

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0028-07

权函数法研究高速旋转厚壁筒 的应力强度因子*

陈爱军, 曾文骥

(南京理工大学 理学院, 南京 210094)

(王银邦推荐)

摘要: 采用厚壁筒在内压作用下的应力强度因子作为参考载荷的应力强度因子, 通过权函数方法推导出了内壁带二维径向裂纹的旋转厚壁筒的应力强度因子公式。这些公式可用于计算旋转厚壁筒在不同裂纹深度、转速、材料和尺寸情况下的应力强度因子。算例表明该文的公式具有良好的精度。同时还研究了旋转圆筒应力强度因子随裂纹深度和内外径比之间的变化规律, 方便了工程应用。

关键词: 断裂力学; 权函数法; 旋转圆筒; 边裂纹

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

工程中使用着大量的旋转圆筒, 如机械工业中的传动轴, 兵器中的转管炮, 航空中的发动机, 石油化工设备中的转动管道等等。由于加工中的缺陷或使用中的原因, 构件的内壁容易出现裂纹。如炮管经过几次到十几次发射后, 在高温高压的作用下内壁会出现大量的初始裂纹。当旋转圆筒的内壁出现二维贯穿型径向裂纹的情况, 将对厚壁筒构件的安全造成极大的危害性。确定裂纹尖端处的应力强度因子对研究裂纹扩展和构件的疲劳寿命具有十分重要的意义。应力强度因子的研究方法有很多^[1,2], 如: 数值法、解析法、实验法等。解析法能解决的问题比较少, 数值法则在工程中被广泛采用。权函数方法具有理论基础好, 运算简单、适应性强、精度高等优点^[3~5]。本文采用权函数方法推导出了内壁带二维径向裂纹的高速旋转厚壁筒裂纹尖端处的应力强度因子公式, 获得了满意的结果。并且编制了计算程序, 方便了工程应用。

1 基本理论

1.1 旋转圆筒壁内的切向应力公式

如图所 1, 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的厚壁圆筒, 以等角速度 ω 高速旋转。对于平面应力问题, 由文献[6], 无缺陷的旋转圆环壁内切向应力分量 σ_θ 可写成如下形式:

* 收稿日期: 2004_06_09; 修订日期: 2005_09_06

作者简介: 陈爱军(1972—), 男, 江西省吉安市人, 副教授, 博士(联系人。Tel: + 86_25_84316243; E_mail: chen721010@sina.com)。

$$\alpha_0 = \frac{(3 + \mu) \rho \omega^2}{8} \left[R_2^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 + R_1^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right) \right], \quad (1)$$

式中 ρ 和 μ 分别为材料的密度和泊松比。对于平面应变问题, 即当厚壁圆筒很长。将式(1)中的 μ 换为 $\mu/(1 - \mu)$, E 换为 $E/(1 - \mu^2)$, 可得到平面应变下圆筒旋转时的壁内切向应力 α_0 的公式。

1.2 权函数法的基本原理

权函数是格林函数的一种特殊形式, 是含裂纹体几何的一个性质, 与外加载荷类型无关。Bueckner 在断裂力学中应用权函数的概念提出了 Bueckner 原理^[7]。随后, Rice 根据能量平衡原理, 得到了同一结构在任意两种载荷系统中的应力强度因子的权函数关系^[8]: 对于二维问题, 如果带裂纹深度为 a 的线弹性结构, 在某一对称的载荷系统下 I 型裂纹的应力强度因子 K_r 和裂纹面上的位移 U_r 均是已知量。那么该弹性结构体在其它对称的载荷系统下, 裂纹尖端处的应力强度因子 K_{new} 可由下式得到

$$K_{new} = \int_0^a \sigma_{new} \cdot h(a, x) dx, \quad (2)$$

$h(a, x)$ 称为权函数, 其计算式

$$h(a, x) = H \cdot \frac{\partial U_r}{\partial a} \cdot \frac{1}{K_r}, \quad (3)$$

