

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0075-07

轴对称饱和地基竖向振动分析^{*}

蔡袁强, 徐长节, 郑灶锋, 吴大志

(浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

(陈正汉推荐)

摘要: 基于 Biot 动力固结方程, 考虑了土体和水的惯性力以及水土之间的耦合作用, 采用 Laplace-Hankel 积分变换求解耦联合方程组, 得到动荷载下饱和地基振动问题的解答。根据下边界为不透水基岩的边界条件, 获得了地基表面作用圆形轴对称任意荷载时土层应力、位移等的一般积分形式解。研究表明, 激振频率对饱和地基的竖向振动有很大影响, 地基表面的竖向位移与施加荷载之间存在相位差。此外, 动力渗透系数在荷载施加的初期对结果有较大影响, 随着荷载趋于稳定, 其影响变得很小。

关键词: 竖向振动分析; 任意荷载; 层状饱和地基

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

引 言

地基在荷载作用下的动力响应问题是地球物理学、地震工程、环境工程与岩土工程界的一个重要研究课题, 一直受到人们的重视。Lamb 等人研究了弹性半空间内线源和点源的扰动, 他们把土体视为弹性单相介质进行考虑。实际上由于地下水的存在, 土体常由土骨架和孔隙水两部分构成, 显然按两相饱和介质理论研究相应问题更符合实际情况。Biot^[1] 在 1956 年提出了饱和多孔介质的波动方程。随后, 基于 Biot 波动方程, Halpern^[2] 和金波^[3] 研究了半空间土体表面作用简谐荷载时的动力响应问题。祝波恩^[4] 等研究了谐和荷载作用下二维饱和地基的动力响应问题。陈龙珠^[5] 等讨论了饱和半空间表面在线源和点源作用下地基表面位移的衰减特性。张玉红^[6] 分析了层状饱和土三维非轴对称稳态响应问题, 杨军^[7] 和 Bougacha^[8] 应用有限元方法对下卧基岩土体的振动问题进行了研究。蔡袁强^[9] 等考虑水和土的耦合作用, 研究了下卧基岩饱和地基在谐和荷载作用下的振动问题。在实际工程中, 很多荷载往往不是稳态周期荷载, 所以研究任意荷载作用下饱和地基的响应特性很有实际意义。

1 饱和土基本动力方程

根据 Biot 固结理论, 空间轴对称土体动力平衡方程为:

* 收稿日期: 2004_11_18; 修订日期: 2005_06_17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478081)

作者简介: 蔡袁强(1965—), 男, 浙江诸暨人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel/ Fax: + 86_571_87952619; E_mail: caiyq@ema.zju.edu.cn)。

$$\frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial e}{\partial r} + \ddot{u} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\rho_s}{G} \ddot{u} + \frac{\rho_f}{G} \ddot{v}_r, \quad (1a)$$

$$\frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial e}{\partial z} + \ddot{w} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\rho_s}{G} \ddot{w} + \frac{\rho_f}{G} \ddot{v}_z, \quad (1b)$$

式中: λ, G 为土骨架的Lame 常数; u, w 分别为土骨架的径向和竖向位移; v_r 和 v_z 分别为流体相对于土体的径向和竖向位移; ρ_s, ρ_f 分别为土颗粒和水的密度; \ddot{v}_r 和 \ddot{v}_z 分别为 v_r 和 v_z 对时间的二阶导数; $\rho = (1 - n) \rho_s + n \rho_f$; σ 为孔隙水压力;

$$\ddot{e} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

n 为孔隙率。

土体孔隙中的流体平衡方程:

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\rho_f g}{k_d} v_{\dot{r}} + \rho_f \ddot{u} + \frac{\rho_f}{n} \ddot{v}_r, \quad (2a)$$

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\rho_f g}{k_d} v_{\dot{z}} + \rho_f \ddot{w} + \frac{\rho_f}{n} \ddot{v}_z, \quad (2b)$$

