

文章编号: 1000_0887(2006) 01_0082_07

相变演化 Suliciu 模型中波的相互作用^{*}

唐少强, 钱, 肖

(北京大学 力学与工程科学系 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: 描述相变演化的 Suliciu 模型, 其基本波可由行波分析得到. 对于任何给定分两段常值的初始状态, 相应的 Riemann 解是某些基本波的组合. 对分三段常值的初始状态, 解由上述 Riemann 解构成, 其中相邻两状态间以基本波连接. 当基本波发生碰撞时, 新的 Riemann 问题形成. 通过研究这些 Riemann 问题, 可以在适当的参数空间中对基本波之间复杂的相互作用加以分类.

关键词: 相变; Suliciu 模型; 波的相互作用

中图分类号: O0302 文献标识码: A

引 言

尽管相变研究在 20 世纪已取得丰硕的成果^[1], 但相变、特别是其演化过程仍是一项具有挑战意义的课题. 相变系统的演化可以用偏微分方程组描述, 例如, 粘弹性体满足下述方程组:

$$u_t + v_x = 0, \quad v_t + \sigma(u)_x = 0, \quad (1)$$

其中 u 是应变, v 是速度, $\sigma(u)$ 是应力. 这里, 本构关系 $\sigma(u)$ 是非单调的, 如

$$\sigma(u) = \begin{cases} 2u, & \text{当 } u < 1, \\ 3 - u, & \text{当 } 1 \leq u \leq 1.5, \\ u, & \text{当 } u > 1.5. \end{cases} \quad (2)$$

系统(1)式为混合型方程组, 在区域 $1 < u < 1.5$ 是 Laplace 型的, 出现了椭圆不稳定性^[2]. 通常有两种方法来解决这类困难: 一种是把解限制在分开的两个单调分支(称为相) $u \leq 1$ 和 $u \geq 1.5$ 里, 并提出广义熵条件(或动力学条件)来唯一确定亚音速相边界; 另一种办法则是加入耗散项, 使方程组(1)式变得稳定. 第二种方法有比较好的物理解释, 而第一种方法比较清晰地刻画了波现象.

本文将讨论一个带有低阶耗散项的 Suliciu 模型, 该模型稳定的行波和静止波给出了相变系统(1)式的一系列基本波. 通过这些基本波, 我们可以确定两段常状态初值问题的解(称为 Riemann 解). 运用 Riemann 解, 我们细致分析了三段常状态的初值问题, 研究了基本波的相互作用, 并以一个典型情况为例对结果加以分类. 这有助于更好地理解相变演化中的复杂非线性

* 收稿日期: 2004_05_17; 修订日期: 2005_09_21

基金项目: 国家重点基础研究计划“非线性科学”和自然科学基金资助项目(10002002, 90407021)

作者简介: 唐少强(1970—)男, 江苏南通人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62755410; E_mail: maotang@pku.edu.cn).

性现象•

1 Suliciu 模型中 Riemann 问题的基本波

Suliciu 在研究粘弹性问题时提出以下模型^[3]:

$$u_t + v_x = 0, v_t + w_x = 0, w_t + \lambda^2 v_x = (\sigma(u) - w) / \varepsilon, \tag{3}$$

其中 ε 是一个小参数, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, (3) 式就逼近原问题(1) 式•

令 $\xi = x - ct$, 并记 $(\cdot)' = d/d\xi$ 那么速度为 c 的行波解满足

$$-cu' + v' = 0, -cv' + w' = 0, -cw' + \lambda^2 v' = (\sigma(u) - w) / \varepsilon \tag{4}$$

方程组(4) 式的异宿轨道给出了(1) 式的一个基本波• 我们记

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (u(\xi), v(\xi)) = (u_l, v_l), \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (u(\xi), v(\xi)) = (u_r, v_r),$$

