

文章编号: 1000-0887(2005) 12-1425-11

# 浅水中污染物扩散的自适应有限元分析法

S 俄他那万那, P 德乔姆凡

(朱拉隆功大学 机械工程系, 曼谷 10330, 泰国)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 介绍浅水中污染物扩散分析中的有限元法 分析包括两个部分: 1) 流场速度、水面高度的计算; 2) 根据扩散模型计算污染物浓度场 联合使用了自适应网格技术以期提高解的精度, 同时减少计算时间和计算机内存的消耗 通过几个有已知解的实例验证了有限元公式和计算机程序 最后, 使用这种联合方法分析泰国 Chao Phraya 河附近海湾中的污染物扩散

**关键词:** 浅水; 污染物扩散; 自适应网格技术; 有限元法

**中图分类号:** O242.21; O368 **文献标识码:** A

## 引 言

当今泰国的工业和城市发展迅猛, 从电站、工厂和居民区排入河流的热/化学污染物已对水资源构成了威胁 政府需要证明污染物排放量对环境的影响不会超过标准规定, 工厂设计人员也必须考虑将污染的影响控制在标准规定以下 因此, 基于政府和工厂设计双重原因, 寻找可靠的方法来预测污染物流入江河时的分布, 引起了人们的强烈关注

浅水中污染物扩散特性取决于质量和动量守恒以及污染物迁移方程 假设不同深度的速度能用统一的沿深度的平均速度(作为二维沿深度平均的问题)表示 由于其控制微分方程是耦合的非线性方程, 对复杂的流动几何边界难以使用解析法 过去曾提出过多种计算方法解, 如有限差分法<sup>[1~5]</sup>、有限体积法<sup>[6,7]</sup>、有限元法<sup>[8~12]</sup> 其中有限元法能有效地处理复杂的几何边界, 因此得到了广泛的运用<sup>[12]</sup>

影响有限元法解精度的主要因素为单元的大小, 如在该模型中使用一群小单元, 可以得到高精度解, 但是, 单元数量的增加将使计算时间和计算机内存的消耗增大, 应用自适应网格技术<sup>[13,14]</sup>可以提高分析解的精度, 同时减少计算时间和内存消耗 该技术在解梯度变化大的区域生成小单元以期提高解的精度, 在其它解变化平缓的区域使用粗大单元

本文首先介绍有限元公式和解过程相应开发的计算机程序, 然后介绍自适应网格技术的基本思路 最后, 通过一些已知结论的简单例子来验证导出的有限元方程和开发的计算机程序, 并将它用于解决更加复杂的问题

收稿日期: 2004\_06\_10; 修订日期: 2005\_08\_08

基金项目: 泰国研究基金(TRF)资助项目

作者简介: P 德乔姆凡, 教授, 博士(联系人, Tel/ Fax: + 66 2\_218\_6621; E\_mail: fmepec@ eng. chula. ac. th).

本文原文为英文, 由海治译; 张禄坤校

# 1 流动模型

## 1.1 控制方程

通过沿深度方向上二维质量和动量守恒方程取平均, 得到浅水流控制方程为:

$$\frac{(Hu)}{x} + \frac{(Hv)}{y} = 0, \quad (1a)$$

$$\begin{cases} u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} = \left\{ \frac{x}{x} + \frac{yx}{y} \right\} - \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} u, \\ u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} = \left\{ \frac{xy}{x} + \frac{y}{y} \right\} - \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} v, \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} = \left\{ \frac{x}{x} + \frac{yx}{y} \right\} - \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} u, \\ u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} = \left\{ \frac{xy}{x} + \frac{y}{y} \right\} - \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} v, \end{cases} \quad (1c)$$

其中,  $H$  为水的总深度,  $u$ 、 $v$  分别为  $x$ 、 $y$  方向沿深度的平均速度分量;  $g$  为重力加速度;  $C$  为 Chezy 摩擦因数 应力分量  $x$ ,  $y$ ,  $xy$  和  $yx$  定义为:

$$x = 2 \frac{u}{x} - g, \quad (2a)$$

$$y = 2 \frac{v}{y} - g, \quad (2b)$$

$$xy = yx = \left[ \frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right], \quad (2c)$$