式中: k_d 为动力渗透系数, 采用工程上通用的力学模型, 认为粘滞性包含在动渗透系数之中; $v_{\dot{r}}$ 和 $v_{\dot{z}}$ 分别为 v_r 和 v_z 对时间的一阶导数; g 为重力加速度。

渗流连续方程:

$$-\left[\frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} + \frac{dv_z}{dz} \right] = \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{dw}{dz} \right]. \quad (3)$$

2 基本方程求解

所考虑的模型如图 1 所示, 荷载为随时间任意变化的函数 $P(t)$ 。

假设初始状态静止, 对式(2a)和(2b)进行 Laplace 变换

(记为 $f(r, z, s) = \int_0^\infty f(r, z, t) e^{-st} dt$), 整理后可得:

$$v_r = c \left[u + \frac{1}{\rho_f s^2} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right], \quad v_z = c \left[w + \frac{1}{\rho_f s^2} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right], \quad (4)$$

其中: $c = -nk_d s / (gn + k_d s)$ 。

将上两式代入式(1a)、(1b)整理得:

$$\frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial e}{\partial r} + \ddot{u} - \frac{u}{r^2} - \frac{1 + c}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{s^2(\rho + c\rho_f)}{G} u, \quad (5a)$$

$$\frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial e}{\partial z} + \ddot{w} - \frac{1 + c}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{s^2(\rho + c\rho_f)}{G} w, \quad (5b)$$

$\frac{\partial}{\partial r}(5a) + \frac{(5a)}{r} + \frac{\partial}{\partial z}(5b)$, 得:

$$\alpha \ddot{e} - \ddot{\sigma} + \beta e = 0, \quad \alpha = \frac{\lambda + 2G}{1 + c}, \quad \beta = -\frac{s^2(\rho + c\rho_f)}{1 + c}, \quad (6a)$$

将式(4)代入式(3), 整理得:

$$\ddot{\sigma} = Ee, \quad E = -\frac{(1 + c)\rho_f s^2}{c}, \quad (6b)$$

把式(6b)代入(6a), 整理可得:

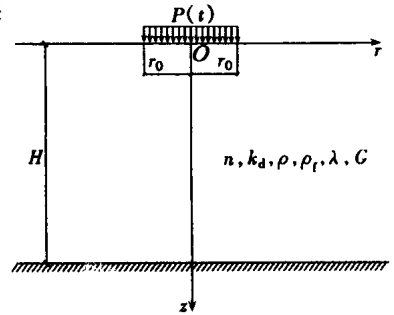


图 1 模型示意图

$$\therefore e = De, \quad D = \frac{c\rho - \rho_1 - 2c\rho_1}{(\lambda + 2G)c} s^2, \quad (6c)$$

(5a)、(5b)、(6b)、(6c)中只有3个方程独立。记 $f(r, z)$ 的0阶Hankel变换和1阶Hankel变换为:

$$f(\xi, z) = \int_0^\infty r f(r, z) J_0(\xi r) dr; \quad f^1(\xi, z) = \int_0^\infty r f(r, z) J_1(\xi r) dr,$$

式中: $J_0(r\xi)$ 和 $J_1(r\xi)$ 分别为0阶和1阶第1类Bessel函数。

对(6c)、(6b)、(5b)及

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

进行0阶Hankel变换;对(5a)进行1阶Hankel变换(其中 f 即为 f 相应的Hankel变换形式),得:

$$\frac{d^2 e}{dz^2} - q_1^2 e = 0, \quad \text{其中: } q_1^2 = \xi^2 + D, \quad (7a)$$

$$\frac{d^2 \sigma}{dz^2} - \xi^2 \sigma = Ee, \quad (7b)$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - q_2^2 w = \frac{1+c}{G} \frac{d\sigma}{dz} - \frac{\lambda+G}{G} \frac{de}{dz}, \quad \text{其中: } q_2^2 = \xi^2 + \frac{s^2(\rho+c\rho_1)}{G}, \quad (7c)$$

$$e = \xi u^1 + \frac{dw}{dz}, \quad (7d)$$

$$\frac{d^2 u^1}{dz^2} - q_2^2 u^1 = \frac{\lambda+G}{G} \xi e - \frac{1+c}{G} \xi \sigma, \quad (7e)$$

