 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1507_05

一类具有边界摄动的非线性非局部反应扩散方程奇摄动问题

莫嘉琪[1,2], 王 辉[3], 林万涛[4]

(1. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241000;
2. 上海高校计算科学 E_研究院 上海交通大学研究所, 上海 200240;
3. 中国气象科学研究院, 北京 100081;
4. 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室,
中国科学院 大气物理研究所, 北京 100029)

(我刊原编委江福汝推荐)

摘要: 研究了一类具有边界摄动的非线性非局部反应扩散方程奇摄动 Robin 初始边值问题 在适当的条件下, 首先求出了原问题的外部解, 然后利用伸长变量、合成展开法和幂级数展开理论构造出解的初始层项, 并由此得到解的形式渐近展开式 最后利用微分不等式理论, 讨论了问题解的渐近性态并导出了几个有关的不等式, 讨论了原问题解的存在唯一性和解的一致有效的渐近估计式

关 键 词: 非线性; 反应扩散; 奇摄动
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

非线性奇异摄动问题在国际学术界的研究中是一个十分关注的对象[1] 近 10 年来许多近似方法被发展, 包括平均法、边界层法、渐近展开法和多重尺度法等 许多学者, 如 Hamouda[2], Bell 和 Deng[3], do Nascimento[4] 等做了许多工作 莫嘉琪等利用微分不等式等方法也讨论了一些非线性奇摄动问题[5~9]

今考虑如下非线性非局部奇摄动问题:

$$\frac{u}{t} - Lu = f(x, y, u, T_1 u, \ ), \qquad (t, x, y) \quad (0, T] \qquad , \tag{1}$$

$$Bu \quad \frac{u}{r} + a(x, y) u = g(x, y, \ ) \quad g(\ , \ ),$$

$$a(x, y) \quad a_0 > 0, \qquad : r = r(\ , \ ), \tag{2}$$

$$u = h(x, y, \ ), \qquad t = 0, \tag{3}$$

收稿日期: 2003_09_15; 修订日期: 2005_04_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90111011; 10471039) ; 上海市教育委员会 E_研究院建设计划资助项目(N. E03004) ; 浙江省自然科学基金资助项目(Y604127)
作者简介: 莫嘉琪(1937) , 男, 浙江德清人, 教授(联系人. Tel: + 86_553_3869642; + 86_572_2321510; E_mail: mojiaqi@ mail. ahnu. edu. cn)

其中

$$L = a_{11}\frac{{}^2}{x^2} + 2a_{12}\frac{{}^2}{x\ y} + a_{22}\frac{{}^2}{y^2},$$

$$T_1 u = \quad K(x, y)u(t, x, y, \ )\mathrm{d}y,$$

而　为正的小参数, L 为一致椭圆型算子, $(r, \ )$　　$= \{(r, \ ) \mid 0 \quad r < r(\ , \ )\}$ 为在 R^2 中的有界凸区域,　　$: r = r(\ , \ )$ 为具有 C^{1+} 阶(　　$(0, 1)$ 为H　lder 指数), 关于　的边界　问题(1) ~ (3) 是一个反应扩散初始边值问题　本文是涉及一类具有摄动边界的非线性非局部奇摄动问题　我们构造解的渐近展开式, 并讨论其渐近性态　假设:

[H$_1$]　$_{jk}$、a、K_1、g 和 h 关于其变元的 1 阶偏导数在相应的区域内为H　lder 连续函数　g、h 关于　为充分光滑的函数;

[H$_2$] $f(x, y, u, T_1 u, \ )$ 在相应的区域内关于 x 和 y 为H　lder 连续函数, 关于 u、$T_1 u$ 为 Lipschitz 连续函数, 关于　为充分光滑的函数, 且 $f_u(x, y, u, T_1 u, \ )\quad -c_1\quad 0$, $f_{T_1 u}(x, y, u, T_1 u, \ )\quad -d_1\quad 0$, 其中 c_1 和 d_1 为正常数, 而 $c_1 + \ d_1 > \ 0$

1　构造形式渐近解

现构造问题(1) ~ (3) 解的形式渐近展开式　原问题的退化问题为

$$-Lu = f(x, y, u, T_1 u, 0), \qquad x \quad {}_0, \tag{4}$$

$$Bu = g(x, y, 0), \qquad x \quad {}_0 \tag{5}$$

我们还需假设

[H$_3$] 问题(4)、(5) 在　$_0($　　$)$ 中存在唯一的解 U_0　C^{1+}, $0 <\quad < 1$

设原问题(1) ~ (3) 的外部解 U 的形式展开式为

$$U \sim \sum_{i=0} U_i \ {}^i \tag{6}$$

将式(6) 代入式(1) 、(2) , 按　展开 f 和 g, 分别使　的同次幂项的系数相等, 得到

$$-LU_i + \ U_{i-1} = f_u(x, y, U_0, T_1 U_0, 0)U_i + f_{T_1 u}(x, y, U_0, T_1 U_0, 0)T_1 U_i + F_i, \tag{7}$$

$$BU_i = G_i, \qquad (x, y) \quad {}_0, \tag{8}$$

其中 F_i 和 G_i 为关于 $U_k(k \quad i-1)$ 的已知函数　由上述线性问题(7)、(8), 可依次求出 U_i　再由式(6), 我们便得到原问题的外部解 U　但是, 它未必满足初始条件(3), 故尚需构造初始层校正项 V