其中,  $\zeta$  为离平均水平面的水面高度, 如图 1 所示  $\nu$  为涡旋粘性系数

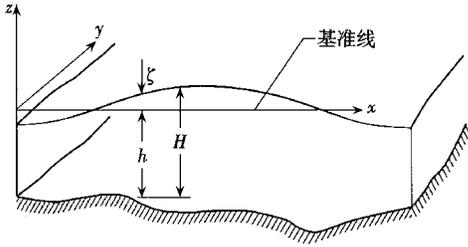


图 1 浅水问题记号

式(1a~ 1c)在适当的边界条件下可求解, 该条件为: 或为沿边界  $S_1$ 、某确定深度的平均速度分量:

$$u = u_1(x, y), \quad v = v_1(x, y), \quad (3)$$

或为沿边界  $S_2$  的附着摩擦力:

$$T_x = x l + yx m, \quad T_y = xy l + y m, \quad (4)$$

其中,  $l$  和  $m$  为边界法向单位矢量的方向余弦

## 1.2 有限元公式

在浅水流问题连续方程(1a)和两个动量方程(1b, c)中, 以沿深度的平均速度分量  $u$ 、 $v$  和水面高度  $\zeta$  为基本的未知量 这里使用了文献[15]提出的六节点三角形单元, 根据微分方程(1a~ 1c)中最高导数的阶数, 假定单元中速度分量分布采用二次插值, 对水面高度分布采用线性插值,

$$u(x, y) = N u, \quad v(x, y) = N v, \quad \zeta(x, y) = H \zeta, \quad (5)$$

其中,  $N = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\zeta = 1, 2, 3$ ;  $N$  和  $H$  分别为速度与水面高度的单元插值函数

将加权残差法<sup>[17]</sup>应用到动量方程(1b, c)和连续方程(1a)中, 得到有限元方程式

$$N_i \int_A \left[ (uu)_{,x} + (vu)_{,y} - (x)_{,x} + (yx)_{,y} + \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} u \right] dA = 0, \quad (6a)$$

$$N_i \int_A \left[ (wv)_{,x} + (vv)_{,y} - (xy)_{,x} + (y)_{,y} + \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} v \right] dA = 0, \quad (6b)$$

$$H_i \int_A [(Hu)_{,x} + (Hv)_{,y}] dA = 0, \quad (6c)$$

其中,  $A$  为单元面积 对式(6a~ 6c)应用 Gauss 定理<sup>[16]</sup>生成单元边界积分, 从而得到张量形式的有限元方程:

$$K^x u u + K^y v u - H^x + S^{xx} u + S^{xy} v + C u = Q^x, \quad (7a)$$

$$K^x u v + K^y v v - H^y + S^{yx} u + S^{yy} v + C v = Q^y, \quad (7b)$$

$$J^x(\zeta + h)u + J^y(\zeta + h)v - R = R h \quad (7c)$$

上式中的系数如下定义:

$$K^x = \int_A N N N_{,x} dA, K^y = \int_A N N N_{,y} dA, H^x = g \int_A N_{,x} H dA, \quad (8a \sim c)$$

$$H^y = g \int_A N_{,y} H dA, S^{xx} = 2 \int_A N_{,x} N_{,x} dA + \int_A N_{,y} N_{,y} dA, \quad (8d, e)$$

$$S^{xy} = 2 \int_A N_{,y} N_{,x} dA, S^{yx} = \int_A N_{,x} N_{,y} dA, \quad (8f, g)$$

$$S^{yy} = \int_A N_{,x} N_{,x} dA + 2 \int_A N_{,y} N_{,y} dA, C = \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2(\zeta + h)} \int_A N N dA, \quad (8h, i)$$

$$Q^x = \frac{1}{S} \int_S N T_x dS, Q^y = \frac{1}{S} \int_S N T_y dS, J^x = \int_A H N H_{,x} dA, \quad (8j \sim l)$$

$$J^y = \int_A H N H_{,y} dA, R = \int_S H H V_n dS \quad (8m, n)$$

### 1.3 计算过程

式(7a~ 7c)的非线性有限元方程,可通过 Newton-Raphson 叠代法求解 该方法需要写出如下不平衡值,

$$F^x = K^x u u + K^y v u - H^x + S^{xx} u + S^{xy} v + C u - Q^x, \quad (9a)$$

$$F^y = K^x u v + K^y v v - H^y + S^{yx} u + S^{yy} v + C v - Q^y, \quad (9b)$$

$$F = J^x(\zeta + h)u + J^y(\zeta + h)v - R(\zeta + h) \quad (9c)$$

然后得到带一系列未知增量的代数方程

$$\begin{bmatrix} (G^x)_{(6,6)} & (L^y)_{(6,6)} & (-H^x)_{(6,3)} \\ (L^x)_{(6,6)} & (G^y)_{(6,6)} & (-H^y)_{(6,3)} \\ (Z^x)_{(3,6)} & (Z^y)_{(3,6)} & (Q)_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u)_{(6,1)} \\ (v)_{(6,1)} \\ (\zeta)_{(3,1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} (F^x)_{(6,1)} \\ (F^y)_{(6,1)} \\ (F)_{(3,1)} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