解之得:

$$e = A_1 e^{q_1 z} + B_1 e^{-q_1 z}, \quad (8a)$$

$$\sigma = C_{21} A_1 e^{q_1 z} + C_{21} B_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^\xi + B_2 e^{-\xi}, \quad C_{21} = E/D, \quad (8b)$$

$$u^1 = C_{31} A_1 e^{q_1 z} + C_{31} B_1 e^{-q_1 z} + C_{32} A_2 e^\xi + C_{32} B_2 e^{-\xi} + A_3 e^{q_2 z} + B_3 e^{-q_2 z}, \quad (8c)$$

$$w = C_{41} A_1 e^{q_1 z} - C_{41} B_1 e^{-q_1 z} + C_{42} A_2 e^\xi - C_{42} B_2 e^{-\xi} + A_4 e^{q_2 z} + B_4 e^{-q_2 z}, \quad (8d)$$

式中:

$$C_{31} = \frac{\xi}{(q_1^2 - q_2^2)G} [(\lambda + G) - (1 + c)C_{21}], \quad C_{32} = -\frac{(1 + c)\xi}{(\xi^2 - q_2^2)G},$$

$$C_{41} = -\frac{q_1}{\xi} C_{31}, \quad C_{42} = -C_{32}, \quad A_3 = -\frac{q_2}{\xi} A_4, \quad B_3 = \frac{q_2}{\xi} B_4,$$

对 $\tau_x = G(\partial u/\partial z + \partial w/\partial r)$ 进行1阶Hankel变换,得:

$$\begin{aligned} \tau_x^1 = & 2Gq_1 C_{31}(A_1 e^{q_1 z} - B_1 e^{-q_1 z}) + 2G\xi C_{32}(A_2 e^\xi - B_2 e^{-\xi}) + \\ & \frac{q_2^2 + \xi^2}{q_2} G(A_3 e^{q_2 z} - B_3 e^{-q_2 z}), \end{aligned} \quad (8e)$$

对 $\sigma_z = \lambda + 2G\varepsilon_z$ 进行0阶Hankel变换,得:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \left[\lambda - 2G \frac{q_1^2}{\xi} C_{31} \right] (A_1 e^{q_1 z} + B_1 e^{-q_1 z}) - 2G\xi C_{32}(A_2 e^\xi + B_2 e^{-\xi}) - \\ & 2G\xi(A_3 e^{q_2 z} + B_3 e^{-q_2 z}), \end{aligned} \quad (8f)$$

对 $Q = k(\partial \sigma/\partial z)$ 进行0阶Hankel变换,得:

$$Q = k\xi C_{21} q_1 (A_1 e^{q_1 z} - B_1 e^{-q_1 z}) + k\xi (A_2 e^\xi - B_2 e^{-\xi}). \quad (8g)$$

3 边界条件

$u^H, w^H, \sigma_z^H, \tau_{rz}^H, Q^H, \delta^H$ 分别表示 $z = H$ 处土体的径向位移、竖向位移、竖向应力、剪应力、排水量以及孔压。

当 $z = 0$ 时, 方程 (8b) ~ (8g) 可写成如下形式:

$$[u^0 \ w^0 \ \sigma_z^0 \ \tau_{rz}^0 \ \sigma^0 \ Q^0]^T = T_{6 \times 6}^0 [A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_3 \ B_3]^T, \quad (9a)$$

$T_{6 \times 6}^0$ 中的各个元素都可从上述 6 个方程中对应的位置取得。

同理可得土层底面 $z = H$ 处的表达式:

$$[u^H \ w^H \ \sigma_z^H \ \tau_{rz}^H \ \sigma^H \ Q^H]^T = T_{6 \times 6}^H [A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_3 \ B_3]^T, \quad (9b)$$

