应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1453_06

结构刚度函数识别的一个途径*

王德明[1], 盖秉政[2]

(1. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001;
2. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

(马兴瑞推荐)

摘要: 为了计算结构的刚度函数, 将结构振动微分方程分解为关于已知的原始刚度函数的微分方程和关于未知待求的刚度函数的第一类 Fredholm 积分方程, 利用 p 个光滑因子进行外插值的求解方法, 数值计算当光滑因子为零时的积分方程的稳定解· 从而可得到结构的刚度函数· 通过数值模拟说明方法是可行的·

关 键 词: 结构动力学; 反问题; 光滑化
中图分类号: O241.8 文献标识码: A

引 言

结构刚度函数的识别问题, 属于结构动力学反问题· 即从系统的振动微分方程和输入、输出条件去确定方程中的未知刚度函数· 在实际工程中可直接从振动的微分方程中计算刚度函数[1], 即从微分方程和附加的条件(测量数据) , 借助于 Fourier(Laplace) 变换, 以及一个特殊的迭代, 将问题的关键转化为关于刚度分布函数的第一类 Fredholm 积分方程的求解问题· 数学中, 我们称其为微分方程反问题·

第一类 Fredholm 积分方程是不适定的数学问题, 即数据的微小变化可引起解的很大改变, 只有对解加进了适当的先验约束条件时, 才可以得到稳定的、满足这个约束条件的近似解· 以往的方法就是所谓的光滑化方法[1,2]和正则化方法[3], 可以取得较好的效果· 但该类方法中的不足是必须选取合适的光滑因子(或正则因子) · 不同的光滑因子得到结果是有差别的, 而我们又没有确定合适的光滑因子的准则, 所以, 在实际应用时受到了限制·

事实上, 用光滑化方法求解第一类 Fredholm 积分方程, 当光滑因子不为零时, 得到的是稳定的近似解, 但实际的真解应该是光滑因子为零时的解· 为此, 本文提出利用 p 个光滑因子的结果进行外插值方法, 来得到当光滑因子为零时的稳定解· 通过模拟算例表明, 该方法是可行的和有效的·

1 理 论 方 法

为了方便说明理论方法, 考虑杆的轴向振动微分方程

* 收稿日期: 2004_05_25; 修订日期: 2005_08_02
作者简介: 王德明(1960—) , 男, 黑龙江人, 副教授, 硕士(联系人. Tel: + 86_451_86412470; E_mail: wangdeming@ hit. edu. cn) ·

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1; \tag{1}$$

边界条件和初始条件

$$u(0,t)=0;\ \frac{\partial}{\partial x}u(1,t)=f(t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=0;\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0, \tag{3}$$

其中, $K(x)$、$m(x)$ 分别为杆结构的刚度和质量分布函数, $u(x,t)$ 为杆结构在 t 时刻的振动位移函数•

为了计算刚度分布函数, 还需要一个附加条件, 我们取

$$u(1,t)=g(t), \tag{4}$$

对(1)~(4)式进行 Fourier 变换, 将时域问题变成频域问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)+\omega^2 m(x)V(x,\omega)=0, \tag{5}$$

$$V(0,\omega)=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(1,\omega)=F(\omega), \tag{6}$$

$$V(1,\omega)=G(\omega), \tag{7}$$

其中, $V(x,\omega)$ 为 $u(x,t)$ 的Fourier 变换; $F(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别为$f(t)$ 和 $g(t)$ 的Fourier 变换• 这里, 初始条件在变换过程中已经用到•

由于在实际工程设计中, 或在结构参数识别中, 原始的刚度分布函数总可以近似地给定[1], 所以设

$$K(x)=K_0(x)+k(x), \tag{8}$$

$$V(x,\omega)=V_0(x,\omega)+v(x,\omega), \tag{9}$$

其中, $K_0(x)$ 和 $V_0(x,\omega)$ 分别为原始的刚度分布函数和对应的位移分布函数; $k(x)$ 为 $K_0(x)$ 和 $K(x)$ 的差值, 即未知待求的刚度分布函数; $v(x,\omega)$ 为对应于 $k(x)$ 引起的位移函数的变化•

将(8)、(9)式代入(5)、(6)、(7)式, 并将含有 $k(x)$ 的项分离出来, 得到等价的微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K_0(x)\dfrac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}x}\right]+\omega^2 m(x)V_0(x,\omega)=0,\\[2ex] V_0(0,\omega)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_0(1,\omega)=F(\omega)\end{cases} \tag{10}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(K_0(x)+k(x))\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]+\omega^2 m(x)v(x,\omega)=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\dfrac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}x}\right],\\[2ex] v(0,\omega)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(1,\omega)=0\end{cases} \tag{11}$$