其中的系数为:

$$G^x = K^x u + K^x u + K^y v + S^{xx} + C, \quad (11a)$$

$$G^y = K^y v + K^y v + K^x u + S^{yy} + C, \quad (11b)$$

$$L^x = K^y v + S^{yx}, L^y = K^x u + S^{xy}, Z^x = J^x(\zeta + h), \quad (11c \sim e)$$

$$Z^y = J^y(\zeta + h), Q = J^x u + J^y v - R \quad (11f, g)$$

这些系数用单元矩阵形式表示,利用计算机程序可以方便地计算三角形单元的闭合形式下的系数 为简化计,本文略去单元矩阵的推导过程 在式(11a~ 11g)中,  $u$  和  $v$  为第  $i$  次叠代后的速度分量值 如果所有节点未知量相对前一次叠代的误差变化率小于某指定值时,叠代过程停止

### 1.4 自适应网格技术

自适应网格技术的原理是,在前一次网格求解的基础上构建一个新的网格<sup>[13, 14]</sup> 新网格要求在解梯度变化大的区域采用小单元,在解梯度变化小的区域采用大单元 为了在流场的不同位置确定最佳大小的单元,使用固体力学的概念:给定一点的应力状态就决定了主应力的 大小 在流动行为复杂的区域需要小单元时,可采用速度分布值来确定合适的单元大小

为了确定合适的单元大小 首先,计算流速对总体坐标  $x$  和  $y$  方向的二阶导数:

$$\begin{bmatrix} \frac{2V}{x^2} & \frac{2V}{x y} \\ \frac{2V}{x y} & \frac{2V}{y^2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中,  $V$  为二个速度分量  $u$ 、 $v$  的模:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad (13)$$

然后计算其在主方向(混合导数为零)  $X$  和  $Y$  上的主值,

$$\begin{bmatrix} \frac{2V}{X^2} & 0 \\ 0 & \frac{2V}{Y^2} \end{bmatrix}; \quad (14)$$

最后取其中较大者,

$$= \max\left[\left|\frac{2V}{X^2}\right|, \left|\frac{2V}{Y^2}\right|\right] \quad (15)$$

该值用于确定合适的单元大小,它同时又是整个模型的最大主值,

$$h^2 = \text{const} = h_{\min}^2 \max, \quad (16)$$

其中  $h_{\min}$  是指定最小单元大小,  $\max$  是整个模型中最大主值

在式(16)条件下,根据指定的最小单元大小  $h_{\min}$ ,确定合适的单元大小。如果给定的  $h_{\min}$  过小,会导致模型中单元数量过多。反之,如果给定的  $h_{\min}$  过大,又会导致解精度不够,或者分析过度或者网格重划分的次数增多。在构建新网格时必须考虑这些因素

## 2 扩散模型

### 2.1 控制方程

从浅水流方程(1a~c)中分离出沿深度的平均污染物传输方程如下:

$$\frac{\partial(H)}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (17)$$

其中,  $($  为污染物浓度,  $D$  为扩散系数# 该微分方程可以在指定浓度的边界条件

$$(\partial/\partial n) = q_1(x, y) \quad (18)$$

下或在指定浓度梯度边界条件

$$\frac{\partial}{\partial n} = q_2(x, y) \quad (19)$$

下以及初始条件

$$((x, y, 0) = (0 \quad (20)$$

下,求解#

### 2.2 有限元公式

首先,假设单元浓度分布为

$$((x, y, t) = [N(x, y)]_{(1@3)} \{ (t) \}_{(3@1)}, \quad (21)$$

其中  $[N(x, y)]_{(1@3)}$  为线性插值函数# 应用加权残差法,并将式(21)代入式(17),得到有限元方程如下:

$$Q_A \{ W \} [N] dA \{ ( \} + Q_A \{ W \} [u \ v] [B] dA \{ ( \} +$$

$$\left\{ \int_A D \left[ \left\{ \frac{5W}{5x} \right\} \left[ \frac{5N}{5x} \right] - \frac{1}{[N]} \langle H \rangle \langle W \rangle \left[ \frac{5N}{5x} \right] \langle H \rangle \left[ \frac{5N}{5x} \right] \right] dA + \right. \\ \left. Q_A D \left[ \left\{ \frac{5W}{5y} \right\} \left[ \frac{5N}{5y} \right] - \frac{1}{[N]} \langle H \rangle \langle W \rangle \left[ \frac{5N}{5y} \right] \langle H \rangle \left[ \frac{5N}{5y} \right] \right] dA \right\} \langle \rangle = \\ Q_S \langle W \rangle q_n dS \tag{22}$$

或

$$[C] \langle \rangle + [[K_V] + [K_C]] \langle \rangle = \langle Q \rangle \# \tag{23}$$