则运用相平面分析知道异宿轨道存在的充要条件为 Rankine-Hugoniot 条件:

$$c = \pm \sqrt{\frac{\sigma(u_r) - \sigma(u_l)}{u_r - u_l}}, \tag{5}$$

$$(v_r - v_l)^2 = (\sigma(u_r) - \sigma(u_l))(u_r - u_l) \tag{6}$$

和熵条件: u_l 和 u_r 必须位于本构关系 $(u, \sigma(u))$ 曲线的同一侧•

另外, 方程组(3) 式有 $v_l = v_r, \sigma(u_l) = \sigma(u_r)$ 而 u_l 和 u_r 位于不同相的稳态精确解, 这是静止相边界, 传播速度为 0• 当 $u_l \in (0.75, 1)$ 而 $u_r \in (1.5, 2)$ 时, 我们称之为 $0^{\#}$ 波; 当 $u_l \in (1.5, 2)$ 而 $u_r \in (0.75, 1)$ 时, 称之为 0^b 波•

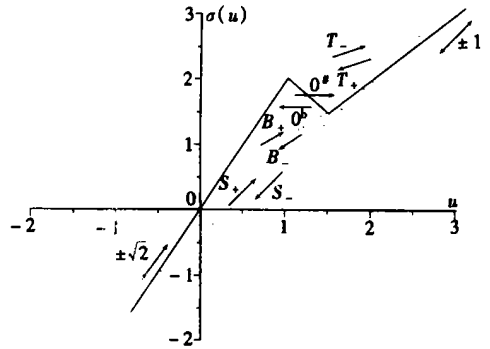


图 1 Suliciu 模型中的基本波

表 1 Suliciu 模型中的基本波

波	速度	$u_l \in$	$u_r \in$	$[v] = v_r - v_l$
$+\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$(-\infty, 1]$	$(-\infty, 1]$	$\sqrt{2}(u_r - u_l)$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$(-\infty, 1]$	$(-\infty, 1]$	$-\sqrt{2}(u_r - u_l)$
$+1$	$+1$	$[1.5, +\infty)$	$[1.5, +\infty)$	$u_r - u_l$
-1	-1	$[1.5, +\infty)$	$[1.5, +\infty)$	$-(u_r - u_l)$
$0^{\#}$	0	$[0.75, 1]$	$[1.5, 2]$	0
0^b	0	$[1.5, 2]$	$[0.75, 1]$	0
T_+	$\sqrt{(u_l - 2)/(u_l - 1)}$	$(2, +\infty)$	1	$-\sqrt{(u_l - 2)(u_l - 1)}$
T_-	$-\sqrt{(u_l - 2)/(u_l - 1)}$	1	$(2, +\infty)$	$-\sqrt{(u_l - 2)(u_l - 1)}$
B_+	$\sqrt{(1.5 - 2u_l)/(1.5 - u_l)}$	$(0, 0.75)$	1.5	$\sqrt{(1.5 - u_l)(1.5 - 2u_l)}$
B_-	$-\sqrt{(1.5 - 2u_l)/(1.5 - u_l)}$	1.5	$(0, 0.75)$	$\sqrt{(1.5 - u_r)(1.5 - 2u_r)}$
S_+	$\sqrt{(u_r - 2u_l)/(u_r - u_l)}$	$(-\infty, 0)$	$[1.5, +\infty)$	$\sqrt{(u_r - 2u_l)(u_r - u_l)}$
S_-	$-\sqrt{(u_l - 2u_r)/(u_l - u_r)}$	$[1.5, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$\sqrt{(u_l - 2u_r)(u_l - u_r)}$

总之, 我们看到给定 u_l 和 u_r 就确定了 v_l 和 v_r (可以相差一个常数), 于是完全确定了一个基本波• 因为 $u \in (1, 1.5)$ 是非物理状态, 所以只要考虑 $u \in (-\infty, 1] \cup [1.5, +\infty)$ • Suliciu 模型(3) 式给出了(1) 式的5类基本波: $\pm\sqrt{2}$ 波和 ± 1 波(波所连接的两个状态在同一相内); T_{\pm} 波(亚音速相边界); B_{\pm} : (亚音速相边界); S_{\pm} 波(超音速相边界); $0^{\#}$ 和 0^b 波(静止相边界)• 在图 1 和表 1 中详细说明了各种基本波的情况•

2 Riemann 解的构造

取两段常状态初值

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l), & \text{当 } x < 0, \\ (u_r, v_r), & \text{当 } x > 0, \end{cases} \quad (7)$$