$T_{6 \times 6}^H$ 中的各个元素亦可从上述 6 个方程中对应的位置取得。

将 (9a)、(9b) 联立, 则有:

$$[u^0 \ w^0 \ \sigma_z^0 \ \tau_{rz}^0 \ \sigma^0 \ Q^0]^T = B_{6 \times 6}^1 [u^H \ w^H \ \sigma_z^H \ \tau_{rz}^H \ \sigma^H \ Q^H]^T, \quad (10)$$

$$B_{6 \times 6}^1 = T_{6 \times 6}^0 (T_{6 \times 6}^H)^{-1}.$$

上表面 $z = 0$ 处为自由边界, 当 $0 \leq r \leq r_0$ 时, $\sigma_z = P(t)$, 当 $r > r_0$ 时, $\sigma_z = 0$, 及 $\tau_{rz} = \sigma = 0$; 下表面中, 假设基岩不透水, 则 $u = w = Q = 0$, 联立此边界条件即可得出表层及底层另 6 个变量的解。

4 算例分析

由以上方程可求解土体的动力响应问题。设任意荷载 $P(t)$ 作用于半径为 r_0 的圆形柔性基础上, $P(s)$ 为 $P(t)$ 的 Laplace 变换式。特别地, 当 $P = P_0 e^{i\omega t}$, 其 Laplace 变换式 $P(s) = P_0 [1/(s - i\omega)]$; 当作用荷载如图 2(a) 所示, 其 Laplace 变换式 $P(s) = (P_0/2) [1/s + \omega/(s^2 + \omega^2)]$; 当作用荷载如图 2(b) 所示, 其 Laplace 变换式 $P(s) = (P_0/T^*) [(1 - e^{-T^* s})/s^2]$ 。

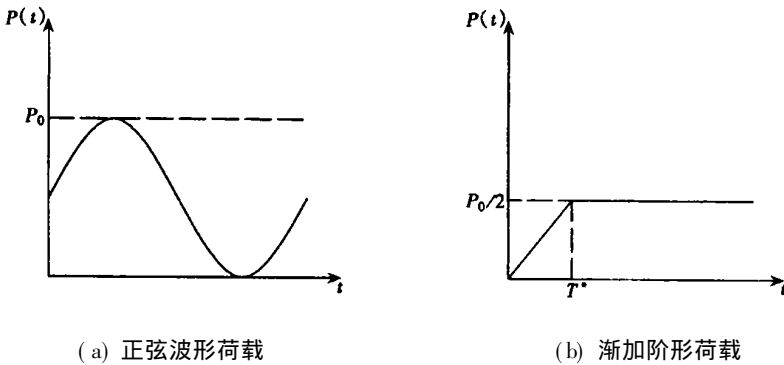


图 2 荷载-时间关系

对于数值 Laplace 逆变换, 目前已提出了多种方法, 其中 Durbin^[10] 所提出的方法是目前精度最高的。Durbin 给出的 Laplace 逆变换公式为:

$$f(t) = \frac{2e^{st}}{T_0} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ F(A) \right\} + \sum_{n=0}^N \left\{ \operatorname{Re} \left\{ F \left(A + in \frac{2\pi}{T} \right) \right\} \cos nt \frac{2\pi}{T} - \operatorname{Im} \left\{ F \left(A + in \frac{2\pi}{T} \right) \right\} \sin nt \frac{2\pi}{T} \right] \cdot \quad (11)$$

上式中 AT_0 取 5~10 将得到令人满意的结果。本文中, 取 $AT_0 = 5, N = 1000$ 。

本文算例中取 $r_0 = 1\text{ m}, P_0 = 50\text{ kPa}$ 。假设上边界为自由边界, 孔压和剪应力均为 0, 土体竖向应力等于外加荷载; 下边界为不透水基岩, 出水量、土体径向和竖向位移均为 0。图中 r 表示半径, w 表示土体竖向位移。

