

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0006-07

低噪声水平混沌时序的预测 技术及其应用研究*

马军海^{1,2}, 王志强¹, 陈予恕³

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072;

2. 天津财经大学, 天津 300222;

3. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究含有噪声的混沌时序的除噪及其重构技术, 基于除噪混沌数据的预测技术及其应用。应用混沌时序的奇异值分解技术对混沌时序的噪声进行了剥离, 将混沌时序的相空间分解成为值域空间和虚拟的噪声空间, 在值域空间内重构了原混沌时序, 并在此基础上, 确立了非线性模型的阶, 利用所提出的非线性模型对时序进行了预测研究工作, 研究结果表明, 该非线性模型具有很强的函数逼近能力, 所采用的混沌预测方法对相应的实际问题有着一定的指导意义。

关键词: 混沌时序; 除噪; 本质特征提取; 非线性模型; 预测技术

中图分类号: O175.14; O241.81 **文献标识码:** A

引 言

由于现实的工程问题、社会经济管理问题越来越复杂, 其内在的非线性系统中的各种模式更趋于紧密的相互依赖和相互耦合的状态, 且伴有不确定的噪声存在, 这类复杂系统, 一般来讲都是无法建立起解析形式的数学模型的, 常以混沌时序为其主要的表现形式, 噪声成分和系统的本质特征总是相互缠绕, 只是有主次之分罢了, 混沌时序中的噪声水平的高低自然对混沌时序的建模及其预测工作带来了极大的难度, 有时甚至使得对基本不含有噪声的预测能力较好的非线性模型预测的精度大大降低, 因此, 如何将时序数据所对应原复杂系统的内在本质特征与噪声成分相互剥离, 剔除时序数据内在所含有的噪声成分以及在此基础上的一系列预测工作就是一件非常重要, 但又非常复杂的庞大系列研究工作了。

近 20 年来, 基于混沌时序的除噪、重构及其预测技术的研究取得了很多有益的结果^[1-12], Albano^[1] 提出了奇异谱分解的基本思想, 这对于混沌时序除噪有着极其重要的作用。Martin^[2] 研究了存在噪声下混沌时序的相空间重构问题, Yu^[3] 研究了含有噪声的数据的本质特征的估计方法, Muller^[4] 提出了一种含有噪声数据的建模方法, Degli^[5] 研究了时序中含有噪

* 收稿日期: 2004_05_08; 修订日期: 2005_09_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70271071, 19990510, D0200201)

作者简介: 马军海(1964—), 男, 山东青岛人, 教授, 博士, 博士生导师, 已在国内外核心期刊发表论文 40 篇(联系人, Tel: + 86_22_81782238; E_mail: Lzqsly@126.com);

陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博士生导师, 俄罗斯科学院外籍院士

声的比例问题, Yu^[6]研究了含有噪声时序混沌的判定问题, 这一系列研究工作, 使得混沌数据的除噪技术逐步的得以发展。

但就目前的研究状况而言, 对含有噪声的混沌时序除噪后的建模及其预测的研究工作目前无论从理论上还是从实际的应用上都趋于探索阶段。

1 混沌数据除噪的理论基础

设动力系统实测数据为: $\{x_i, i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ 是一个 d 维复杂系统的某一状态输出。嵌入维数为 m , 时滞为 τ , 建立一个“ (m, τ) ”窗口, 它使时间序列 x_i 中的 m 维中的所有元素同时出现, 当时间序列顺此移过窗口时, 可得一个 m 维状态矢量:

$$Y_i = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}]^T, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_m, \quad (1)$$

这里 N_m 为重构矢量的个数, 其满足: $N_m = N - (m-1)\tau$, 这种从序列 x_i 中获得状态矢量的方法称为嵌入法, 由矢量 Y_i 构成的空间称为系统的伪相空间, 伪相图可理解为原系统的状态变化在值域空间中的投影。