再引入伸长变量[1]　$= t/$　且令原问题(1) ~ (3) 的解 u 为

$$u = U(x, y, \ ) + V(\ , x, y, \ ) \tag{9}$$

将式(9) 代入式(1) ~ (3), 得到

$$V - LV = f(x, y, U + V, T_1(U + V), \ ) - f(x, y, U, T_1 U, \ ) \quad F, \tag{10}$$

$$BV = g(x, y, \ ) - g(x, y, 0) \quad G, \qquad (x, y) \quad {}_0, \tag{11}$$

$$V(0, x, y, \ ) = h(x, y, \ ) - U(x, y, \ ) \tag{12}$$

令

$$V \sim \sum_{i=0} v_i(\ , x) \ {}^i \tag{13}$$

将式(9) 、式(6) 和式(13) 代入式(10) ~ 式(12) , 按　展开非线性项, 并使　的同次幂的系数相

等, 得到

$$(v_0) - Lv_0 = f(x, y, U_0 + v_0, T_1(U_0 + v_0), 0) - f(x, y, U_0, T_1 U_0, 0), \tag{14}$$

$$Bv_0 = g(x, y, 0) - g(x, y, 0), \quad (x, y) \quad 0, \tag{15}$$

$$v_0(0, x, y) = h(x, y, 0) - U_0(x, y), \tag{16}$$

$$(v_i) - Lv_i - f_u(x, y, U_0 + v_0, T_1(U_0 + v_0), 0)v_i + f_{T_1 u}(x, y, U_0 + v_0, T_1(U_0 + v_0), 0)v_i + F_i, \quad i = 1, 2, \quad , \tag{17}$$

$$Bv_i = G_i, \quad (x, y) \quad 0, \ i = 1, 2, \quad , \tag{18}$$

$$v_i(0, x, y) = h_i - U_i(x, y), \quad i = 1, 2, \quad , \tag{19}$$

其中 F_i、G_i 和 $h_i(i = 1, 2, \ )$ 为逐次已知的函数 由问题(14) ~ (16) 和式(17) ~ (19), 我们能得到 v_0 和 $v_i(i = 1, 2, \ )$ 这时, 我们便可构造原问题(1) ~ (3) 解 u 的如下形式渐近展开式:

$$u \sim \sum_{i=0} [U_i + v_i] \ ^i, \quad 0 < \quad 1 \tag{20}$$

2 主 要 结 果

现证上述为一致有效的渐近展开式

定理 在假设[H1] ~ [H3] 下, 非线性非局部反应扩散奇摄动问题式(1) ~ (3) 存在唯一的解 u, 并在 $(t, x, y) \quad [0, T] \quad (\quad + \quad)$ 上成立一致有效的渐近展开式(20)

证明 首先构造辅助函数 和 :

$$= Y_m - \quad ^{m+1}, \quad = Y_m + \quad ^{m+1}, \tag{21}$$

其中 为足够大的正常数, 它将在下面决定, 并且 $Y_m \quad \sum_{i=0}^{m} [U_i + v_i] \ ^i$

显然, 我们有

$$, \quad (t, x, y) \quad [0, T] \quad (\quad + \quad), \tag{22}$$

且存在一个正常数 M_1, 对于 x , 成立

$$B \quad BY_m - B[\quad ^{m+1}] = g(x, y, 0) + \sum_{i=1}^{m} G_i \ ^i + \sum_{i=1}^{m} G_i \ ^i - a(x, y) \quad ^{m+1} \quad g(x, y, \ ) + M_1 \ ^{m+1} - a_0 \quad ^{m+1} = g(x, y, \ ) + (M_1 - a_0 \ ) \ ^{m+1}$$

选择 M_1 / a_0, 得

$$B \quad g(x, y, \ ), \quad x \tag{23}$$

同理可得

$$B \quad g(x, y, \ , \ ), \quad x \tag{24}$$

由假设, 存在正常数 M_2, 使得

$$(0, x, y, \ ) \quad \sum_{i=0}^{m} U_i \ ^i + [h(x, y, 0) - U_0(x, y)] + \sum_{i=1}^{m} [h_i - U_i(x, y)] \ ^i - \quad ^{m+1} \quad h(x, y, \ ) + (M_2 - \ ) \ ^{m+1}$$