饱和地基的参数为: $n = 0.45, k_d = 2 \times 10^{-4}\text{ m/s}, \rho = 1800\text{ kg/m}^3, \rho_f = 1000\text{ kg/m}^3, G = 4.5 \times 10^6\text{ Pa}, \lambda = 23.625 \times 10^6\text{ Pa}, H = 5\text{ m}$ 。图 3 为荷载 $P = P_0 e^{i\omega t}$ 作用下, a_0 分别为 0.4 和 4.0 时地表竖向位移 w 与半径 r 的关系曲线, 其中 $a_0 = r_0 \omega \sqrt{\rho/G}$ 为无量纲频率, 实线表示位移的幅值, 虚线表示荷载达到最大值时地表的竖向位移。

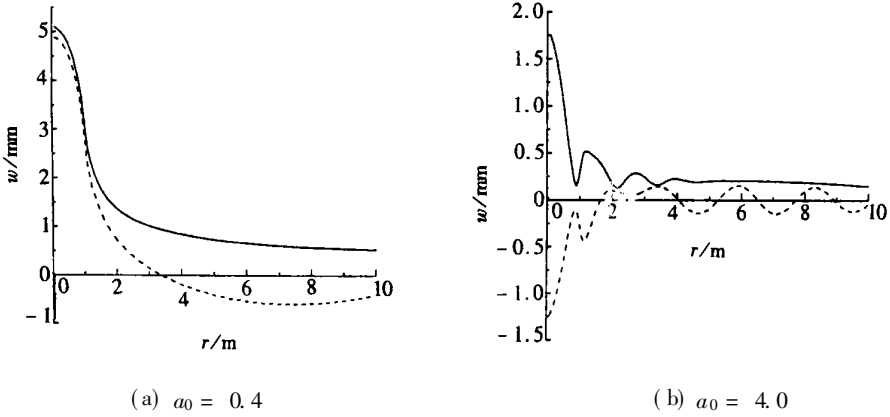


图 3 单层地基的竖向位移曲线

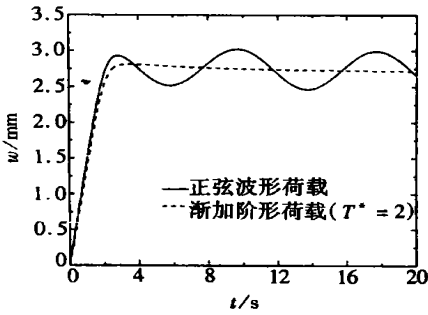


图 4 不同形式荷载作用下地基竖向位移随时间变化曲线

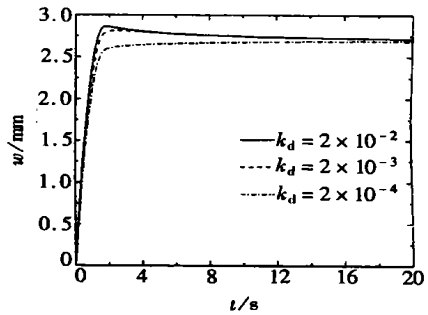


图 5 渐加阶形荷载作用下渗透系数对地基竖向位移的影响 ($T^* = 1$)

从图 3 可以看出, 当激振频率较大时, 地表位移的波动性较大。对此可以这样来解释: 振动波传至下卧岩层后经反射在表面与原波发生干涉。竖向振幅随距离增大将会有一定的起伏变化而非单调的衰减, 此现象随着激振频率的增大越来越明显。在较低频率下此类曲线与张玉红等在不考虑水体相对于土体惯性力的情况相似, 反映了动载相对于静载的特征。在较远距离上, 由于衰减波动趋于减弱。从两图中位移的瞬时值和幅值的比较还可以看出, 在一定范围内, 频率越大其位移与荷载的相位差也越大。

