应用数学和力学, 第 27 卷 第 1 期(2006 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2006) 01_0013_08

大型不正定陀螺系统本征值问题*

隋永枫, 钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(我刊编委钟万勰来稿)

摘要: 陀螺动力系统可以导入哈密顿辛几何体系, 在哈密顿陀螺系统的辛子空间迭代法的基础上提出了一种能够有效计算大型不正定哈密顿函数的陀螺系统本征值问题的算法• 利用陀螺矩阵既为哈密顿矩阵而本征值又是纯虚数或零的特点, 将对应哈密顿函数为负的本征值分离开来, 构造出对应哈密顿函数全为正的本征值问题, 利用陀螺系统的辛子空间迭代法计算出正定哈密顿矩阵的本征值, 从而解决了大型不正定陀螺系统的本征值问题, 算例证明, 本征解收敛得很快•

关 键 词: 陀螺矩阵; 哈密顿函数; 辛; 本征值

中图分类号: O347 文献标识码: A

引 言

高转速是近代旋转机械的一个重要特征, 陀螺效应将无法忽视, 而这也必将导致大型陀螺特征值问题[1, 2]• 陀螺系统特征值问题一直是转子动力学提出的一个典型的数学问题• 在结构动力学中, 求解大型对称矩阵的特征值问题已经有很多方法, 子空间迭代法就是工程中很常用的方法• 由于哈密顿矩阵与对称矩阵有许多一一对应的特点, 利用这些特点, 能够发展出与求解对称阵本征值相当的陀螺特征值问题的迭代算法• 文献[3]基于控制理论与结构力学互相模拟的特点提出了求解哈密顿矩阵本征值的辛子空间迭代法, 这种方法是在原状态变量及其对偶变量组成的全空间内做变换, 是一种接触变换, 与在原空间内的点变换不同, 能够更好地保持原系统的特性[4]• 对于维数不大的陀螺矩阵特征值问题, 已经有了比较成熟的算法[1], [5,6]• 当系统维数 n 比较大时文献[7]和文献[8]给出了用于求解大型哈密顿系统主要本征值的辛求解算法, 基于此本文发展出求解不正定哈密顿函数的陀螺系统本征值的算法•

1 陀螺系统

方程(1)为相应陀螺动力系统的拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}/2 + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}/2 - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}/2, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2004_08_14; 修订日期: 2005_09_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372019); 教育博士点基金资助项目(20010141024)
作者简介: 隋永枫(1978—), 男, 黑龙江人, 博士(联系人. Tel: + 86_411_84700430; E_mail: mydlut@yeah.net, suiyongf@student.dlut.edu.cn);
钟万勰(1934—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士(Tel/Fax: + 86_441_84708437; E_mail: zwoffice@dlut.edu.cn)•

其中 $\boldsymbol{q}$ 为 n 维广义位移向量. 由此可导出自由振动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 通常无法保证正定, 陀螺项 $\boldsymbol{G}$ 是 $n\times n$ 维的反对称矩阵. 对于系统(2), 矩阵满足 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$.

其实分离变量法对陀螺系统也是可以发挥作用的. 其关键的一步是要采用状态空间法. 通过引入广义动量将方程(1)写为:

$$\boldsymbol{p} = \partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}/2, \tag{3}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}/2 + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}. \tag{4}$$

相应的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}/2 + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}/2 = \\ &\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p}/2 - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}/2 + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}/4)\boldsymbol{q}/2, \end{aligned}$$

可以写成为:

$$\begin{cases} H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{p}/2 + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}/2, \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1},\ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}/2,\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}/4, \end{cases} \tag{5}$$

注意, $\boldsymbol{D}$ 为对称正定阵, $\boldsymbol{B}$ 阵为对称但未必能保证为正定, 因为 $\boldsymbol{K}$ 阵未必能保证正定.

相应的变分原理为:

$$\delta\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})]\,\mathrm{d}t = 0, \tag{6}$$

完成变分推导, 可以得到(7)式的正则方程

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \partial H/\partial\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{p}, \tag{7a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\partial H/\partial\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}, \tag{7b}$$

将 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ 合在一起组成全状态向量 $\boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{v} = \left\{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

于是对偶正则方程便成为:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}, \tag{9}$$

其中哈密顿矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

初值条件是

$$\boldsymbol{q}_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{q}(0),\quad \dot{\boldsymbol{q}}_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \dot{\boldsymbol{q}}(0). \tag{11}$$

在求解本征向量与本征值时, 暂时还用不到初值条件.