选择 M_2, 得到 $(0, x, y, \ ) \quad h(x, y, \ ), \ x$ 同理, 对于 M_2, 也有 $(0, x, y, \ ) \quad h(x, y, \ ), \ x$ 即

$$(0, x, y, \ ) \quad h(x, y, \ ) \quad (0, x, y, \ ), \quad x \tag{25}$$

现证

$$_t - L \ - f(x, y, \ , T_1 \ , \ ) \quad 0, \quad (t, x, y) \quad (0, T) \quad , \tag{26}$$

$$_t - L \ - f(x, y, \ , T_1 \ , \ ) \quad 0, \quad (t, x, y) \quad (0, T) \tag{27}$$

由假设, 对于足够小的 $\ , 0 < \ \ _1$, 存在正常数 M_3, 使得

$$\begin{aligned}
&_t - L \ - f(x, y, \ , T_1 \ , \ ) \quad - [LU_0 + f(x, y, U_0, T_1 U_0, 0)] - \\
&\sum_{i=1}^{m} [LU_i - \ U_{i-1} + f_u(x, y, U_0, T_1 U_0, 0) U_i + \\
&f_{T_1 u}(x, y, U_0, T_1 U_0, 0) T_1 U_i + \ F_i] \ ^i + \\
&[(v_0) \ - Lv_0 - f(x, y, U_0 + \ V_0, T_1(U_0 + \ V_0), 0) + f(x, y, U_0, T_1 U_0, 0)] + \\
&\sum_{i=1}^{m} [(v_i) \ - Lv_i - f_u(x, y, U_0 + \ V_0, T_1(U_0 + \ V_0), 0) v_i + \\
&f_{T_1 u}(x, y, U_0 + \ V_0, T_1(U_0 + \ V_0), 0) T_1 v_i + \ F_i] \ ^i + \\
&M_3 \ ^{m+1} - (c_1 + \ d_1) \ ^{m+1} \\
&(M_3 - (c_1 + \ d_1) \ ) \ ^{m+1},
\end{aligned}$$

选择 $M_3 / (c_1 + \ d_1)$, 这时我们便证明了不等式(26) 同理可证不等式(27) 于是由式(22)~ 式(27), 可得

$$(t, x, \ ) \quad u(t, x, \ ) \quad (t, x, \ ),$$

$$(t, x, y, \ ) \quad [0, T] \quad (\quad + \quad) \quad [0, \ _1]$$

再由式(21), 我们便有

$$u = \sum_{i=0}^{m} [U_i + \ v_i] \ ^i + O(\ ^{m+1}), \quad 0 < \quad 1$$

定理证毕

[参 考 文 献]

[1] de Jager E M, JIANG Fu_ru. The Theory of Singular Perturbation [M]. Amsterdam: North_Holland Publishing Company, 1996.

[2] Hamouda M. Interior layer for second_order singular equations[J]. Applicable Analysis, 2002, **81**(2): 837 866.

[3] Bell D C, Deng B. Singular perturbation of N_front traveling waves in the Fitzhugh_Nagumo equations [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2003, **3**(4): 515 541.

[4] do Nascimento A S. Stable transition layers in a semilinear diffusion equation with spatial inhomogeneties in N_dimensional domains[J]. Journal of Differential Equations, 2003, **190**(1): 16 38.

[5] MO Jia_qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. Science in China, Ser A, 1989, **32**(11): 1306 1315.

[6] MO Jia_qi, Shao S. The singularly perturbed boundary value problems for higher_order semilinear elliptic equations[J]. Advances in Mathematics, 2001, **30**(2): 141 148.

[7] MO Jia_qi, OUYANG Cheng. A class of nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems

in unbounded domains[J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, **21**(1): 93 97.

[8] MO Jia_qi. A class of nonlocal singularly perturbed problems for nonlinear hyperbolic differential equation[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001, **17**(4): 469 474.

[9] MO Jia_qi, ZHU Jiang, WANG Hui. Asymptotic behavior of the shock solution for a class of nonlinear equations[J]. Progress in Natural Science, 2003, **13**(9): 768 770.

A Class of Nonlinear Nonlocal Singularly Perturbed Problems for Reaction Diffusion Equations With Boundary Perturbation

MO Jia_qi[1,2], WANG Hui[3], LIN Wan_tao[4]

(1. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, P. R. China;

2. Division of Computational Science, E_Institute of Shanghai Universities, at Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P. R. China;

3. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, P. R. China;

4. LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P. R. China)

Abstract: A class of nonlinear nonlocal for singularly perturbed Robin initial boundary value problems for reaction diffusion equations with boundary perturbation is considered. Under suitable conditions, first, the outer solution of the original problem was obtained. Secondly, using the stretched variable, the composing expansion method and the expanding theory of power series the initial layer was constructed. Finally, using the theory of differential inequalities the asymptotic behavior of solution for the initial boundary value problems was studied, and educing some relational inequalities the existence and uniqueness of solution for the original problem and the uniformly valid asymptotic estimation were discussed.

Key words: nonlinear; reaction diffusion; singular perturbation