该方程中的系数定义为

$$[C] = Q_A \langle W \rangle [N] dA, \tag{24a}$$

$$[K_V]_{Q_A} \langle W \rangle [u \ v] [B] dA, \tag{24b}$$

$$[K_C] = \left\{ Q_A D \left[ \left\{ \frac{5W}{5x} \right\} \left[ \frac{5N}{5x} \right] - \frac{1}{[N]} \langle H \rangle \langle W \rangle \left[ \frac{5N}{5x} \right] \langle H \rangle \left[ \frac{5N}{5x} \right] \right] dA + \right. \\ \left. Q_A D \left[ \left\{ \frac{5W}{5y} \right\} \left[ \frac{5N}{5y} \right] - \frac{1}{[N]} \langle H \rangle \langle W \rangle \left[ \frac{5N}{5y} \right] \langle H \rangle \left[ \frac{5N}{5y} \right] \right] dA \right\}, \tag{24c}$$

$$\langle Q \rangle = Q_S \langle W \rangle q_n dS \# \tag{24d}$$

### 2.3 时间离散化

将显式递推关系应用于式(23)中的时间积分,得到

$$\frac{1}{\$t} [C] \langle \rangle_{n+1} = \left[ \frac{1}{\$t} [C] + [K_V] + [K_C] \right] \langle \rangle_n + \langle Q \rangle_n \# \tag{25}$$

该式可以利用流域中污染物浓度 ( 的全部节点值直接求解#

## 3 例子

本节提供 3 个实例# 前两个例子用于检验流场计算中导出的有限元公式和开发的计算机程序, 最后一个例子检验污染物扩散模型的有效性#

### 3.1 底部变化的矩形管道中的流动

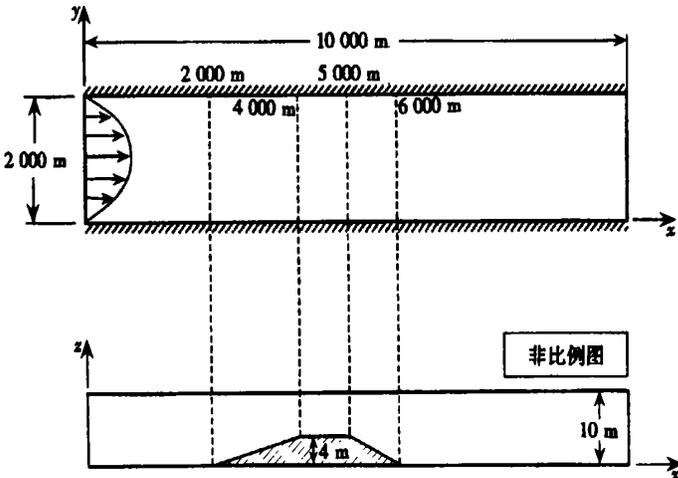


图2 底部变化的矩形管道中的流动问题

第一个例子分析底部变化的矩形管道中的流动, 见图 2#

图 3 表示有限元模型, 其边界条件为: 最大入口速度为 1.5 m/s、涡旋粘性系数  $M = 166.67 \text{ m}^2/\text{s}$ 、Chezy 系数  $C = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ 、重力加速度  $g = 10 \text{ m}/\text{s}^2$  该有限元网格包括 357 个节点和 160 个单元# 图 4 表示, 计算结果与文献[9]中的罚有限元法结果相吻合#