其 Cauchy 问题称为 Riemann 问题。Riemann 问题的解称为 Riemann 解, 它通常由一组基本波构成。我们记 $u^* = \lim_{x \rightarrow 0^-} u, v^* = \lim_{x \rightarrow 0^+} v$, 并运用上 1 节中的基本波构造出 Riemann 解。

由适当的基本波组合构成的左行波(传播速度为负)给 v 带来的跳跃 $[v] = v^* - v_l$ 表示如下:

当 $u_l \leq 1$,

$$v^* - v_l = \begin{cases} -\sqrt{2}(u^* - u_l), & \text{当 } u^* < 1, \text{由 } -\sqrt{2} \text{ 波构成,} \\ -\sqrt{2}(1 - u_l) - \sqrt{(u^* - 1)(u^* - 2)}, & \text{当 } u^* > 2, \text{由 } -\sqrt{2} \text{ 波和 } T_- \text{ 构成,} \end{cases} \quad (8)$$

当 $u_l \geq 1.5$,

$$v^* - v_l = \begin{cases} -(u^* - u_l), & \text{当 } u^* > 1.5, \text{由 } -1 \text{ 波构成,} \\ -(1.5 - u_l) + \sqrt{(1.5 - u^*)(1.5 - 2u^*)}, & \text{当 } u^* \in [0, 0.75], \text{由 } -1 \text{ 波和 } B_- \text{ 构成,} \\ \sqrt{(u_l - 2u^*)(u_l - u^*)}, & \text{当 } u^* \leq 0, \text{由 } S_+ \text{ 波构成。} \end{cases} \quad (9)$$

另一方面, 右行波(传播速度为正)和静止波(传播速度为 0)带来 v 的跳跃 $[v] = v_r - v^*$ 可以表示为:

当 $u_r \leq 1$,

$$v_r - v^* = \begin{cases} \sqrt{2}(u^* - u_r), & \text{当 } u^* < 1, \text{由 } +\sqrt{2} \text{ 波构成,} \\ \sqrt{2}(u^*/2 - u_r), & \text{当 } u^* \in [1.5, 2], \text{由 } 0^b \text{ 波和 } +\sqrt{2} \text{ 波构成,} \\ \sqrt{2}(1 - u_r) + \sqrt{(u^* - 1)(u^* - 2)}, & \text{当 } u^* > 2, \text{由 } T_+ \text{ 波和 } +\sqrt{2} \text{ 波构成,} \end{cases} \quad (10)$$

当 $u_r \geq 1.5$,

$$v_r - v^* = \begin{cases} u^* - u_r, & \text{当 } u^* > 1.5, \text{由 } +1 \text{ 波构成,} \\ 2u^* - u_r, & \text{当 } u^* \in [0.75, 1], \text{由 } 0^b \text{ 波和 } +1 \text{ 波构成,} \\ 1.5 - u^* - \sqrt{(1.5 - u^*)(1.5 - 2u^*)}, & \text{当 } u^* \in [0, 0.75], \text{由 } B_+ \text{ 波和 } +1 \text{ 波构成,} \\ -\sqrt{(u_r - 2u^*)(u_r - u^*)}, & \text{当 } u^* \leq 0, \text{由 } S_+ \text{ 波构成。} \end{cases} \quad (11)$$

根据 u_l 和 u_r 所在的相选择 (8) 式 ~ (11) 式中的两个代数方程联立, 运用已知条件中的 v_l 和 v_r , 就可以解得唯一的 u^* 和相应的基本波组合, 也就得到 Riemann 解。对任何给 Riemann 初值, 解是唯一的^[4], 我们把所有的解列在表 2 中。