以及附加条件

$$v(1,\omega)=G(\omega)-V_0(1,\omega)• \tag{12}$$

这里, $K_0(x)$ 是已知的, 所以(10) 式为微分方程的正解问题, 即 $V_0(x,\omega)$ 可以从(10) 式中求解出来; 而 $k(x)$ 是未知待求的, 我们可以将(11) 式的两端积分$\int_1^x(\cdot)\,\mathrm{d}x$, 然后两端同乘$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_0(x,\omega)$ 再做积分$\int_0^1(\cdot)\,\mathrm{d}x$, 则利用(12) 式, 可将(11) 式等价地变为积分问题

$$\int_0^1 k(x)\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(V_0+v)\mathrm{d}x = -K_0(1)F(\omega)v(1,\omega)\cdot \tag{13}$$

这里, 用到了条件

$$k(0) = k(1) = 0, \tag{14}$$

即假设在两个端点上, 刚度分布函数 $K(x)$ 的值是已知的•

如果原始刚度函数 $K_0(x)$ 的精度比较高时, 例如故障诊断或参数识别问题[1], 则有 $|k(x)| \ll |K_0(x)|$, 进而有 $|\mathrm{d}v/\mathrm{d}x| \ll |\mathrm{d}V_0/\mathrm{d}x|$, 所以方程(13)式就变成

$$\int_0^1 k(x)\left(\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x = -K_0(1)F(\omega)v(1,\omega), \tag{15}$$

这里, (13) 和(15) 式中的 $v(1,\omega)$ 均为附加条件(12) 式•

这样, (10) 式, (15) 式及(12) 式就构成了数值计算刚度分布函数 $K(x)$ 的数学模型• 问题的关键在于如何稳定地求解积分方程(15) 式•

2 积分方程的求解方法

考虑第一类 Fredholm 积分方程[2]

$$\int_a^b A(x,y)f(x)\mathrm{d}x = g(y), \qquad -\infty < y < +\infty\cdot \tag{16}$$

其中, $f(x)$ 满足边界条件

$$f(a) = f(b) = 0\cdot \tag{17}$$

取复化梯形公式进行离散化有

$$\boldsymbol{Af} = \boldsymbol{g}, \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}
&h = (b-a)/n,\ x_i = a+ih, && i = 0,1,2,\cdots,n;\\
&\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n-1},\ a_{ji} = hA(x_i,y_j), && i = 1,2,\cdots,n-1;\ j = 1,2,\cdots,m;\\
&\boldsymbol{f} = (f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})^{\mathrm{T}},\ f_i = f(x_i), && i = 1,2,\cdots,n-1;\\
&\boldsymbol{g} = (g_1,g_2,\cdots,g_m)^{\mathrm{T}},\ g_j = g(y_j), && j = 1,2,\cdots,m,
\end{aligned}$$

即(18) 式为线性代数方程组• 为了稳定求解(18) 式, 利用光滑化方法的思想[2], (18) 式可转化为下面的线性代数方程

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{H})\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{19}$$

其中, $\alpha \in (0,1)$ 称为光滑因子,

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & & & & & \\
-2 & 5 & -4 & 1 & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\
 & & & & & 1 & -2 & 1
\end{bmatrix}$$

称为光滑矩阵•

我们的目的是要得到 $\alpha = 0$ 时方程(19) 式的稳定解•

设 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < 1$, 且当 $\alpha = \alpha_i\ (i = 1,2,\cdots,p)$ 时(19) 式的解是稳定的(这

只需 α_1 不充分接近于 0 就可作到), 则对任意 $\alpha \in [0, 1)$, (19) 式的解可应用 Lagrange 插值, 有

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{p} f(\alpha_k) l_k(\alpha) + E(\alpha), \tag{20}$$

其中 $f(\alpha_k)$ 为对应于 $\alpha = \alpha_k (k = 1, 2, \cdots, p)$ 时(19) 式的解,

$$l_k(\alpha) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$$

为插值基函数,

$$E(\alpha) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi) \omega_p(\alpha), \qquad \xi \in (0, \alpha_p)$$

为截断误差,

$$\omega_p(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \cdots (\alpha - \alpha_p) \cdot$$

所以, 当 $\alpha = 0$ 时, 有

$$f(0) = \sum_{k=1}^{p} f(\alpha_k) l_k(0) + E(0), \tag{21}$$

其近似解为

$$f = \sum_{k=1}^{p} f(\alpha) l_k(0), \tag{22}$$

误差为

$$E(0) = \frac{(-1)^p}{p!} f^{(p)}(\xi) \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p, \tag{23}$$

这样, (22) 式就是积分方程(16) 式的稳定的近似解•

3 数值模拟和讨论

为了检验方法的可行性和适用性, 在没有实际测量数据的情况下, 本文采用以下步骤进行数值模拟研究:

1) 生成数据, 即先假设刚度分布函数 $K^*(x)$ 的准确形式, 利用(5) 和(6) 式, 数值计算出附加条件 $G(\omega) = V(1, \omega)$;