式中系数 H , 在平面应变时 $H = E/(1 - \mu^2)$, 平面应力时 $H = E$ 。 E 为材料的弹性模量, σ_{new} 为弹性体无裂纹时在 K_{new} 相关的载荷作用下的裂纹面部位处应力。

本文将以上的权函数理论应用于内壁带二维径向裂纹的旋转圆筒裂纹尖端处的应力强度因子研究。

1.3 内壁带径向裂纹的厚壁筒的权函数

图2为内壁带二维径向裂纹的厚壁圆筒。带裂纹厚壁圆筒在内压作用下的应力强度因子已经有了许多研究^[9, 10], 它的解可写成如下形式

$$K_{1P} = \alpha_0 F \left[\frac{a}{t} \right] \sqrt{\pi \cdot a}, \quad (4)$$

式中

$$\alpha_0 = \frac{2P \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (5)$$

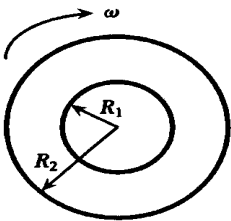


图1 旋转圆筒示意图

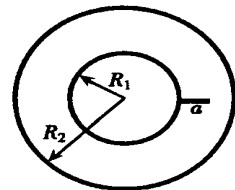


图2 带径向裂纹厚壁筒示意图

根据权函数的思想, 可将内压 P 下的应力强度因子作为参考载荷下的应力强度因子 K_r 。文献[11]用有限元方法计算出了承受内压厚壁筒的径向裂纹尖端处的应力强度因子 K_{1P} , 并且把结果整理成了与内外径比和裂纹深度相关的公式形式。该公式精度高, 拟合成的多项式适于权函数方法的分析, 形式如下:

$$K_{1P} = P\sqrt{t}(5.714\alpha^{0.5} - 4.258\alpha + 5.651\alpha^{1.5}), \quad (6)$$

$$\alpha = (a/t)/(w-1), \quad w = R_2/R_1, \quad (7)$$

式中 $t = R_2 - R_1$ 为筒的壁厚。

裂纹面上的张开位移 $U_r(a, x)$ 可采用文献[12]的原理求出, 它可假设为如下的多项式形式

$$U_r(a, x) = \frac{\sigma_0}{H\sqrt{2}} \left\{ 4F\left(\frac{a}{t}\right) \sqrt{a(a-x)} + G\left(\frac{a}{t}\right) \frac{(a-x)^{3/2}}{\sqrt{a}} \right\}, \quad (8)$$

式中 σ_0 和 $F(a/t)$ 可由 K_{1P} 求得, $G(a/t)$ 为待定函数。将式(6)代入式(4)可得

$$F\left(\frac{a}{t}\right) = \frac{w+1}{2\sqrt{\pi}\cdot w^2} \left[5.714(w-1)^{0.5} - 4.258\left(\frac{a}{t}\right)^{0.5} + 5.651 \frac{a}{t\cdot(w-1)^{0.5}} \right], \quad (9)$$

令

$$\begin{cases} A_1 = \frac{w+1}{2\sqrt{\pi}\cdot w^2} (w-1)^{0.5} \times 5.714, \\ A_2 = -\frac{w+1}{2\sqrt{\pi}\cdot w^2} t^{-0.5} \times 4.258, \\ A_3 = \frac{w+1}{2\sqrt{\pi}\cdot w^2 \cdot t \cdot (w-1)^{0.5}} \times 5.651, \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9), 则

$$F\left(\frac{a}{t}\right) = A_1 + A_2 \cdot a^{0.5} + A_3 \cdot a, \quad (11)$$