表 2

Riemann 问题的解

波型	基本波组合	$[v]$	u_l	u^*	u_r
A	$-\sqrt{2} \rightarrow T_- \rightarrow T_+ \rightarrow + \sqrt{2}$	$\sqrt{2}(u_r + u_l - 2) - 2\sqrt{(u^* - 1)(u^* - 2)}$	≤ 1	> 2	≤ 1
B	$-\sqrt{2} \rightarrow T_- \rightarrow + 1$	$-\sqrt{2}(1 - u_l) - \sqrt{(u^* - 1)(u^* - 2)} + u_r - u^*$	≤ 1	> 2	≥ 1.5
C	$-\sqrt{2} \rightarrow 0^{\#} \rightarrow + 1$	$-\sqrt{2}(u^* - u_l) + (u_r - 2u^*)$	≤ 1	$[0.75, 1]$	≥ 1.5
D	$-\sqrt{2} \rightarrow B_+ \rightarrow + 1$	$-\sqrt{2}(u^* - u_l) + \sqrt{(1.5 - u^*)(1.5 - 2u^*)} + u_r - 1.5$	≤ 1	$(0, 0.75)$	≥ 1.5
E	$-\sqrt{2} \rightarrow S_+$	$-\sqrt{2}(u^* - u_l) + \sqrt{(u_r - u^*)(u_r - 2u^*)}$	≤ 1	≤ 0	≥ 1.5
F	$-\sqrt{2} \rightarrow + \sqrt{2}$	$\sqrt{2}(u_l + u_r - 2u^*)$	≤ 1	≤ 1	≤ 1
G	$S_- \rightarrow S_+$	$\sqrt{(u_l - 2u^*)(u_l - u^*)} + \sqrt{(u_r - u^*)(u_r - 2u^*)}$	≥ 1.5	≤ 0	≥ 1.5
H	$S_- \rightarrow + \sqrt{2}$	$\sqrt{(u_l - 2u^*)(u_l - u^*)} + \sqrt{2}(u_r - u^*)$	≥ 1.5	≤ 0	≤ 1
I	$-1 \rightarrow B_- \rightarrow B_+ \rightarrow + 1$	$u_l + u_r - 3 + 2\sqrt{(1.5 - 2u^*)(1.5 - u^*)}$	≥ 1.5	$(0, 0.75)$	≥ 1.5
J	$-1 \rightarrow B_- \rightarrow + \sqrt{2}$	$u_l - 1.5 + \sqrt{(1.5 - 2u^*)(1.5 - u^*)} + \sqrt{2}(u_r - u^*)$	≥ 1.5	$(0, 0.75)$	≤ 1
K	$-1 \rightarrow 0^b \rightarrow + \sqrt{2}$	$(u^* - u_l) + \sqrt{2}(u_r - u^*/2)$	≥ 1.5	$[1.5, 2]$	≤ 1
L	$-1 \rightarrow T_+ \rightarrow + \sqrt{2}$	$(u^* - u_l) - \sqrt{(u^* - 1)(u^* - 2)} + \sqrt{2}(u_r - 1)$	≥ 1.5	> 2	≤ 1
M	$-1 \rightarrow + 1$	$u_l + u_r - 2u^*$	≥ 1.5	≥ 1.5	≥ 1.5

3 发生碰撞的基本波

对于初值中有两个或是更多间断的情况, 即三段或更多段分段常状态的初值问题, 解的演化会复杂得多. 因为基本波的波速是有限的, 在 t 足够小的情况下, 我们可以在每一个间断周围当作单独的 Riemann 问题来处理, 但随着时间的发展, 这些波之间就可能发生碰撞. 基本波之间的相互作用是更复杂的相互作用的基础, 我们这里对此加以细致的研究.

考虑如下初值:

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l), & x < -A, \\ (u_m, v_m), & -A < x < A, \\ (u_r, v_r), & x > A. \end{cases} \quad (12)$$

这里假设 (u_l, v_l) 和 (u_m, v_m) 由某个基本波所连接, 那么根据在第 1 节中的结果可以确定从 v_l 到 v_m 的跳跃 $v_m - v_l = c_l(u_m - u_l)$, 其中 c_l 是该基本波的波速. 同样假设另一基本波可以连接 (u_m, v_m) 和 (u_r, v_r) , 因此 v_m 到 v_r 的跳跃 $v_r - v_m = c_r(u_r - u_m)$, 其中 c_r 是波速. 将二者相加得到

$$v_r - v_l = c_l(u_m - u_l) + c_r(u_r - u_m), \quad (13)$$

也就是说基本波碰撞后形成的 Riemann 问题中, v 的跳跃由这两个基本波确定, 而不是任意的.