Takens 证明了在存在噪声的情况下重构相空间时 m 应满足: $m \geq 2[d] + 1$, 此时伪相空间和系统的相空间微分同胚, 即拓扑等价, 它们之间有着定性意义上的完全相同的动力学特征。在相空间重构的过程中 τ 的取值的大小起着非常重要的作用。应在某一合适的范围内, 否则有可能使重构的相空间中的轨线龟缩在同一条直线的周围; 也可能使得所重构的系统相空间中轨线出现间断现象, 使得简单的几何图线看起来复杂化, 使得重构的系统相图失真。在存在噪声的情况下, 可将原始数据按照如下方式进行重构, 定义:

$$X = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \{Y_i\} = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \{Y_1^T, Y_2^T, \dots, Y_{N_m}^T\}, \quad (2)$$

X 是一个 $N_m \times m$ 的秩为 t 的长方形 Toeplitz 矩阵

$$\text{rank}(X) = \min\{m, N_m\} = t, \quad (3)$$

可证明 X 可分解为:

$$X = V_{N_m \times m} S_{m \times m} U_{m \times m}^T, \quad (4)$$

$U \in m \times m$ 和 $V \in N_m \times m$ 为正交矩阵,

$$\begin{cases} S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_t, \sigma_{t+1}, \dots, \sigma_m) \text{ 且 } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_t > 0, \\ \sigma_{t+1} \approx \sigma_{t+2} \approx \dots \approx \sigma_m \approx 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$B = X^T X = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} Y_i Y_i^T =$$

$$\frac{1}{N_m} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_m} x_i x_i & \sum_{i=1}^{N_m} x_i x_{i+1} & \sum_{i=1}^{N_m} x_i x_{i+2} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} x_i x_{i+m-1} \\ \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+1} x_i & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+1} x_{i+1} & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+1} x_{i+2} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+1} x_{i+m-1} \\ \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+2} x_i & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+2} x_{i+1} & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+2} x_{i+2} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+2} x_{i+m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+m-1} x_i & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+m-1} x_{i+1} & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+m-1} x_{i+2} & \dots & \sum_{i=1}^{N_m} x_{i+m-1} x_{i+m-1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中 B 为 t 阶实对称矩阵, 它的特征向量可以确定其嵌入空间 R^m 的一组完全正交基:

$$b_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_m} x^k(i) x^l(i), \quad \text{rank}(X) = \text{rank}(B) = t < m, \quad (7)$$

假设 $x^k(i) = x(i+k-1)$, $i = 1, 2, 3, \dots; N_m = N - (m-1)$ 具有零均值, $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

由于 $S_{m \times m}^2$ 为对角矩阵, 可求得其特征值及特征向量:

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_t^2 > \sigma_{t+1}^2 = \dots = \sigma_m^2 = 0, \quad (8)$$

将矩阵 B 的特征值 $\{\sigma_j, j = 1, 2, 3, \dots, m\}$ 按其大小进行排列, 绘出奇异谱曲线 $i \sim L_j$, 其中

$$\left[L_j = |\sigma_j| \sqrt{\sum_{j=1}^m |\sigma_j|} \right],$$

利用奇异谱曲线可以达到混沌数据降噪的目的, 如果数据中含有噪声成分, 则奇异谱曲线的右下方向将出现相应的噪声平台, 而奇异谱曲线的左上方向是由数据中的确定性信息所产生的, 其由几个较大特征值所构成:

$$\xi^k = \sum_{i=1}^m u_{ik} x^l(i), \quad (9)$$

这里 $U = \{u_{ij}\}$ 为正交矩阵, $k = 1, 2, 3, \dots, t$ 为信号部分; $k = t+1, \dots, m$ 为噪声部分. 这样, 信号部分可被重构为:

$$x_i^k = \sum_{l=1}^t u_{kl} \xi_l^k, \quad (10)$$

原时序可被重构为:

$$x_i^k = \sum_{l=1}^m u_{kl} \xi_l^k, \quad (11)$$

这种方法称为时序数据的奇异谱分析, 在对数据进行奇异谱分解的同时所得到的 t 可以作为确定时序数据有效嵌入空间的维数 m 的依据 (为明显大于零的本征值的个数). 这一数值可作为确立系统混沌模型阶数的重要依据.