2　分离变量法, 本征问题

求解振动方程, 最常用的二类方法便是(a)直接积分法, (b)分离变量法. 直接积分法通常总是逐步积分. 过去总是采用差分近似来推导逐步积分公式.

对于齐次方程(9), 可以利用分离变量法求解. 令

$$\boldsymbol{v} = \psi\cdot\varphi(t), \tag{12}$$

其中 ψ 是一个 $2n$ 维常向量, $\varphi(t)$ 是一个纯量函数而与向量的下标无关. 上式代入方程(9)得

$$\psi\cdot(\dot{\varphi}/\varphi) = \boldsymbol{H}\psi, \tag{13}$$

右侧与时间无关, 故 $\dot{\varphi}/\varphi = \mu$ 一定是一个常数, 从而 $\varphi = \exp(\mu t)$, 得到本征方程

$$\boldsymbol{H}\psi = \mu\psi, \tag{14}$$

这就导向了 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的本征问题• μ是本征值, $\psi(x)$ 是相应本征向量,满足边界条件(11)•

$\boldsymbol{H}$ 是哈密顿矩阵,因

$$\begin{cases} \boldsymbol{JH} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{D} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{JH})^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{JJ} = -\boldsymbol{I}_{2n}, \ \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}^{-1} = -\boldsymbol{J}, \ \boldsymbol{JHJ} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}• \end{cases} \tag{15}$$

哈密顿矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的本征问题有以下特点:

1) 如 μ是哈密顿型算子矩阵$\boldsymbol{H}$ 的本征值,则$-\mu$ 也一定是其本征值•

2) 哈密顿算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的本征向量之间有共轭辛正交关系•

设 ψ_i 和ψ_j 分别是本征值μ_i 和μ_j 对应的本征向量,则当 $\mu_i + \mu_j \neq 0$ 时有辛正交关系

$$\psi_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\psi_j = \boldsymbol{0}, \tag{16}$$

而与 ψ_i 辛共轭的向量一定是本征值$-\mu_i$ 的本征向量(或其约当型本征向量)•

由式(13)和(14),可以得到

$$\boldsymbol{JHJJ}\psi = \mu\boldsymbol{J}\psi, \ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\psi) = -\mu(\boldsymbol{J}\psi),$$

这说明$(\boldsymbol{J}\psi)$ 是$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$ 的本征向量,本征值为$-\mu$• 即$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$ 的本征值也必是 $\boldsymbol{H}$ 的本征值,证毕•

于是哈密顿矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 $2n$ 个本征值可以划分为二类[9]:

$$\begin{cases} (\alpha) \quad \mu_i, \ \mathrm{Re}(\mu_i) < 0 \text{ 或 } \mathrm{Re}(\mu_i) = 0 \quad \mathrm{Im}(\mu_i) > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n; \\ (\beta) \quad \mu_{n+i}, \ \mu_{n+i} = -\mu_i, \end{cases} \tag{17}$$

本征值μ_i 与μ_{n+1}的一对本征向量 ψ_i 和 ψ_{n+i} 互为辛共轭的•

如果$\mu_i + \mu_j \neq 0$,否则本征向量 ψ_i 与ψ_j 一定互相辛正交,即

$$\psi_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\psi_j = \boldsymbol{0}, \ \psi_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\psi_i = \boldsymbol{0}, \qquad \text{当 } \mu_i + \mu_j \neq 0 \text{ 时}• \tag{18}$$

将全部本征向量按编号排成列,而构成 $2n \times 2n$ 本征向量阵 Ψ

$$\Psi = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n; \psi_{n+1}, \psi_{n+2}, \cdots, \psi_{2n}], \tag{19}$$

则根据共轭辛正交归一关系,有

$$\Psi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\Psi = \boldsymbol{J}, \tag{20}$$

由此知, $\boldsymbol{H}$ 的本征向量矩阵Ψ是一个辛矩阵• Ψ的行列式值为± 1,故知其所有的列向量,即本征向量,张成了 $2n$ 维空间的一个基底• 因此, $2n$ 维空间(相空间)内任一向量皆可由本征向量来展开• 即任意向量 $\boldsymbol{v}$ 可表示为:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n}[a_i\psi_i + b_i\psi_{n+i}], \tag{21}$$

$$a_i = -\psi_{n+i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Jv}, \ b_i = \psi_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Jv},$$

其中 a_i 和b_i 是参数,由本征函数向量 ψ_i 和 ψ_{n+i} 决定, $(i = 1, 2, \cdots)$•

3 本征值问题的求解

求解本征值问题应区分正定哈密顿函数与非正定哈密顿函数• 对应正定哈密顿函数,本征值问题的求解可以化成 $2n$ 维的对称正定矩阵的本征值问题• 因为

$$\omega^2 = \min_{\psi}[\psi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}^3\psi/(\psi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}\psi)], \tag{22}$$