以 $u_l \leq 1, u_r \leq 1$ 为例, 我们找出能够发生碰撞的基本波组合. 以下我们用 $u_l \xrightarrow{\rightarrow} u_r$ 来表示基本波 x 连接状态 u_l 和 u_r .

首先找出可以连接 $u_l \leq 1, u_r \leq 1$ 的基本波组合. 具体做法是, 我们列出那些左状态是 $u_l < 1$ 的基本波, 并且标出这些基本波将连接到右状态的范围; 接着列出那些右状态是 $u_r < 1$ 的基本波, 同时也标出它们左状态的范围. 如下所示:

$$\begin{aligned} u_l \in (-\infty, 1] &\xrightarrow{-\sqrt{2}} u_m \in (-\infty, 1]; & u_m \in (-\infty, 1] &\xrightarrow{-\sqrt{2}} u_r \in (-\infty, 1]; \\ u_l = 1 &\xrightarrow{T} u_m \in [1.5, +\infty); & u_m \in [1.5, +\infty) &\xrightarrow{S} u_r \in (-\infty, 1]; \\ u_l \in [0.75, 1] &\xrightarrow{0^{\#}} u_m \in [1.5, 2]; & u_m \in 1.5 &\xrightarrow{B} u_r \in (0, 0.75); \\ u_l \in (0, 0.75) &\xrightarrow{B} u_m = 1.5; & u_m \in [1.5, 2] &\xrightarrow{0^b} u_r \in [0.75, 1]; \end{aligned}$$

$$u_l \in (-\infty, 0] \xrightarrow{S} u_m \in [1.5, +\infty); u_m \in [2, +\infty) \xrightarrow{T} u_r = 1;$$

$$u_l \in (-\infty, 1] \xrightarrow{+\sqrt{2}} u_m \in (-\infty, 1]; u_m \in (-\infty, 1] \xrightarrow{+\sqrt{2}} u_r \in (-\infty, 1].$$

接着,我们挑选出会出现基本波碰撞的组合。这样的组合需要符合两个要求:第一,两个基本波有共同的 u_m ;第二,连接 u_l 和 u_m 的波的传播速度要大于连接 u_m 和 u_r 的波的波速。所有会发生碰撞的基本波的组合在表 3 中详细列出。表 4 则列出了 $u_l \leq 1, u_r \geq 1.5$ 时所有可能碰撞的基本波。对 u_l, u_r 在其它区间的情形,可以类似做出,详见文献[5]。

表 3 $u_l \in (-\infty, 1], u_m \in (-\infty, 1]$ 时,可碰撞的基本波组合

情形	$u_l \in$	\rightarrow	$u_m \in$	\rightarrow	$u_r \in$	$v_r - v_l =$
1.1	1	T_-	$(2, +\infty)$	S_-	$(-\infty, 0)$	$-\sqrt{(u_l^* - 1)(u_l^* - 2)} + \sqrt{(u_l^* - 2u_r)(u_l^* - u_r)}$
1.2	$[0.75, 1]$	$0^\#$	$[1.5, 2]$	S_-	$(-\infty, 0)$	$\sqrt{(u_m - 2u_r)(u_m - u_r)}$
1.3	$[0.75, 1]$	$0^\#$	$[1.5, 2]$	B_-	$[0, 0.75]$	$\sqrt{(1.5 - u_r)(1.5 - 2u_r)}$
1.4	$[0, 0.75]$	B_+	1.5	S_-	$(-\infty, 0)$	$\sqrt{(1.5 - u_l)(1.5 - 2u_l)} + \sqrt{(u_l - 2u_r)(u_l - u_r)}$
1.5	$[0, 0.75]$	B_+	1.5	B_-	$[0, 0.75]$	$\sqrt{(1.5 - u_l)(1.5 - 2u_l)} + \sqrt{(1.5 - u_r)(1.5 - 2u_r)}$
1.6	$[0, 0.75]$	B_+	1.5	\emptyset	0.75	$\sqrt{(1.5 - u_l)(1.5 - 2u_l)}$
1.7	$(-\infty, 0)$	S_+	$(1.5, +\infty)$	S_-	$(-\infty, 0)$	$\sqrt{(u_m - 2u_r)(u_m - u_r)} + \sqrt{(u_m - u_l)(u_m - 2u_l)}$
1.8	$(-\infty, 0)$	S_+	1.5	B_-	$[0, 0.75]$	$\sqrt{(1.5 - 2u_l)(1.5 - u_l)} + \sqrt{(1.5 - u_r)(1.5 - 2u_r)}$
1.9	$(-\infty, 0)$	S_+	$[1.5, 2]$	\emptyset	$[0.75, 1]$	$\sqrt{(u_m - u_l)(u_m - 2u_l)}$
1.10	$(-\infty, 0)$	S_+	$(2, +\infty)$	T_+	1	$\sqrt{(u_m - u_l)(u_m - 2u_l)} - \sqrt{(u_m - 1)(u_m - 2)}$
1.11	$(-\infty, 1)$	$+\sqrt{2}$	$(-\infty, 1)$	$-\sqrt{2}$	$(-\infty, 1)$	$\sqrt{2}(2u_m - u_l - u_r)$