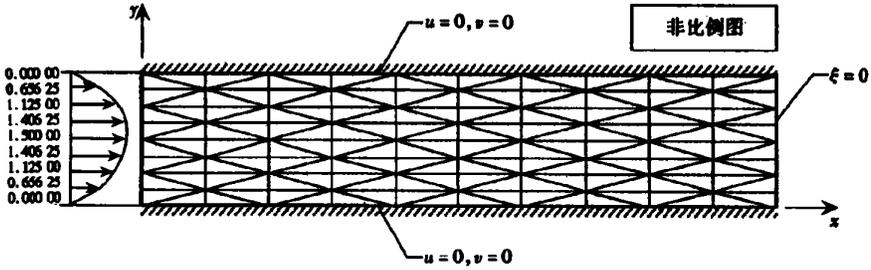


图 3 底部变化的矩形管道中流动的有限元模型

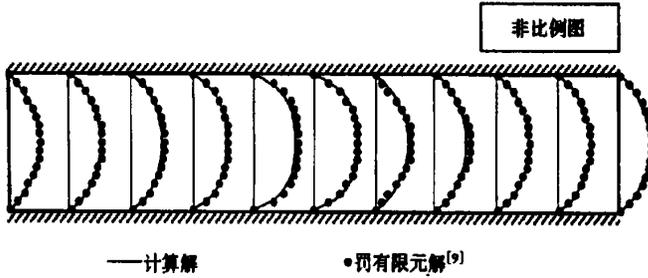


图 4 底部变化的矩形管道中流动速度的比较

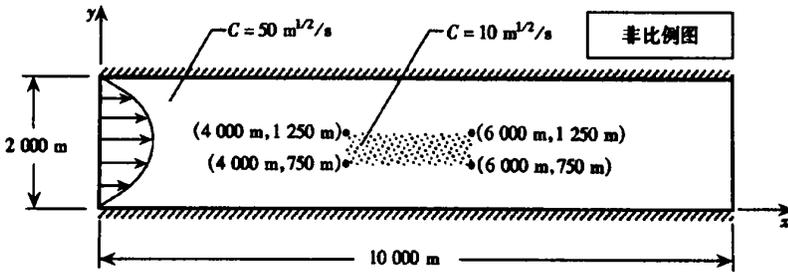


图 5 底部摩擦条件变化的矩形管道中的流动问题

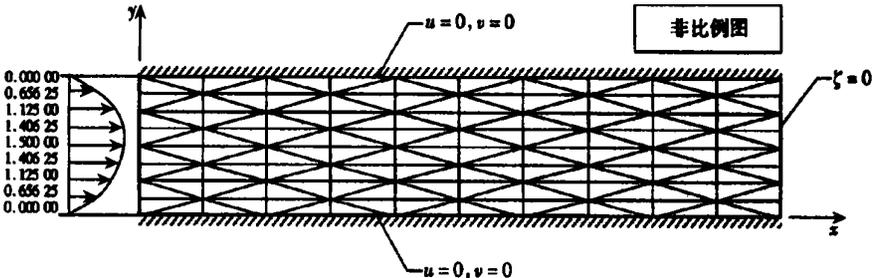


图 6 底部摩擦条件变化的矩形管道中流动的有限元模型

### 3.2 底部摩擦条件变化的矩形管道中的流动

本例中的几何特性与流体属性与前一个例子一样, 仅平均深度处处为 10 m 以及图 5 中阴

影部分的 Chezy 系数为  $10 \text{ m}^{1/2}/\text{s}\#$  图 6 显示其边界条件和有限元网格: 包含 187 个节点和 80 个单元# 图 7 显示其计算速度分布与文献[9]中使用罚有限元法得到的结果比较#