按条件, $\boldsymbol{JH}$ 对称正定,又由于$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}^3\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{Hv})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}(\boldsymbol{Hv}) > \boldsymbol{0}$,故$\boldsymbol{JH}^3$ 也对称正定• (22)就成为常规的本征值问题,其求解是不成问题的• 但在一些陀螺动力系统中,其哈密顿矩阵 $\boldsymbol{JH}$

不正定而且维数可能相当大。其本征值问题应予以有效求解。

陀螺振动问题很多是高速转子系统的振动。其非正定的因素就是集中的转子。拉格朗日函数中的非正定矩阵 $\boldsymbol{K}$ 就是造成哈密顿函数非正定的原因。对于哈密顿矩阵 $\boldsymbol{JH}$ 对称不正定时, 将 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解, 其 $\boldsymbol{D}$ 阵的负元个数给出了负值模态的个数, 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 一定正定。因此 $\boldsymbol{JH}$ 有几个负值的 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JHv}$ 是已知的。其实, 对于高速转子的陀螺系统振动, 由于采用柔轴, 陀螺项相对很大[10, 11]。此时本征值的分布是, 一部分由于陀螺项而达到稳定的模态频率很低。而其余模态的频率较高。因此给逆叠代法也提供了条件[7]。先将对应哈密顿函数不正定的本征值和本征向量全部求出来, 组成一个辛对偶子空间。然后再利用其各个本征向量辛正交归一关系, 将原来不正定哈密顿矩阵分块为一个哈密顿函数为负的辛子空间及其补辛子空间, 在补辛子空间中哈密顿函数可保证为正定, 那么就可利用文献[2]至文献[4]中的求解方法求出对应哈密顿函数正定的本征值和本征向量。将所求得的两个辛子空间合并起来, 则可以看到它包括了所有哈密顿函数为负的本征根对应的本征向量以及前几阶哈密顿函数为正的本征根对应的本征向量, 可以很好的近似全部本征向量即主模态。

从以上讨论可以得到, 具体步骤简单归纳如下:

1) 求出对应哈密顿函数不正定的本征值和本征向量 μ_i、μ_{m+i} $(i=1, \cdots, m)$ 和 ψ_i、ψ_{m+i} $(i=1, \cdots, m)$, 其向量组组成的空间记为 $\boldsymbol{V}_1$。

2) 由哈密顿矩阵本征向量共轭辛正交关系, 定义一个向量空间 $\boldsymbol{V}_2$, 任一向量 $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_2)$ 均与 $\boldsymbol{V}_1$ 辛正交。那么可以得到:

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JHv}>\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{JH}$ 在空间 $\boldsymbol{V}_2$ 内可以保证是正定的。

3) 利用陀螺系统的辛子空间迭代法计算(2)中的本征值和本征向量。

说明 陀螺系统的辛子空间迭代法可以参见哈密顿辛子空间迭代法, 其具体数据的定义, 可参见文献[2]至文献[4]。

4 数 值 例 题

这里举2个转子动力学的例子说明不正定陀螺系统辛子空间迭代法的有效性。

例1 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$ 阵如下:

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(20.000, 20.000, 0.072, 0.072),$$

$$\boldsymbol{G}=10^4\times\begin{bmatrix}0&-4&0&0\\4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}=10^5\times\begin{bmatrix}-182.3252375&0&-2.94579375&0\\0&-182.3252375&0&2.94579375\\-2.94579375&0&2.192896875&0\\0&2.94579375&0&2.192896875\end{bmatrix},$$

则可以得到哈密顿矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为:

$$
\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}
0 & 1\,000 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\
-1\,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.89 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.89 \\
-1\,767\,476.25 & 0 & 294\,579.375 & 0 & 0 & 1\,000 & 0 & 0 \\
0 & -1\,767\,476.25 & 0 & -294\,579.375 & -1\,000 & 0 & 0 & 0 \\
294\,579.375 & 0 & -219\,289.687\,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -294\,579.375 & 0 & -219\,289.687\,5 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