2) 利用已知的附加条件 $G(\omega)$, 根据(10) 式、(15) 式及(12) 式, 来求解刚度分布函数 $K(x) = K_0(x) + k(x)$;

3) 将 $K(x)$ 与 $K^*(x)$ 进行比较, 以说明方法的可行性•

这里, 求解积分方程(15) 式时, 是采用(18) ~ (22) 式中叙述的方法, 另外, 为说明方法的适用性, 生成数据时, 在 $G(\omega)$ 中加以人为的干扰噪声, 以模拟实测数据的测量误差• 以下的例子中, 均加以 0%~ 1% 的随机干扰噪声•

模拟算例中, 均取离散点

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n); \quad n = 10;$$

$$\omega_j = 2\pi j \qquad (j = 1, 2, \cdots, m); \quad m = n - 1 \cdot$$

例 1 精确的刚度函数取为

$$K^*(x) = 1 - 0.1\sin\pi x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \cdot$$

计算时取 $K_0(x) = 1$; 求解积分方程时取 $p = 2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.5$; 模拟结果如表 1 所示•

例 2 阶梯断面刚度的识别，即精确的刚度函数取为

$$K^*(x)=\begin{cases}0.8, & 0\leqslant x\leqslant 0.3,\\ 1.0, & 0.3<x\leqslant 0.6,\\ 1.2, & 0.6<x\leqslant 1\bullet\end{cases}$$

计算时取 $K_0(x)=1$; 求解积分方程时取 $p=2$, $\alpha_1=0.3$, $\alpha_2=0.5$; 模拟结果如表 2 所示•

例 3 含有缺陷结构的刚度识别，即精确的刚度函数取为

$$K^*(x)=1-\frac{0.1}{1+(x-0.5)^2}\bullet$$

计算时取 $K_0(x)=0.92$; 求解积分方程时取 $p=3$, $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.2$, $\alpha_3=0.3$; 模拟结果如表 3 所示•

表 1 例 1 的结果

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$K^*(x_i)$	1.000	0.969	0.941	0.919	0.905	0.900	0.905	0.919	0.941	0.969	1.000
$K(x_i)$	1.000	0.972	0.947	0.927	0.914	0.909	0.914	0.928	0.948	0.973	1.000

表 2 例 2 的结果

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$K^*(x_i)$	0.800	0.800	0.800	0.800	1.000	1.000	1.000	1.200	1.200	1.200	1.200
$K(x_i)$	0.800	0.796	0.789	0.901	1.053	0.991	1.110	1.199	1.204	1.208	1.200

表 3 例 3 的结果

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$K^*(x_i)$	0.920	0.914	0.908	0.904	0.901	0.900	0.901	0.904	0.908	0.914	0.920
$K(x_i)$	0.920	0.918	0.910	0.903	0.902	0.901	0.902	0.903	0.909	0.919	0.920

数值模拟研究的结果表明，本文的方法是可行的•

对于像由磨损、连接以及缺陷等故障引起的刚度变化的识别，$K_0(x)$ 可以根据实际结构给出，$k(x)$ 就是反映刚度变化的那部分，并且 $k(x)$ 与 $K_0(x)$ 相比是比较小的，所以可应用 (15) 式计算•

由于在求解第一类积分方程时是采用对 p 个光滑因子进行 Lagrange 外插值的思想求得的光滑因子 $\alpha=0$ 的近似值，所以，方法中对光滑因子的选取要求不高，只需 α_1 不充分接近于零，就可得到满意的结果• 并且，不同的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$，所得到的结果是非常接近的，说明方法是可靠的• 从而避免了以往的方法存在的问题，即不同的光滑因子会导致结果的较大差别•

[参 考 文 献]

[1] 王德明，刘家琦，黄文虎. 适用于结构故障诊断中的微分方程反问题方法[J]. 振动与冲击，1986，(3): 19—27.

[2] Phillips D L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind[J]. J ACM, 1962, (9): 84—97.

[3] Tikhonv A N, Arenin V Y. Solutions of Ill_Posed Problems[M]. New York: John Wiley & Sons, 1977.

Way to Determine the Stiffness Function of Structure

WANG De_ming[1], GAI Bing_zheng[2]

(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P.R.China;
2. Department of Spaceflight Engineering and Mechanics, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: For calculating the stiffness function of a structure, the differential equation of the vibration of the structure was divided into the differential equation on the original stiffness function that was known, and Fredholm integral equation of the first kind on the undetermined stiffness function that was unknown. And the stable solutions of the integral equation, when the smooth factor was equal to zero, was solved by the extrapolation with p smooth factors. So the stiffness function of the structure is obtained. Applied examples show that the method is feasible and effective.

Key words: structure dynamics; inverse problem; smooth method