2 混沌时序的内在复杂性探讨

为了更好的探知复杂系统 (1) 在上述各参数变化条件下的内在复杂性, 可采用关联维数的方法同时计算在不同的参数组合条件下系统的分维数, 其关联积分采用 (12) 式 (式中 w 是为消除噪声所采用的值):

$$C(r, N, w, \tau) = \frac{2}{(N-w+1)(N-w)} \sum_{N=w}^n \sum_{i=1}^{N-n} H\left\{r - |V_{i+n} - V_i|\right\}, \quad (12)$$

分维数的近似估式采用 (13) 式:

$$D_2(m) = \frac{l \sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \log_2 C_m(r_i) - \sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \sum_{i=1}^l \log_2 C_m(r_i)}{l \sum_{i=1}^l (\log_2(r_i))^2 - \left[\sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \right]^2}, \quad (13)$$

同时采用小扰动量的计算方法 (16) 式计算不同的参数组合条件下系统的最大 Liapunov 指数, 设

$$x = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}) \in R^m, \quad i = 1, 2, \dots, T, \quad (14)$$

其中 $T = N - (m-1)\tau$. 在重构采样数据的相空间后, 定义给定轨道 x_j 与其邻近轨道 x_i 之间的距离为:

$$d_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \Delta t) = |x_{j+m-\Delta t} - x_{i+m-\Delta t}|, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in U_j$, U_j 是以给定轨道 \mathbf{x}_j 为中心的 ε_j 邻域。计算

$$S(\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \ln \left(\frac{1}{|U_j|} \sum_{i \in U_j} d_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \Delta t) \right), \quad (16)$$

当 $S(\Delta t)$ 随 Δt 线性增加时, 其估算的斜率值就是最大 Liapunov 指数 λ 。

3 混沌时序的非线性模型

混沌时间序列预测的基础是相空间的重构理论。假设由(11)式所重构的时序数据可重新表述为: $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ 。

我们要构造的非线性模型可以表达为:

$$\begin{aligned} X_n = & a_{11}X_{n-1} + a_{12}X_{n-1}^2 + \dots + a_{1S1}X_{n-1}^{S1} + a_{21}X_{n-2} + a_{22}X_{n-2}^2 + \dots + a_{2S2}X_{n-2}^{S2} + \\ & \dots + a_{m1}X_{n-m} + a_{m2}X_{n-m}^2 + \dots + a_{mSd}X_{n-m}^{Sd} + b_{21}X_{n-2}X_{n-1} + b_{31}X_{n-3}X_{n-1} + \\ & b_{32}X_{n-3}X_{n-2} + b_{41}X_{n-4}X_{n-1} + b_{42}X_{n-4}X_{n-2} + b_{43}X_{n-4}X_{n-3} + \\ & \dots + b_{m1}X_{n-m}X_{n-1} + b_{m2}X_{n-m}X_{n-2} + \dots + b_{mm-1}X_{n-m}X_{n-m+1} \end{aligned} \quad (17)$$

是一个递归模型, 其中 m 为嵌入维数, a_{ij} 、 b_{ij} 为自变量的系数, Sd 为每一自变量的最高次幂。该模型考虑了各个自变量的高次项和 2 次交叉项。用已知的某一时间段的实验数据, 按

$$\min J = \sum \sum (X_i - X_j)^2, \quad (18)$$

确定模型中的系数。然后用该模型就可以预测这一时间段之后的值。

4 数据结果

取两组从非线性混沌模型上所获取的混沌数据。

第 1 组数据 4 096 点其相图如图 1(a) 所示, 第 2 组数据 4 096 点其相图如图 1(b) 所示。根据(14)~(16)式小数据量算法算得的第 1 组数据 4 096 点的 Liapunov 指数图如图 1(c) 所示, 其最大 Liapunov 指数 $\lambda = 4.3199E-4$, 分维数图如图 1(d) 所示, 算得其分维数 $D = 1.35165$, 从计算结果来看在此种状况下, 时序数据是混沌的。