在式(2)和(3)中, 令 $K_{\text{new}} = K_{1P}$, 经推导可得

$$G\left(\frac{a}{t}\right) = \frac{[I_1 - 4F\left(\frac{a}{t}\right) I_2 \sqrt{a}] \cdot \sqrt{a}}{I_3}, \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} I_1 = \sqrt{2\pi} \int_0^a F^2 \cdot a da, \\ I_2 = \int_0^a \frac{\sigma_0(x)}{\sigma_0} (a-x)^{1/2} dx, \\ I_3 = \int_0^a \frac{\sigma_0(x)}{\sigma_0} (a-x)^{3/2} dx, \end{cases} \quad (13)$$

$\sigma_0(x)$ 为内压作用下无裂纹厚壁筒在裂纹面部位的切向应力, 可写为以下形式^[6]

$$\sigma_0(x) = \frac{P \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 + \frac{R_1^2}{(R_1+x)^2} \right] = \frac{\sigma_0}{2} \left[1 + \frac{R_1^2}{(R_1+x)^2} \right], \quad (14)$$

上式中 x 轴沿裂纹面方向, 原点在厚壁筒的内壁。

将公式(13)作进一步简化可得

$$I_1(a) = \pi\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} A_1^2 a^2 + \frac{A_2^2 + 2A_1 A_3}{3} a^3 + \frac{1}{4} A_3^2 a^4 + \frac{4}{5} A_1 A_2 a^{5/2} + \frac{7}{4} A_1 A_3 a^{7/2} \right\}, \quad (15)$$

$$I_2(a) = \frac{1}{2} \left\{ R_1^2 \left[\frac{\sqrt{a}}{R_1} - \frac{1}{2\sqrt{a+R_1}} \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a}} \right] + \frac{2}{3} a^{3/2} \right\}, \quad (16)$$

$$I_3(a) = \frac{1}{2} \left\{ R_1^2 \left[3\sqrt{a} + \frac{a}{R_1} \sqrt{a} - \frac{3}{2} \sqrt{a+R_1} \cdot \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a}} \right] + \frac{2}{5} a^{5/2} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{dI_1}{da} = \pi\sqrt{2F^2 a}, \quad (18)$$

$$\frac{dI_2}{da} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ R_1^2 \left[\frac{\sqrt{a}}{2R_1(a+R_1)} + \frac{1}{4(a+R_1)\sqrt{a+R_1}} \cdot \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a}} \right] + \sqrt{a} \right\}, \quad (19)$$

$$\frac{dI_3}{da} = \frac{3}{2} I_2 \quad (20)$$

$$\frac{dF}{da} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{\pi}} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2^2} \left[-2.129 \frac{R_1}{\sqrt{a(R_2 - R_1)}} + 5.651 \frac{R_1^{1.5}}{(R_2 - R_1)^2} \right], \quad (21)$$

$$\frac{dG}{da} = \frac{1}{I_3} \cdot \left\{ \left[2 \frac{dI_1}{da} a + I_1 \right] \frac{1}{2\sqrt{a}} - 4a \left[\frac{dF}{da} I_2 + F \frac{dI_2}{da} \right] - \left[4F + \frac{3}{2} G \right] I_2 \right\}, \quad (22)$$

由以上式子可以求出 $U_r(a, x)$, 代入式(3) 可得带径向裂纹厚壁筒的权函数 $h(a, x)$

$$h(a, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F}} \left[\frac{2F}{\sqrt{a-x}} + \left(4 \frac{dF}{da} + \frac{2F}{a} + \frac{3G}{2a} \right) \sqrt{a-x} + \left(\frac{dG}{da} - \frac{G}{2a} \right) \frac{(a-x)^{3/2}}{a} \right]. \quad (23)$$

1.4 内壁带径向裂纹的旋转圆筒的应力强度因子 K_{1R} 解

由公式(1), 旋转圆筒的壁内的切向应力 $\sigma_\theta(x)$ 可写成如下形式:

$$\sigma_\theta(x) = C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{(R_1 + x)^2} + C_3 \cdot (R_1 + x)^2, \quad (24)$$