图 4 为正弦波形荷载与渐加阶形荷载作用下, 地表竖向位移随时间变化曲线, 其中正弦波形荷载周期为 8 s。从图中可以看出, 渐加阶形荷载作用下, 位移随时间增加到一定值后, 逐渐

减小,并趋于稳定;正弦波荷载作用下地基竖向位移随时间呈振荡变化。地基表面竖向位移变化步调相对荷载变化有一定的滞后性。

图5表示了不同动力渗透系数饱和地基在渐加阶形荷载作用下表面竖向位移随时间变化曲线。从图中可以看出,在荷载作用的初期阶段,动力渗透系数对地基竖向位移有较大的影响,但随着荷载趋于稳定,即使动力渗透系数很大(如 $k_d = 10^{-2} \text{ m/s}$),其影响也很小。

5 结 论

通过 Laplace-Hankel 联合变换和传递矩阵技术,研究了下卧基岩层状饱和地基上柔性基础在任意荷载作用下的动力响应问题。通过数值研究,可以得出以下结论:

- 1) 下卧基岩层状饱和地基作用动荷载时土体表面位移沿半径以波动形式衰减,荷载激振频率越高,此波动现象越明显;
- 2) 地基表面竖向位移的变化步调相对荷载变化有一定的滞后性,荷载振动频率对两者之间的相位角影响较大。
- 3) 饱和地基动力渗透系数在渐加阶形荷载施加的初期阶段有较大的影响,随着荷载趋于稳定,其影响变得很小。

[参 考 文 献]

- [1] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid_saturated porous solid[J]. The Journal of The Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 168—191.
- [2] Halpern M R, Christiano P. Response of poroelastic half_space to steady state harmonic surface tractions[J]. Int J Numer Anal Mech Geomech, 1986, **10**(6): 609—632.
- [3] JIN Bo. The vertical vibrations of an elastic circular plate on a fluid_saturated porous half_space[J]. Int J Engng Sci, 1999, **37**(3): 379—393.
- [4] 祝波恩,蔡袁强,凌道盛. 饱和地基二维动力 Biot 固结分析[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(2): 248—253.
- [5] 陈龙珠,陈胜立,梁发云. 饱和地基竖向振动的衰减特性[J]. 上海交通大学学报, 2002, **36**(3): 376—381.
- [6] 张玉红,黄义. 两相介质饱和土三维非轴对称稳态响应分析[J]. 应用力学学报, 2002, **19**(3): 85—89.
- [7] 杨军,宋二祥. 饱和无限地基反应的有限元分析[J]. 清华大学学报, 1999, **39**(12): 82—85.
- [8] Bougacha S, Tassoulas J L, Roesset J M. Analysis of foundations on fluid_filled poroelastic stratum[J]. J Engng Mech, 1993, **119**(8): 1632—1648.
- [9] CAI Yuan_qiang, MENG Kai, XU Chang_jie. Stable response of axisymmetric two_phase water_saturated soil[J]. J Zhejiang University SCI, 2004, **5**(9): 1022—1027.
- [10] Durbin F. Numerical inversion of Laplace transformation: An efficient improvement to Durbin and Abate's method[J]. Comput J, 1974, **17**(4): 371—376.

Vertical Vibration Analysis of Axisymmetric Saturated Soil

CAI Yuan_qiang, XU Chang_jie, ZHENG Zao_feng, WU Da_zhi

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University,
Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: Based on Biot's dynamic consolidation equations, by means of Laplace-Hankel transform technology, the integral solutions of stress and displacement in saturated soil with subjacent rock stratum under axisymmetric arbitrary excitations were derived. Influence of the reflected wave generated by the boundary was revealed. Numerical results indicate that the vibration frequency has some effect on the vertical displacement of saturated soil. The vertical displacement at the surface of saturated soil lags in phase with the load. Furthermore, the dynamic permeability coefficient of saturated soil has significant effect on the vertical displacement at the initial stage of load applied, but when the load becomes stable, the effect is inapparent.

Key words: vertical vibration analysis; arbitrary excitation; saturated soil