表 4 $u_l \in (-\infty, 1], u_r \in [1.5, +\infty)$ 时,可碰撞的基本波组合

情形	$u_l \in$	\rightarrow	$u_m \in$	\rightarrow	$u_r \in$	$v_r - v_l =$
2.1	1	T_-	$(2, +\infty)$	-1	$(1.5, +\infty)$	$-(u_r - u_m) - \sqrt{(u_m - 2)(u_m - 1)}$
2.2	$[0.75, 1]$	$0^\#$	$[1.5, 2]$	-1	$(1.5, +\infty)$	$-(u_r - u_m)$
2.3	$[0, 0.75]$	B_+	1.5	-1	$(1.5, +\infty)$	$-(u_r - 1.5) + \sqrt{(1.5 - u_l)(1.5 - 2u_l)}$
2.4	$(-\infty, 0)$	S_+	$(1.5, +\infty)$	-1	$(1.5, +\infty)$	$\sqrt{(u_m - u_l)(u_m - 2u_l)} - (u_r - u_m)$
2.5	$(-\infty, 0)$	S_+	$(1.5, +\infty)$	+1	$(1.5, +\infty)$	$\sqrt{(u_m - u_l)(u_m - 2u_l)} + (u_r - u_m)$
2.6	$(-\infty, 1)$	$+\sqrt{2}$	1	T_-	$(2, +\infty)$	$\sqrt{2}(1 - u_l) - \sqrt{(u_r - 1)(u_r - 2)}$
2.7	$(-\infty, 1)$	$+\sqrt{2}$	$[0.75, 1]$	$0^\#$	$[1.5, 2]$	$\sqrt{2}(u_m - u_l)$
2.8	$(-\infty, 1)$	$+\sqrt{2}$	$[0, 0.75]$	B_+	1.5	$\sqrt{2}(u_m - u_l) + \sqrt{(1.5 - 2u_m)(1.5 - u_m)}$
2.9	$(-\infty, 1)$	$+\sqrt{2}$	$(-\infty, 0)$	S_+	$(1.5, +\infty)$	$\sqrt{2}(u_m - u_l) + \sqrt{(u_r - 2u_m)(u_r - u_m)}$

4 基本波碰撞后的结果

在时刻 $\tau = 2A(c_l - c_r)$, 两个基本波碰撞并形成一个新的 Riemann 问题

$$(u(x, \tau), v(x, \tau)) = \begin{cases} (u_l, v_l), & \text{当 } x < (c_l A + c_r A)/(c_l - c_r), \\ (u_r, v_r), & \text{当 } x > (c_l A + c_r A)/(c_l - c_r). \end{cases} \quad (14)$$

根据第 1 节和第 2 节中的方法,可以用基本波构造出它的 Riemann 解,此即基本波碰撞后的结果。根据 u_l, u_r 的范围,我们可以在表 2 中找出可能出现的解,这里需要考虑到选出的解中 v 的跳跃必须和由碰撞前基本波所确定的 v 的跳跃相符合。