式中

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (3 + \mu) \cdot (R_1^2 + R_2^2)}{8}, \\ C_2 = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (3 + \mu) \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{8}, \\ C_3 = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (1 + 3\mu)}{8}. \end{cases} \quad (25)$$

将式(24)代入式(2)中, 可得

$$K_{1R} = C_1 \cdot K_1^{(1)}(a, a) + C_2 \cdot K_1^{(2)}(a, a) + C_3 \cdot K_1^{(3)}(a, a), \quad (26)$$

式中

$$\begin{cases} K_1^{(1)}(a, x) = \int_0^x h(a, x) dx, \\ K_1^{(2)}(a, x) = \int_0^x \frac{h(a, x)}{(R_1 + x)^2} dx, \\ K_1^{(3)}(a, x) = \int_0^x (R_1 + x)^2 \cdot h(a, x) dx, \end{cases} \quad (27)$$

积分后得:

$$K_1^{(1)}(a, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot F} \left\{ 4F(\sqrt{a} - \sqrt{a-x}) + \left[4 \frac{dF}{da} + \frac{2F}{a} + \frac{3G}{2a} \right] \times \frac{2}{3} [a^{3/2} - (a-x)^{3/2}] + \frac{1}{a} \left[\frac{dG}{da} - \frac{G}{2a} \right] \frac{2}{5} [a^{5/2} - (a-x)^{5/2}] \right\}, \quad (28)$$

$$K_1^{(2)}(a, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot F} \left\{ 2F \left[\frac{\sqrt{a}}{R_1(a+R_1)} + \frac{1}{2(a+R_1)^{3/2}} \ln \left[\frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a}} \right] \right] - \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a-x}}{(a+R_1)(R_1+x)} - \frac{1}{2(a+R_1)^{3/2}} \ln \left[\frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a-x}} \right] + \\ & \left(4 \frac{dF}{da} + \frac{2F}{a} + \frac{3G}{2a} \right) \left[\frac{\sqrt{a}}{R_1} + \frac{1}{2\sqrt{a+R_1}} \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a-x}} - \frac{\sqrt{a-x}}{R_1+x} - \right. \\ & \frac{1}{2\sqrt{a+R_1}} \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a}} + \frac{1}{a} \left(\frac{dG}{da} - \frac{G}{2a} \right) \left[3\sqrt{a} - 3\sqrt{a-x} + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} \sqrt{R_1+a} \cdot \ln \frac{\sqrt{a+R_1} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+R_1} - \sqrt{a-x}} - \right. \\ & \left. \left. \frac{3}{2} \sqrt{R_1+a} \cdot \ln \frac{\sqrt{R_1+a} + \sqrt{a}}{\sqrt{R_1+a} - \sqrt{a}} + \frac{a^{3/2}}{R_1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} K_{IP}^{(3)}(a, x) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot F} \left\{ 2F \left[-2R_1^2 \sqrt{a-x} + 2R_1^2 \sqrt{a} - \frac{4}{3} R_1(x+2a) \sqrt{a-x} + \right. \right. \\ & \left. \frac{8}{3} R_1 a^{3/2} - \frac{2}{15} (3x^2 + 4ax + 8a^2) \sqrt{a-x} + \frac{16}{15} a^{5/2} \right] + \left(4 \frac{dF}{da} + \frac{2F}{a} + \frac{3G}{2a} \right) \times \\ & \left[-\frac{2}{3} R_1^2 (a-x)^{3/2} + \frac{2}{3} R_1^2 a^{3/2} - \frac{4}{15} R_1 (3x+2a) \cdot (a-x)^{3/2} + \frac{8}{15} R_1 a^{5/2} + \right. \\ & \left. \frac{16}{105} a^{7/2} - \frac{2}{105} (15x^2 + 12ax + 8a^2) (a-x)^{3/2} \right] + \frac{1}{a} \left(\frac{dG}{da} - \frac{G}{2a} \right) \left[-\frac{2}{5} R_1^2 (a-x)^{5/2} + \right. \\ & \left. \frac{2}{5} R_1^2 a^{5/2} - \frac{8}{35} R_1 (a-x)^{7/2} - \frac{4}{5} R_1 x (a-x)^{5/2} + \frac{8}{35} R_1 a^{7/2} - \frac{2}{5} x^2 (a-x)^{5/2} - \right. \\ & \left. \left. \frac{8}{35} x (a-x)^{7/2} - \frac{16}{315} (a-x)^{9/2} + \frac{16}{315} a^{9/2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