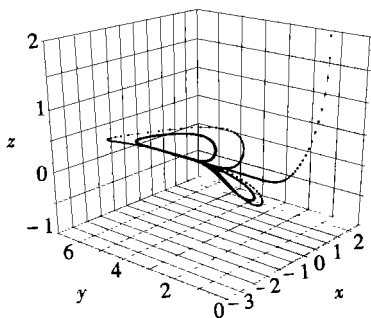


图 1(a) 第 1 组数据的相图

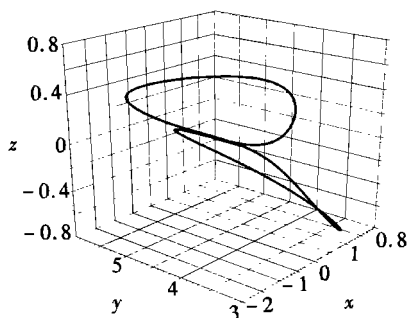


图 1(b) 第 2 组数据的相图

根据(14)式~(16)式的小数据量算法算得的第 2 组数据 4 096 点的 Liapunov 指数图如图 2(a) 所示, 其最大 Liapunov 指数 $\lambda = 6.77077E-5$, 分维数图如图 2(b) 所示, 算得其分维数 $D = 1.29203$, 从计算结果来看在此种状况下, 时序数据是混沌的。

根据(1)式~(11)式算得第 1 组数据在 2 个最大的本征值上重构的伪相图如图 3(a) 所示, 在前 3 个最大的本征值上重构的伪相图如图 3(b) 所示; 根据(1)式~(11)式算得第 2 组数据在