我们以表 3 中的第 1.11 类组合 $+\sqrt{2}$ 波和 $-\sqrt{2}$ 波的碰撞为例,来说明如何确定两个基本波碰撞后的结果。 $+\sqrt{2}$ 波和 $-\sqrt{2}$ 波发生碰撞应当有 $u_l < 1, u_m < 1, u_r < 1$, 并且

$$v_r - v_l = \sqrt{2}(2u_m - u_l - u_r). \quad (15)$$

根据表 2, 我们知道在 $u_l < 1, u_r < 1$ 的情况下有 A 和 F 两类 Riemann 问题的解, 也就是说 $+\sqrt{2}$ 波和 $-\sqrt{2}$ 波的碰撞可能会有两种结果. 对于 A 类解, v 的跳跃满足: $[v] < \sqrt{2}(u_l + u_r - 2)$; 对于 F 类解, v 的跳跃满足: $[v] > \sqrt{2}(u_l + u_r - 2)$.

所以从(15)式可以推断出当 $u_m < u_r + u_l - 1$ 时, 2 个波的碰撞会形成 4 个基本波, 分别是 $\pm\sqrt{2}$ 波和 T_{\pm} 波; 当 $u_m > u_r + u_l - 1$ 时, 碰撞只形成了 2 个基本波, 分别是 $+\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 波, 见图 2.

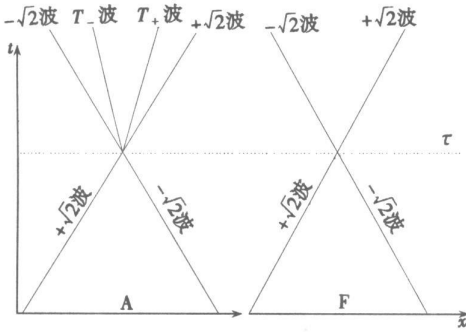


图 2 $+\sqrt{2}$ 波和 $-\sqrt{2}$ 波碰撞结果

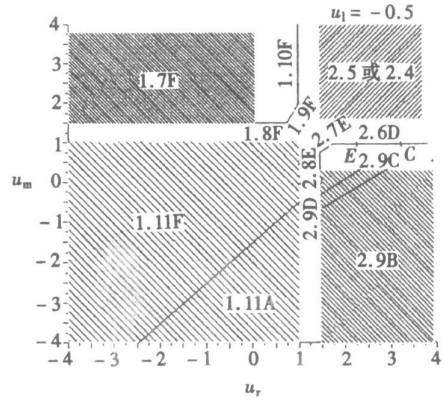


图 3 $u_l = -0.5$ 时, 基本波碰撞结果分类

这里值得指出, 前一种情形中, 初始状态 u_l, u_m, u_r 完全是在同一个相里, 碰撞后出现了新的相, 也就是说, 我们清楚地看到基本波的相互作用产生了新的相边界(T_{\pm} 波的波前).

现在我们以 $u_l = -0.5$ 为例, 在 (u_m, u_r) 的空间中对基本波相互作用加以分类, 这就是图 3. 例如, 上述 $+\sqrt{2}$ 波和 $-\sqrt{2}$ 波碰撞后的分类结果为图中 1.11A 和 1.11F 区域(采用这样的记号是因为 $-\sqrt{2}$ 波和 $+\sqrt{2}$ 波的碰撞在上面的列表里是第 1.11 的情况, 而 A 和 F 对应着碰撞后的结果).

对于表 3 中情形 1.7, $u_m \in [1.5, +\infty), u_r \in (-\infty, 0]$; 情形 1.8, $u_m = 1.5, u_r \in (0, 0.75]$; 情形 1.9, $u_m \in [1.5, 2], u_r \in [0.75, 1]$; 情形 1.10, $u_m \in (2, +\infty), u_r = 1$, 在波的碰撞后只有一类结果 F, 分别对应于区域 1.7F, 1.8F, 1.9F, 1.10F. 对于情形 1.11, $u_m \in (-\infty, 1], u_r \in (-\infty, 1]$, 如果, $u_m < u_r - 1.5$, 结果是 A 类解; 如果 $u_m > u_r - 1.5$, 结果就是 F 类解, 分别对应于图中的区域 1.11A 和 1.11F.