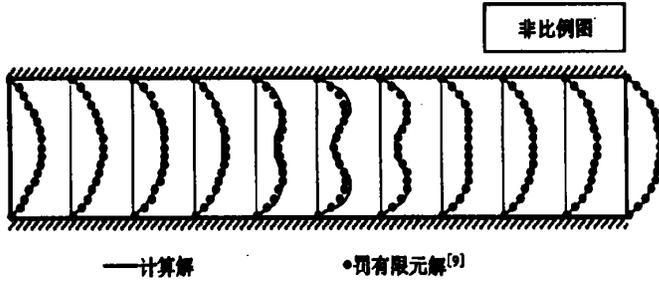


图 7 底部摩擦条件变化的矩形管道中流动速度的比较

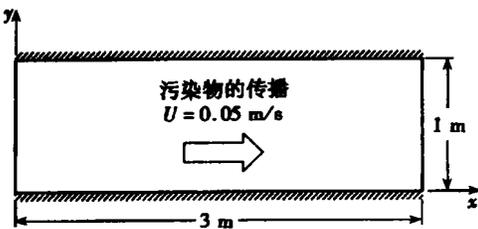


图 8 通过敞开式矩形管道时污染物的传播问题

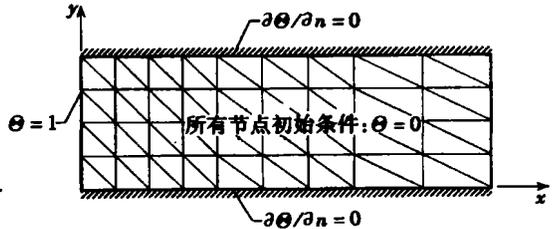


图 9 通过敞开式矩形管道时污染物传播的有限元模型

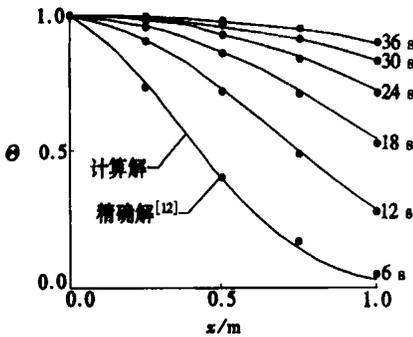


图 10 通过敞开式矩形管道时污染物传播浓度的比较

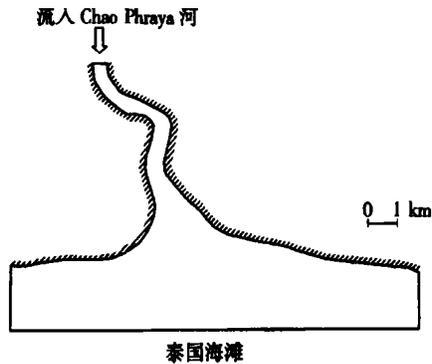


图 11 Chao Phraya 河的计算区域

### 3.3 通过敞开式矩形管道时污染物的传播

为了验证污染物扩散分析的有限元公式和开发的计算机程序, 图 8 研究了敞开式管道中污染物浓度的变化# 图 9 显示其有限元网格和初/边值条件# 网格包括 50 个节点和 72 个单元, 采用时间间隔  $\Delta t = 0.1 \text{ s}\#$  当扩散系数  $D = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ , 整个区域的流速都为  $U = 0.05 \text{ m/s}$  时, 求  $t = 6 \text{ s}, 12 \text{ s}, 18 \text{ s}, 24 \text{ s}, 30 \text{ s}$  和  $36 \text{ s}$  时的瞬时解# 图 10 显示沿  $x$  轴污染物浓度的瞬时解, 该计算结果与文献[12]给出的精确解非常吻合#

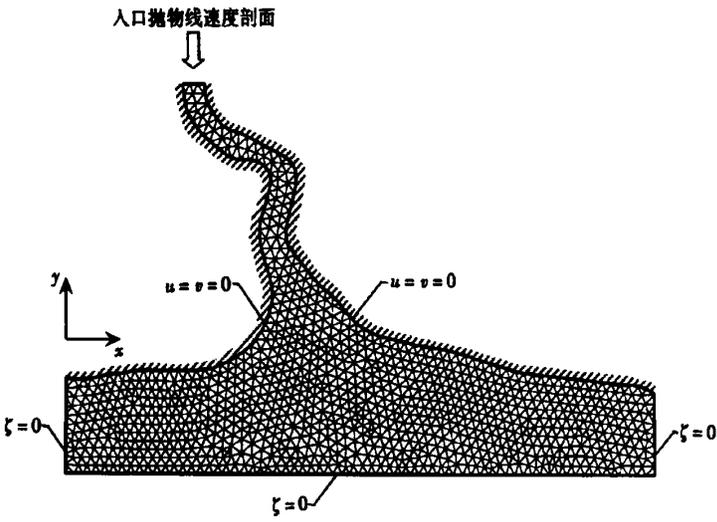


图 12 Chao Phraya 河流的边界条件和初始有限元网格

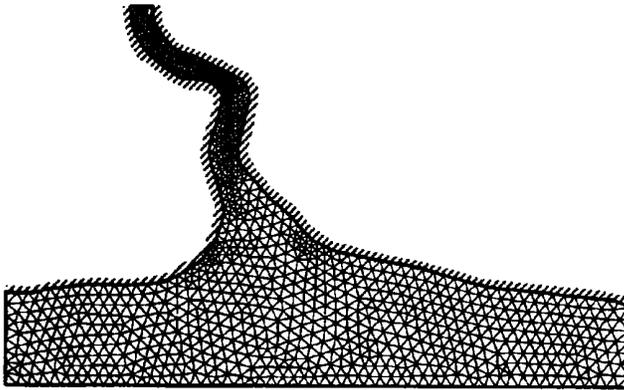


图 13 Chao Phraya 河流流的第二次有限元网格

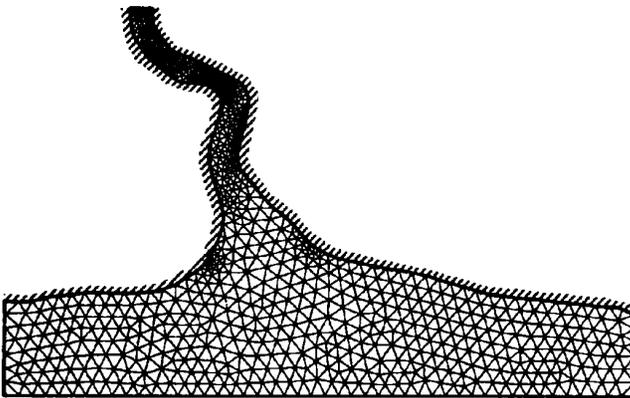


图 14 Chao Phraya 河流流的第三次有限元网格

## 4 Chao Phraya 河污染分析

### 4.1 Chao Phraya 河的流动

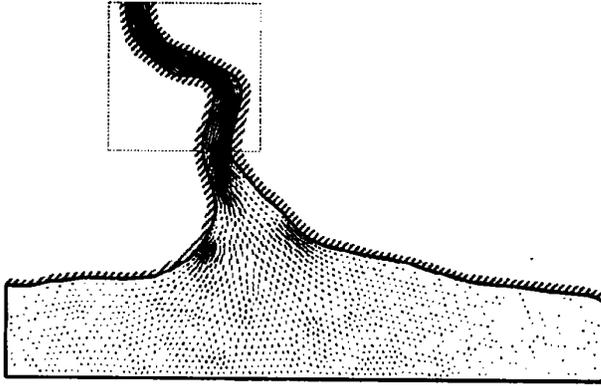


图 15 Chao Phraya 河流动的速度分布的预测

图 11 表示 Chao Phraya 河的几何条件# Z 图 12 表示其有限元模型和边界条件: 最大流入速度为 1.5 m/s、涡旋粘性系数  $M = 15 \text{ m}^2/\text{s}$ 、Chezy 系数  $C = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ 、重力加速度  $g = 9.81 \text{ m}/\text{s}^2$  初始单元网格包括 4 111 个节点和 1 948 个单元#