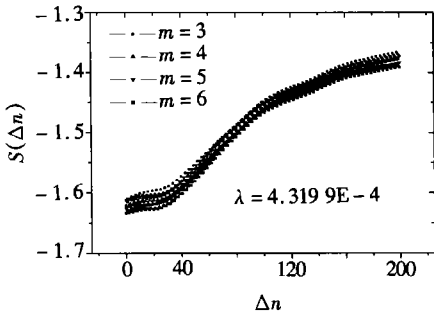


图 1(c) 第 1 组数据的最大 Liapunov 指数图

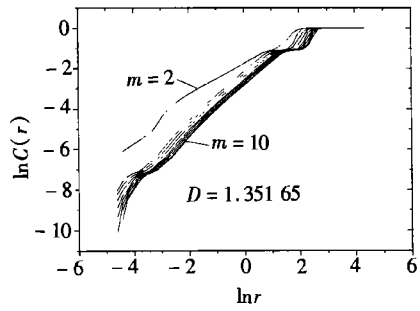


图 1(d) 第 1 组数据的维数 $\ln r \sim \ln C(r)$ 图

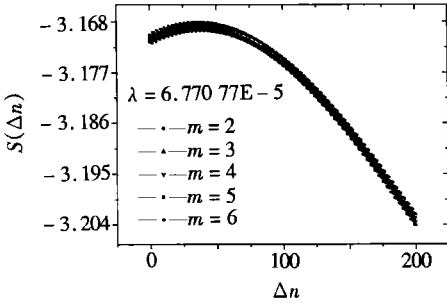


图 2(a) 第 2 组数据的最大 Liapunov 指数图

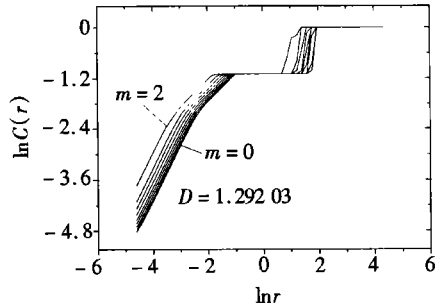


图 2(b) 第 2 组数据的维数 $\ln r \sim \ln C(r)$ 图

2 个最大的本征值上重构的伪相图如图 4(a) 所示, 在第 2 和第 3 大的本征值上重构的伪相图如图 4(b) 所示。

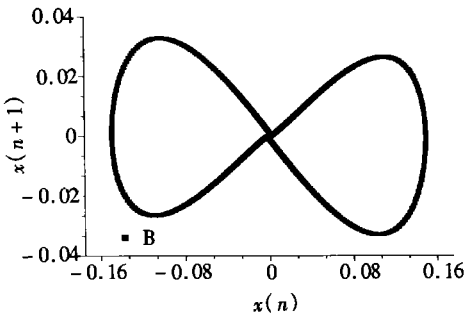


图 3(a) $N = 2048, \tau = 2$ 时在 2 个最大的本征值上重构的第 1 组数据的伪相图

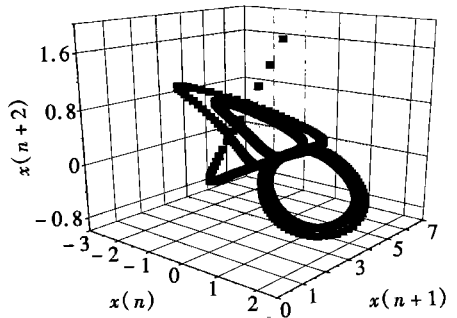


图 3(b) $N = 2048, \tau = 2$ 时在前 3 个最大的本征值上重构的第 1 组数据的伪相图

采用(17)式, 根据(1)式~(11)式算得第 1 组数据的阶数为 5, 取模型样本值为 60, 取(17)式中 $n-1, n-2, n-3$ 项的最高次数为 2, $n-4, n-5$ 项的最高次数为 3, 数据预测的相对误差超过 12% 时则更换新的预测模型样本值, 并重新计算预测模型系数, 共连续预测了 83 点, 重新计算模型系数 7 次, 给出了第一次的模型系数计算值。数据的预测值及数据真值($x(n), x(n+1), x(n+2)$) 相图如图 5 所示, 预测的相对误差如图 6 所示。作者对第 2 组数据进行了建模和预测研究工作, 得到的结论基本上和第 1 组数据的结论类似。

第 1 组数据的第一次模型系数计算值:

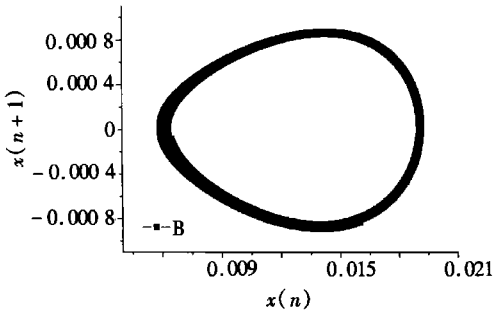


图 4(a) $N = 2\ 048$, $\tau = 2$ 时在 2 个最大的本征值上重构的第 2 组数据的伪相图

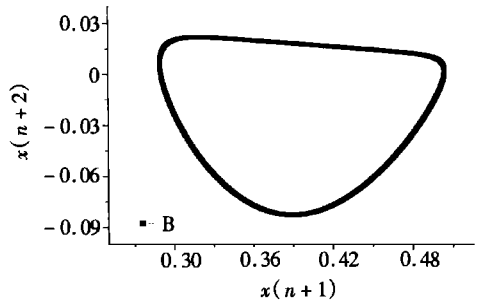


图 4(b) $N = 2\ 048$, $\tau = 2$ 时在第 2 和第 3 大的本征值上重构的第 2 组数据的伪相图

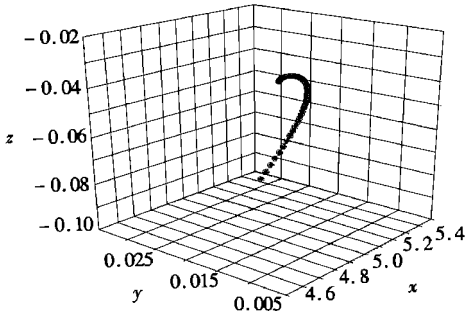


图 5 第 1 组数据真值及其预测值的相图 (\circ 为数据真值, Δ 为数据预测值)

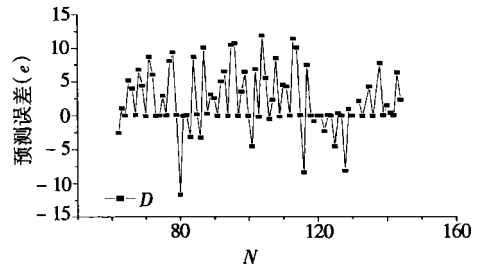


图 6 第 1 组数据的预测相对误差(共 83 点其中最大的相对误差为 11.81%, 最小的为 0%)