对于表 4 中情形 2.6, $u_m = 1, u_r \in (2, +\infty)$. 如果 $u_r \in [4.996, +\infty)$, 结果是 B 类; 如果 $u_r \in [3.478, 4.0996)$, 结果是 C 类; 如果 $u_r \in [2.258, 3.478]$, 结果是 D 类; 如果 $u_r \in (2, 2.258)$, 结果是 E 类. 这些结果分别对应于区域 2.6B, 2.6C, 2.6D, 2.6E. 对于情形 2.7, $u_m \in [0.75, 1], u_r = 2u_m$, 只有一类结果 E, 对应区域 2.7E. 对于情形 2.8, $u_m \in (0, 0.75), u_r = 1.5$, 只有一类结果 E, 对应区域 2.8E. 对于情形 2.9, $u_m \in (-\infty, 0), u_r \in [1.5, +\infty)$, 如果 $u_m < (12 + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}u_r - 4u_r)/(-3u_r - 8 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u_r)$, 结果是 B 类; 如果

$$\frac{12 + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}u_r - 4u_r}{-3u_r - 8 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u_r} < u_m < -\frac{67 - 42\sqrt{2} + 28\sqrt{2}u_r + 24u_r}{8(-3u_r - 7 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u_r)},$$

结果是 C 类; 如果

$$-\frac{67 - 42\sqrt{2} + 28\sqrt{2}u_r + 24u_r}{8(-3u_r - 7 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u_r)} < u_m < -2\frac{-1 + \sqrt{2}u_r}{-3u_r + 2\sqrt{2}u_r - 4},$$

结果就是 D 类。以上分别对应于区域 2. 9B、2. 9C、2. 9D。对于情形 2. 4 和 2. 5, 由于无法在 (u_m, u_r) 平面里区分所在的区域, 因此在图 3 中绘出示意。

5 总 结

我们在本文中系统地讨论了相变演化的 Suliciu 模型中基本波、Riemann 解和基本波的相互作用。这一研究, 丰富了对相变演化过程的理解, 特别是通过仔细的分析, 揭示了基本波的碰撞过程中相边界产生的条件和过程。对一般情形的基本波相互作用的详细分类请参见文献[5]。值得指出的是, 三线性本构关系(2)式下的 Suliciu 模型是相变演化的最易于分析的模型, 更一般的本构关系下的其它模型的基本波、Riemann 解和基本波的相互作用的研究要复杂许多, 但本文的工作对理解这些问题可提供定性的借鉴。

致谢 作者感谢王平博士的帮助。

[参 考 文 献]

- [1] Wilson K G. The renormalization group and critical phenomena[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1983, **55**(3): 583—600.
- [2] Hsieh D Y, Tang S, Wang X P. On hydrodynamic instability, chaos, and phase transition[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, **12**(1): 1—14.
- [3] Faciu C, Suliciu I. A maxwell model for pseudoelastic materials[J]. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994, **31**(10): 1399—1404.
- [4] Natalini R, Tang S. Discrete kinetic models for dynamical phase transitions [J]. *Communication on Applied Nonlinear Analysis*, 2000, **7**(2): 1—32.
- [5] Qian J. 非线性数值分析中的两个问题[D]. 硕士论文. 北京: 北京大学 2003, 1—35.

Wave Interactions in Suliciu Model for Dynamic Phase Transitions

TANG Shao qiang, QIAN Jing, XIAO Jun

(LTCS, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: Elementary waves in Suliciu model for dynamic phase transitions are obtained through traveling wave analysis. For any given initial data with two pieces of constant states, the Riemann solutions are constructed as a combination of elementary waves. When the initial profile contains three pieces of constant states, the solution may be constructed from the Riemann solutions, with each two adjacent states connected by elementary waves. A new Riemann problem forms when these two waves collide. Through the exploration of these Riemann problems, the outcome of wave interactions may be classified in a suitable parametric space.

Key words: phase transition; Suliciu model; wave interaction