可以算得当 $\mu=\pm 746.714\,\mathrm{i}$ 时, 对应的本征向量有 $\psi_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}\psi_i<\boldsymbol{0}$• 其中$(m=1)$•

$$
\psi_1=\{0.001\,38\quad -0.009\,99\quad 0.002\,27\quad 0.016\,43\quad 50.585\,47\quad 6.986\,19\quad -0.882\,82\quad 0.121\,92\}^{\mathrm{T}},
$$

$$
\psi_2=\{-0.009\,99\quad -0.001\,38\quad -0.016\,43\quad 0.002\,27\quad 6.986\,19\quad -50.585\,47\quad -0.121\,92\quad -0.882\,82\}^{\mathrm{T}},
$$

这里要迭代出前两项, 为了加快迭代速度, 取 $q=3$• 取一基底

$$
\boldsymbol{X}_a=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{N}_a=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{X}_b=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad
\boldsymbol{N}_b=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},
$$

进入迭代循环, 结果见表 1•

表 1 本征根的迭代过程

阶　　数		第二阶	第三阶	第四阶
迭代次数	1	$\pm 1\,778.25\,\mathrm{i}$	$\pm 1\,747.50\mathrm{i}$	$\pm 1\,222.54\mathrm{i}$
	2	$\pm 1\,778.25\,\mathrm{i}$	$\pm 1\,747.50\mathrm{i}$	$\pm 1\,222.54\mathrm{i}$

可以看到经过两步就收敛了•

例 2　$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$ 阵如下:

$$
\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(0.090\,1\quad 0.090\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.720\,4\quad 0.180\,1\quad 0.180\,1\quad 0.180\,1),
$$

$$
\boldsymbol{G}=10^4\times\left[\begin{matrix}
0 & 0.540\,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.540\,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.322\,6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.080\,7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4.322\,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1.080\,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.322\,6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.080\,7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4.322\,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.080\,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.322\,6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.080\,7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4.322\,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1.080\,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.080\,7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.080\,7 & 0
\end{array}\right],
$$

$$
\boldsymbol{K} = 10^4 \times \left[\begin{array}{cccccccc}
7.669 & 0 & -0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7.669 & 0 & 0 & -0.109 & -5.234 & 0 & 0 \\
-0.109 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 & -7.256 & 0.109 \\
-5.234 & 0 & 0 & 15.338 & 0 & 0 & -0.109 & -5.234 \\
0 & -0.109 & 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 15.338 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -7.256 & -0.109 & 0 & 0 & 8.029 & 0 \\
0 & 0 & 0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 15.338 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -7.256 & -0.109 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.109 & -5.234 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.256 & -0.109 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.109 & -5.234 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-7.256 & 0.109 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -7.256 & 0.109 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8.029 & 0 & 0 & 0 & -7.256 & 0.109 & 0 & 0 \\
0 & 15.338 & 0 & 0 & -0.109 & -5.234 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 & 0.109 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 15.338 & 0 & 0 & -5.234 & 0 \\
-7.256 & -0.109 & 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0.109 \\
0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 0 & 15.338 & 0 & -5.234 \\
0 & 0 & 0.109 & -5.234 & 0 & 0 & 10.101 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.109 & -5.234 & 0 & 10.101
\end{array}\right],
$$

由 $\boldsymbol{K}$ 可以算得有一个对应哈密顿函数为负的特征值, 为 $\mu = \pm 0.517\,3\mathrm{i}$ 时, 对应的本征向

量有 $\psi_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JH}\psi_i < 0$•

其中:

$$\psi_1 = \left\{\boldsymbol{X}_{a0}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{N}_{a0}^{\mathrm{T}}\right\}, \quad \psi_2 = \left\{\boldsymbol{X}_{b0}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{N}_{b0}^{\mathrm{T}}\right\},$$

其中:

$$\boldsymbol{X}_{a0} = \{0 \quad 0.0002 \quad -0.0013 \quad 0 \quad 0.0062 \quad 0.0001 \quad -0.0019 \quad 0 \quad 0.0088 \quad 0.0000 \quad -0.0013 \quad 0 \quad 0.0062 \quad -0.0001 \quad 0 \quad -0.0001\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{N}_{a0} = \{0.5039 \quad 0.1085 \quad -134.2728 \quad 0.7248 \quad -28.9058 \quad 0.1560 \quad -189.8864 \quad 0.0514 \quad -40.8781 \quad 0.0111 \quad -134.2642 \quad -0.5797 \quad -28.9039 \quad -0.1248 \quad -0.7009 \quad -0.1509\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X}_{b0} = \{-0.0002 \quad 0 \quad -0.0062 \quad -0.0001 \quad -0.0013 \quad 0 \quad -0.0088 \quad 0 \quad -0.0019 \quad 0 \quad -0.0062 \quad 0.0001 \quad -0.0013 \quad 0 \quad 0.0001 \quad 0\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{N}_{b0} = \{-0.1085 \quad 0.5039 \quad 28.9058 \quad -0.1560 \quad -134.2728 \quad 0.7248 \quad 40.8781 \quad -0.0111 \quad -189.8864 \quad 0.0514 \quad 28.9039 \quad 0.1248 \quad -134.2642 \quad -0.5797 \quad 0.1509 \quad -0.7009\}^{\mathrm{T}}•$$