正如 1.4 节所述, 由初始网格获得的数值解构建第二个自适应的网格, 如图 13 所示, 该自适应网格包括 4 153 个节点和 1 954 个单元# 从该图可以看出, 在速度梯度变化大的区域生成更小的单元# 同时, 其他速度梯度接近一致的区域生成更大的单元# 接着重复上述过程构建第三个自适应网格如图 14 所示, 包括 3 411 个节点和 1 594 个单元, 相应的解及其细部分别见图 15 和 16#

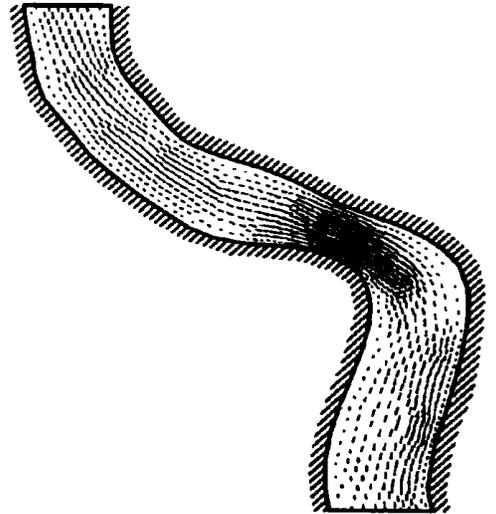


图 16 Chao Phraya 河流动速度分布预测结果的细部

### 4.2 河中污染物的扩散

研究工厂排放的污染物扩散过程# 图 17 表示整个计算区域中没有污染时的边界条件和初始条件, 扩散系数取  $50 \text{ m}^2/\text{s}$ 、时间间隔取  $\Delta t = 100 \text{ s}$  流动模型的自适应网格如图 14 所示, 作为扩散分析的有限元网格# 图 18 给出工厂排放 3 h 后, 河中的等浓度曲线, 图 19 表示工厂排放口附近污染物浓度分布细部#

## 5 结 论

本文研究浅水中污染物扩散的有限元法# 首先介绍了有限元公式和它的计算步骤, 导出了相应的有限元方程和可在个人电脑上执行的计算机程序, 有限元法结合自适应网格技术提高了流动解的精度# 自适应网格技术是在前一次生成的网格基础上生成新的网格, 新网格在速度梯度变化大的区域生成一群小单元以提高结果精度, 同时(在速度梯度平缓的区域)采用粗大单元以期减少计算时间和节省内存# 本文结果证明, 这种组合方法预测污染扩散行为是

