已知时间求最大路程, 建立的能量转换模型只适用于短距离情况。最优方案 $\{1, u_c, 0\}$ 是在满足 $t_f > T_c$ 条件下基于前人实验和奥运记录并做了适当合理的假设后推导出来的, 是全局的次优方案; 当 $t_f \leq T_c$ 时最优方案 $\{1, u_c, 0\}$ 退化成 $\{1\}$, 是全局唯一最优解。

[参 考 文 献]

- [1] 张兆顺, 崔桂香. 流体力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999, 260—285.
- [2] Horst Behncke, Osnabrück Optimization models for the force and energy in competitive sports[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1987, 9(1): 298—311.
- [3] 姜启源. 数学模型(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987, 250—269.

- [4] Richard A Brandt, Michael A Pichowsky. Conservation of energy in competitive swimming [J]. *Journal of Biomechanics*, 1995, **28**(8): 925—933.
- [5] 李红兵, 李莉. 对游泳能量训练理论与应用若干问题的探讨 [J]. *游泳*, 2001, (3): 11—14.
- [6] 陈义华. 数学模型 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1995, 79—84.
- [7] 解学书. 最优控制—理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1986, 14—210.
- [8] Tsien H S. *Engineering Cybernetics* [M]. New York: McGraw_Hill Book Co., 1954, 214—230.
- [9] Frank L, Lewis. *Optimal control* [M]. New York: Wiley, 1986, 129—214.
- [10] 关肇直, 韩京清. 极值控制与极大值原理 [M]. 北京: 科学出版社, 1980, 25—114.
- [11] Berkovitz L D. *Optimal Control Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1974, 14—38, 169—239.
- [12] Kolmogorov S V, Duplishcheva O A. Active drag, useful mechanical power output and hydrodynamic force coefficient in different swimming strokes at maximal velocity [J]. *Journal of Biomechanics*, 1992, **25**(3): 311—318.
- [13] 程燕, 张明飞, 闫保庆, 等. 第9届世界游泳锦标赛游泳比赛综述 [J]. *中国体育科技*, 2002, **38**(10): 47—50.
- [14] 杨国宽, 谭政典, 陆伯珩. 第九届全运会优秀游泳运动员参赛战术探析 [J]. *福建体育科技*, 2002, **21**(1): 14—18.
- [15] HuuB M Toussaint, Thomas Janssen, Marc Klufft. Effect of propelling surface size on the mechanics and energetics of front crawl swimming [J]. *Journal of Biomechanics*, 1991, **24**(3/4): 205—211.

Preliminary Probe Into the Optimization on Propulsion in Short Distance Competitive Swimming

WANG Xin_feng, WANG Lian_ze

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: Based on the modeling of dynamics and energy conversion in competitive swimming, the optimal control theory was used to make an optimization analysis of the distance traveled in a given time. Using the records of the 27th Olympics and the results from previous research, an optimal solution of propulsion was derived using some hypotheses and constraints. Correspondingly, the optimal tactic for velocity and energy was put forward which was in agreement with the practice.

Key words: competitive swimming; energy; optimization; propulsion