2 计算算例

位移函数 $U_r(a, x)$ 对本文应力强度因子的精度具有重要的影响。为了检查本文采用的位移函数的 $U_r(a, x)$ 正确性, 本文用公式(8) 求得的值与有限元法的计算结果进行了比较, 列于下表1中。计算研究采用以下参量: 内壁带径向裂纹的厚壁筒内外半径分别为 $R_1 = 60 \text{ mm}$ 和 $R_2 = 125 \text{ mm}$, 裂纹深度 $a = 10 \text{ mm}$, 材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.27$, 内压 $P = 490 \text{ MPa}$ 。

表1 内压作用下厚壁筒内裂纹面张开位移 (mm)

x	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25	7.5	10.0
公式(8)	0.151	0.143	0.135	0.125	0.114	0.100	0.083	0.0
有限元	0.153	0.143	0.133	0.122	0.110	0.096	0.079	0.0
相差(%)	1.31	0.0	1.48	2.46	3.64	4.17	5.06	0.0

从表1可见, 本文导得的位移函数 $U_r(a, x)$ 公式具有较高的精度。由 K_{IP} 与 $U_r(a, x)$ 得到的 $h(a, x)$ 也具有较好的精度。以上公式已编制成了计算程序软件, 可用于内壁带二维径向裂纹的旋转圆筒在不同的裂纹深度、转速、材料和尺寸等情况下的应力强度因子 K_{IR} 的计算。

为了检验以上公式计算应力强度因子的准确性, 本文与文献[2]提供的数据 Y 进行了比较。在平面应变条件下, 所研究的高速旋转圆筒转速 $\omega = 40 \pi / \text{s}$, 材料的密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, 弹

性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.27$, 内径 $R_1 = 60 \text{ mm}$, 外径 $R_2 = 90 \text{ mm}$ 。

$$Y = \frac{K_{1R}}{(\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a})}, \quad \sigma = \frac{3-2\mu}{4(1-\mu)} \rho \cdot \omega^2 R_2^2 \left[1 + \frac{1-2\mu}{3-2\mu} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right], \quad (31)$$

由图 3 可见, 本文的权函数方法同文献 [2] 中数据符合情况良好, 本文的权函数方法导出的旋转厚壁筒应力强度因子公式具有较好的精度。

下面研究的高速旋转厚壁筒转速 $\omega = 40 \pi/\text{s}$, 内径 $R_1 = 60 \text{ mm}$, 内外径比 R_2/R_1 为 1.5, 2.0 和 3.0 三种情况, 应力强度因子 K_{1R} (单位: $\text{Pa} \cdot \sqrt{\text{m}}$) 随 a/t 的变化规律 (a/t 在 0.05~0.8 范围内), 见图 4 所示。