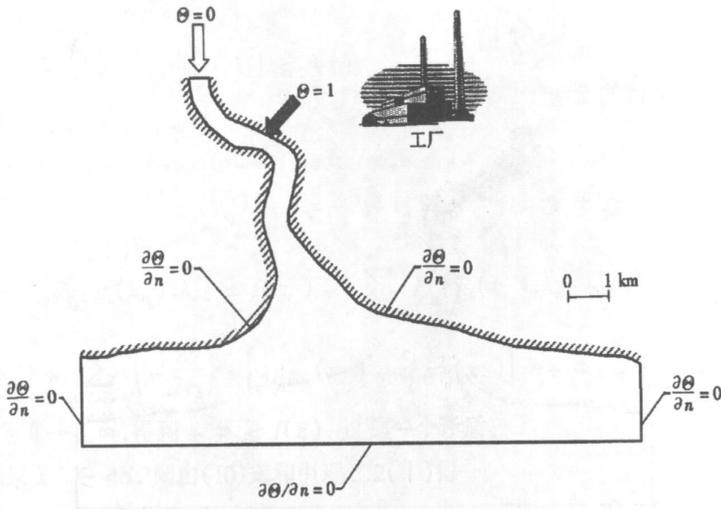


图 17 Chao Phraya河中污染物扩散的计算区域和边界条件

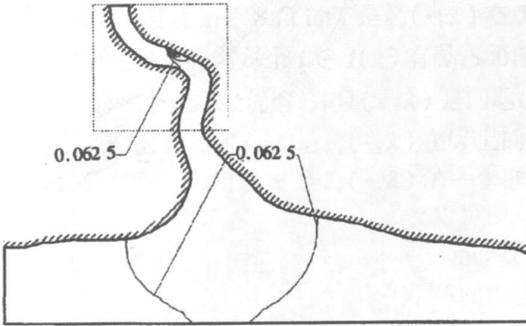


图 18 工厂排放 3 h 后 Chao Phraya 河中污染物扩散浓度的预测

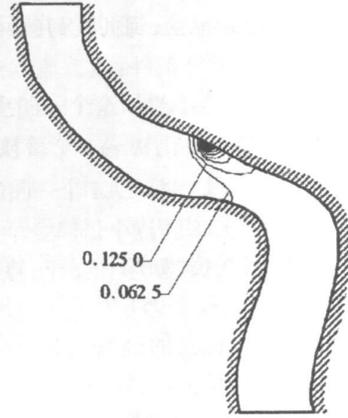


图 19 工厂排放 3 h 后 Chao Phraya 河中污染物扩散浓度预测结果的细部

有效的#

[参 考 文 献]

[1] Rastogi A K, Rodi W. Predictions of heat and mass transfer in open channels[J]. J Hydr Eng Div\_ ASCE, 1978, 104(HY3): 397) 420.

[2] Vreugdenhill C B, Wijnnga J H. A computation of flow patterns in rivers[J]. J Hydr Eng Div\_ ASCE, 1982, 108(HY11): 1296) 1310.

[3] Demuren A O, Rodi W. Calculation of flow and pollutant dispersion in meandering channels[J]. J Fluid Mech, 1986, 172: 63) 92.

[4] Molls T, Chaudhry M H. Depth\_averaged open channel flow model[J]. J Hydraul Eng\_ ASCE, 1995, 121(6): 453) 465.

[5] Borthwick A G L, Akponasa G A. Reservoir flow prediction by contravariant shallow water equations [J]. J Hydraul Eng\_ ASCE, 1997, 123(5): 432) 439.

[6] Zhou J G, Goodwill I M. A finite volume method for steady state 2D shallow water flows[J]. Internat

- J Numer Method H, 1997, 7(1): 4) 23.
- [7] Yu L, Righetto A M. Depth\_averaged turbulence k\_w model and applications[ J]. Advances in Engineering Software, 2001, 32( 5) : 375) 394.
- [8] Zienkiewicz O C, Heinrich J C. A unified treatment of steady\_state shallow water and two\_dimensional Navier\_Stokes equations\_finite element approach[ J]. Comput Method Appl M, 1979, 17/ 18: 673) 698.
- [9] Cochet J F, Dhatt D, Hubert G, et al. River and estuary flows by a new penalty finite element[ A]. In: Kawai T Ed. Finite Element Flow Analysis[ C]. Tokyo: University of Tokyo Press, 1982, 563) 570.
- [10] Leclerc M, Bellemare J, Dumas G, et al. A finite element model of estuarian and river flows with moving boundaries[ J]. Adv Water Resour, 1990, 13(4): 158) 168.
- [11] Shrestha P L. An integrated model suite for sediment pollutant transport in shallow lakes[ J]. Advances in Engineering Software, 1996, 27( 3) : 201) 212.
- [12] Tabuenca P, Vila J, Cardona J, et al. Finite element simulation of dispersion in the Bay of Santander [ J]. Advances in Engineering Software, 1997, 28(5): 313) 332.
- [13] Peraire J, Vahjdati M, Morgan K, et al. Adaptive remeshing for compressible flow computation[ J]. J Comput Phys, 1987, 72( 2): 449) 466.
- [14] Dechaumphai P, Morgan K. Transient thermal\_structural analysis using adaptive unstructured remeshing and mesh movement[ A]. In: Thermal Structures and Materials for High\_Speed Flight[ C]. Washington D C: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992, 205) 228.
- [15] Dechaumphai P. Adaptive finite element technique for heat transfer problems[ J]. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer, 1995, 17(2): 87) 94.
- [16] Dechaumphai P. Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics[ M]. Bangkok: Chulalongkorn University Press, 2002.

A d a p t i v e F i n i t e E l e m e n t M e t h o d f o r A n a l y s i s o f  
P o l l u t a n t D i s p e r s i o n i n S h a l l o w W a t e r

Somboon Otarawanna, Pramote Dechaumphai  
( Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University,  
Bangkok 10330, Thailand)

Abstract: A finite element method for analysis of pollutant dispersion in shallow water is presented. The analysis is divided into two parts: 1) computation of the velocity flow field and water surface elevation, and 2) computation of the pollutant concentration field from the dispersion model. The method was combined with an adaptive meshing technique to increase the solution accuracy, as well as to reduce the computational time and computer memory. The finite element formulation and the computer programs were validated by several examples that have known solutions. In addition, the capability of the combined method was demonstrated by analyzing pollutant dispersion in Chao Phraya River near the gulf of Thailand.

Key words: shallow water; pollutant dispersion; adaptive meshing technique; finite element method