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -0.206\ 613, & a_{12} &= 0.186\ 112, & a_{21} &= -0.041\ 713, & a_{22} &= 0.010\ 676, \\
 a_{31} &= 1.031\ 123, & a_{32} &= -0.006\ 528, & a_{41} &= 0.093\ 345, & a_{42} &= -0.146\ 473, \\
 a_{43} &= -0.004\ 328, & a_{51} &= 0.043\ 973, & a_{52} &= -0.024\ 987, & a_{53} &= 0.000\ 698, \\
 b_{21} &= 0.058\ 194, & b_{31} &= -0.129\ 128, & b_{32} &= 0.054\ 217, & b_{41} &= 0.003\ 260, \\
 b_{42} &= 0.009\ 480, & b_{43} &= 0.043\ 574, & b_{51} &= -0.088\ 533, & b_{52} &= 0.011\ 227, \\
 b_{53} &= 0.054\ 845, & b_{54} &= -0.030\ 190
 \end{aligned}$$

5 结 论

用混沌数据的奇异谱分解来确定混沌预测模型的有效嵌入空间维数是比较有效的。对除噪后的混沌数据进行连续的预测其相对误差较小。

本方法对低水平的噪声数据相对有效, 其是否适用于高噪声水平的混沌数据还有待于进一步研究。

[参 考 文 献]

- [1] Albano A M, Muench J M, Schwartz C, et al. Singular value decomposition and the Grassberger-Proccaccia algorithm[J]. Phys Rev A, 1988, 38(6): 3017—3026.
- [2] Martin Casdagli, Stephen Eubank, Doyné Farmer J. State space reconstruction in the presence of noise[J]. Phys Ser D, 1991, 51(10): 52—98.
- [3] YU De_jin, Michael Small, Robert G Harrison. Efficient implementation of the Gaussian kernel algo-

- rithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data[J]. Phys Rev Ser E, 2000, **61**(4): 3750—3756.
- [4] Muller T G, Timmer J. Fitting parameters in partial differential equations from partially observed noisy data[J]. Physica Ser D, 2002, **171**(5): 1—7.
- [5] Degli Esposti Boschi C, Ortega G J, Louis E. Discriminating dynamical from additive noise in the Van der Pol oscillator[J]. Physica Ser D, 2002, **171**(5): 8—18.
- [6] Yu A, Kravtsov E D. Surovyatkin nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification[J]. Physics Letters Ser A, 2003, **319**(10): 348—351.
- [7] CAO Liang_yue, HONG Yi_guang, FANG Hai_ping, et al. Predicting chaotic timeseries with wavelet networks[J]. Phys Ser D, 1995, **85**(8): 225—238.
- [8] Castillo E, Gutierrez J M. Nonlinear time series modeling and prediction using functional networks. extracting information masked by chaos[J]. Phys Lett Ser A, 1998, **244**(5): 71—84.
- [9] Christian Schroer G, Tim Sauer, Edward Ott, et al. Predicting chaotic most of the time from embeddings with self_intersections[J]. Phys Rev Lett, 1998, **80**(7): 1410—1412.
- [10] 马军海, 陈予恕, 刘曾荣. 动力系统实测数据的非线性混沌模型重构[J]. 应用数学和力学. 1999, **20**(11): 1128—1134.
- [11] Kugiumtzis D, Lingirde O C, Christophersen N. Regularized local linear prediction of chaotic time-series[J]. Phys Ser D, 1998, **112**(6): 344—360.
- [12] Berndt Hlgram, Kevin Judd, Alistair Mees. Modelling the dynamics of nonlinear timeseries using canonical variate analysis[J]. Phys Ser D, 2002, **170**(4): 103—117.

Prediction Techniques of Chaotic Time Series and Its Applications at Low Noise Level

MA Jun_hai^{1, 2}, WANG Zhi_qiang¹, CHEN Yu_shu³

(1. Management School of Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. Tianjin University of Finance & Economics, Tianjin 300222, P. R. China;

3. Mechanics Department of Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Not only the noise reduction methods of chaotic time series with noise and its reconstruction techniques were studied, but also prediction techniques of chaotic time series and its applications were discussed based on chaotic data noise reduction. First the phase space of chaotic time series was decomposed to range space and null noise space. Secondly original chaotic time series was reconstructed in range space. Lastly on the basis of the above, the order of the nonlinear model was established and the nonlinear model was made use of to predict some research. The result indicates that the nonlinear model has very strong ability of approximation function, and Chaos prediction method has certain tutorial significance to the practical problems.

Key words: chaotic time series; noise reduction; essential characteristic extraction; Nonlinear model; predict technology