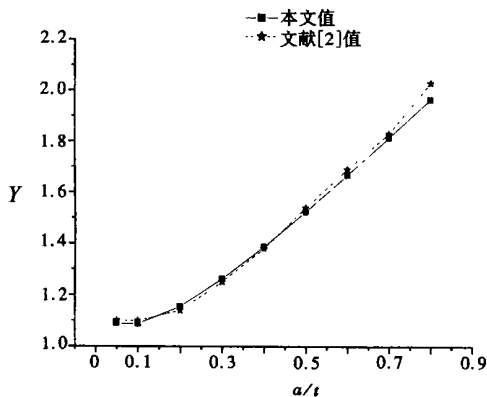


图 3 Y 值随 a/t 的变化规律

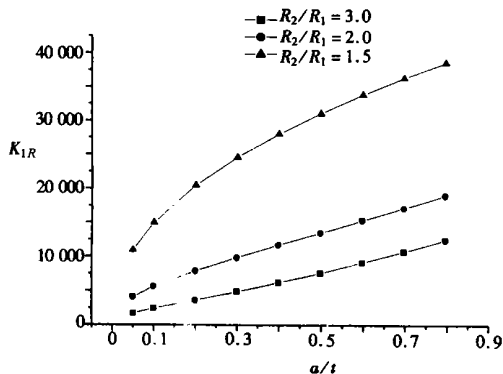


图 4 K_{1R} 值随 a/t 的变化规律

3 结 论

本文通过权函数方法推导出了内壁带二径裂纹的高速旋转厚壁筒裂纹尖端处的应力强度因子公式, 获得了满意的结果。本文导得的公式可用于旋转圆筒在不同的裂纹深度、转速、材料和尺寸等情况下的应力强度因子的计算, 方便了工程应用。

由本文计算研究表明, 在其它条件不变的情况下, 内壁带二径裂纹的高速旋转厚壁筒裂纹尖端处的应力强度因子 K_{1R} 随 a/t 的增加而增加, 而随 R_2/R_1 的增加而减小。

[参 考 文 献]

- [1] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003, 20—28.
- [2] 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 7—438.
- [3] 吴学仁. 圆筒轴向裂纹的权函数和应力强度因子[J]. 固体力学学报, 1990, 11(2): 175—180.
- [4] Kiciak A, Glinka G, Burns D J. Calculation of stress intensity factors and crack opening displacements for cracks subjected to complex stress fields[J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 2003, 125(4): 260—266.
- [5] 陈爱军, 徐诚, 王志群. 组合厚壁筒套装应力强度因子的权函数方法[J]. 船舶力学, 2003, 7(2): 89—94.
- [6] 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995, 236—242.
- [7] Bueckner H F. A novel principle for the computation of stress intensity factors[J]. Z Angew Math Mech, 1970, 50(9): 529—546.
- [8] Rice J R. Some remarks on elastic crack tip stress fields[J]. Int J Solids Structures, 1972, 8(6):

- 751—758.
- [9] Bowie O L, Neal D M. Modified mapping_collocation technique for accurate calculation of stress intensity factors[J]. Int J Fract Mech, 1970, **6**(2): 199—206.
- [10] Raju I S, Newman J C. Stress intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels[J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 1982, **104**(4): 293—298.
- [11] Kirkhope K J, Bell R, Kirkhope J. Stress intensity factor equations for single and multiple cracked pressurized thick_walled cylinders[J]. Int J Pres Ves and Piping, 1990, **41**(1): 103—111.
- [12] Petroski H J, Achenbach J D. Computation of the weight function from a stress intensity factor[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1978, **10**(2): 257—266.

Weight Function for Stress Intensity Factors in Rotating Thick_Walled Cylinder

CHEN Ai_jun, ZENG Wen_ji

(School of Science, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210094, P. R. China)

Abstract: The equation of stress intensity factors of internally pressurized thick_walled cylinder was used as the reference case. SIF equation of rotating thick_walled cylinder containing a radial crack along the internal bore was presented in weight function method. The weight function formulas were worked out and can be used for all kinds of depth of cracks, rotating speed, material, size of thick_walled cylinder to calculate the stress intensity factors. The results indicated the validity and effectiveness of these formulas. Meanwhile, the rules of the stress intensity factors in rotating thick_walled cylinder with the change of crack depths and the ratio of outer radius to inner radius were studied. The studies are valuable to engineering application.

Key words: fracture mechanics; weight function method; rotating cylinder; edge crack