这里求其二到四阶本征对, 为了迭代的收敛快一些, 取 $q = 4$, 选取初值进行迭代•

初值选取:

令 $\boldsymbol{v}_1 = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{v}_2 = \{1 \quad 1 \quad -1 \quad -1\}^{\mathrm{T}}$, 构造初始矩阵:

$$\boldsymbol{X}_a = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_b = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_a = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_2) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ -\mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_2) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_b = \begin{bmatrix} -\mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_2) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \\ -\mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_2) \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{v}_1) \end{bmatrix},$$

进入迭代循环, 结果见表 2•

表 2 本征根的迭代过程

阶	数	第二阶	第三阶	第四阶	第五阶
迭代次数	1	±39 740 i	±59 200 i	±86 095 i	±202 250 i
	2	±4.534 5 i	±5.105 6 i	±8.339 6 i	±6 983.2 i
	4	±1.861 4 i	±4.267 2 i	±4.509 7 i	±97.967 i
	6	±1.856 8 i	±4.238 6 i	±4.505 2 i	±10.472 i
	8	±1.856 8 i	±4.238 0 i	±4.505 0 i	±6.822 4 i
	10	±1.856 8 i	±4.238 0 i	±4.505 0 i	±6.789 7 i

可以看到, 二到四阶振型收敛的速度是很快的•

5 结 论

本文基于哈密顿陀螺系统的辛子空间迭代法, 针对当哈密顿陀螺矩阵所对应的哈密顿函数不正定时, 提出了一种能够有效计算大型不正定哈密顿陀螺系统本征值问题的算法• 子空间迭代方法在求解对称矩阵的特征值问题上已经获得了一定的成功, 本文的方法将哈密顿矩阵的辛子空间迭代法引入了陀螺系统的特征值计算之中, 这样在哈密顿陀螺系统本征问题求解上, 子空间迭代方法同样可以发挥出其优良特性•

[参 考 文 献]

[1] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002, 101—106.

[2] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990, 96—115.

[3] 钟万勰. Hamilton 矩阵主要本征解的共轭辛子空间叠代法[J]. 自然科学进展, 1991, **1**(6): 493—501.

[4] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993, 142—167.

[5] Van Loan C F. A simplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix [J]. Linear Algebra Appl, 1987, **96**: 231—251.

[6] 钟万勰, 林家浩. 陀螺系统与反对称矩阵辛本征解的计算[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, **10**(3): 237—253.

[7] ZHONG Wan_xie, ZHONG Xiang_xiang. On the adjoint simplectic inverse substitution method for main eigensolutions of a large Hamiltonian matrix[J]. Journ of System Eng, 1991, **1**(2): 41—50.

[8] 钟万勰. 大型辛矩阵本征值问题的逆叠代法[J]. 计算结构力学及其应用, 1992, **9**(3): 227—238.

[9] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995, 43—47.

[10] 钟一谔, 何衍宗, 王正等. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987, 8—17.

[11] 隋永枫, 吕和祥. 陀螺效应对转子横向振动的影响分析[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(6): 711—714.

Eigenvalue Problem of a Large Scale Indefinite Gyroscopic Dynamic System

SUI Yong_feng, ZHONG Wan_xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, 116023, P. R. China)

Abstract: Gyroscopic dynamic system can be introduced to Hamiltonian system. Based on an adjoint symplectic subspace iteration method of Hamiltonian gyroscopic system, an adjoint symplectic subspace iteration method of indefinite Hamiltonian function gyroscopic system is proposed to solve the eigenvalue problem of indefinite Hamiltonian function gyroscopic system. The character that the eigenvalues of Hamiltonian gyroscopic system are only pure imaginary or zero is used. The eigenvalues that Hamiltonian fuction is negative can be separated so that the eigenvalue problem of positive definite Hamiltonian function system is presented, and an adjoint symplectic subspace iteration method of positive definite Hamiltonian function system is used to solve the separated eigenvalue problem. Therefore, the eigenvalue problem of indefinite Hamiltonian function gyroscopic system is solved, two numerical examples are given to demonstrate that the eigensolutions converge exactly.

Key words: Gyroscopic system; Hamiltonian function; symplectic; eigenvalue