应用数学和力学,第 25 卷 第 5 期(2004 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 05_0441_05

第二类变型 Bessel 函数的 Chebyshev 逼近*

张　　, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委周哲玮来稿)

摘要: 第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 在自变量趋于无穷时就是指数变小的, 使用多项式逼近的方法求解往往误差很大• 采用指数变换和 J. P. Boyd 的有理 Chebyshev 多项式计算第二类变型 Bessel 函数, 得到了令人满意的在较大范围内有效的解•

关 键 词: 第二类变型 Bessel 函数; 指数变换; 有理 Chebyshev 多项式

中图分类号: O241　　文献标识码: A

1 引言及问题提出

在实际的工程问题中, 我们经常使用多项式逼近来求解, 但是遇到一类问题, 即当自变量很大时问题的解是指数变小时, 使用多项式逼近的方法求解往往误差很大• 第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 在自变量趋于无穷时就是指数变小的, 利用一般的 Chebyshev 多项式逼近时, 在自变量很大情况下解的误差很大•

第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 是方程

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-\left(1+\frac{n^2}{z^2}\right)u=0 \tag{1}$$

的一个特解• $z=0$ 是零阶第二类变型 Bessel 函数 $K_0(z)$ 的奇点; 另一方面, 当 $z\to+\infty$ 时有

$$K_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]• \tag{2}$$

图 1 显示的是 $K_0(z)$ 与 z 的关系, 由图 1 可见随着 z 的增大, $K_0(z)$ 趋向无穷小•

为了计算第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$, 许多研究者发展了各种方法(如 D. E. Amos[1], J. B. Campbell[2], W. Gautschi 和 J. Slavik[3], M. K. Kerimov 和 S. L. Skorokhodov[4], J. Segura, P. Fernandez de Cordoba 和 Yu. L. Ratis[5], 及 I. J. Thompson 和 A. R. Barnett[6]), 目前计算变型 Bessel 函数一般都使用 D. E. Amos[1] 的算法•

T. Yoshida 和 I. Ninomiya[7] 使用 Tau 方法计算了复变量的第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$• Y. L. Luke[8] 使用移位 Chebyshev 多项式作为展开的基函数计算了复变量的第二类变型 Bessel 函数 $K_\nu(z)$• J. P. Boyd[9] 以有理 Chebyshev 多项式作为展开的基函数使用伪谱方法计算了复

* 收稿日期: 2002_12_17; 修订日期: 2004_01_20
基金项目: 上海市科技发展基金资助项目(98JC14032); 上海市重点学科建设基金资助项目
作者简介: 张　(1972—), 男, 浙江鄞县人, 博士(联系人. Tel: + 86_21_65539118, + 86_13917783310; E_mail: jerryzh@ cableplus. com. cn).

变量的第二类变型 Bessel 函数 $K_1(z)$•

本文利用 Chebyshev 谱方法来计算 $K_0(kz)$, 并特别关注当 z 很大时利用 Chebyshev 谱方法求解的效果• 在第二节中, 我们使用有理 Chebyshev 多项式方法求解这一问题, 发现当 z 很大时, 其计算结果与 D. E. Amos[1] 的计算结果相差很大• 在第三节中, 我们采用 Y. L. Luke[8] 的方法求解, 发现在某些情况下效果仍然不佳• 在第四节中, 我们引入一种指数变换, 发现指数变换系数 $c = k$ 时计算的精度最高, 其结果和 D. E. Amos[1] 的计算结果几乎难以区别•

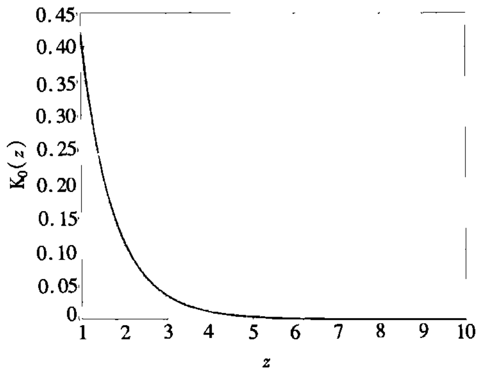


图 1 零阶第二类变型 Bessel 函数 $K_0(z)$ 与 z 的关系[1] ($1 \leqslant z \leqslant +\inf$)

2 有理 Chebyshev 多项式方法

考虑边值问题

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - k^2u = 0, \tag{3}$$

其中 $z \in [1, \infty)$, k 在实际的物理问题中一般代表波数• 边界条件

$$u(z) = K_0(1), \quad z = 1, \tag{4}$$

该方程的通解为 $u(z) = K_0(kz)$•

采用 J. P. Boyd[8] 的有理 Chebyshev 多项式有:

$$z = 1 + L\cot^2(t/2), \tag{5}$$

$$\frac{du}{dz} = -\left\{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right\}\frac{du}{dt}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left\{\sin^5\left(\frac{t}{2}\right)\Big\backslash\left(2L^2\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right\}\times \left\{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\frac{d^2u}{dt^2} + \left[3 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\frac{du}{dt}\right]\right\}, \tag{7}$$

其中 L 为映射参数• 将方程(5) ~ (7) 代入方程(3) 并使用伪谱方法求解方程, 其计算结果与 D. E. Amos[1] 的计算结果的比较如图 2 所示•

图中的实线表示 D. E. Amos[1] 的计算结果, 而虚线表示有理 Chebyshev 多项式方法的计算结果 (展开项数为 $N = 40$, 映射参数为 $L = 1$)• 由图 2 可见当 z 很大时, 其计算结果与 D. E. Amos[1] 的计算结果相差很大• J. P. Boyd[9] 指出使用多项式逼近一个在端点奇异的函数时随着展开项数的增加多项式逼近的收敛速度不会快过代数收敛•

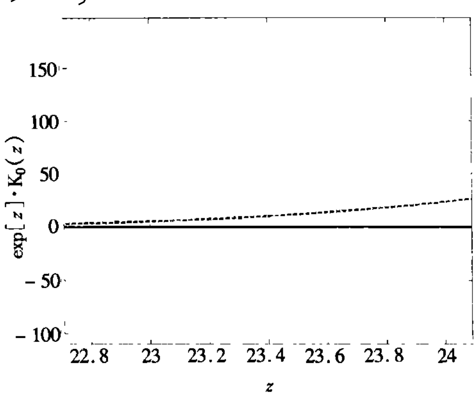


图 2 采用有理 Chebyshev 多项式方法计算 $K_0(kz)$

3 Luke 的方法

根据 Y. L. Luke[8] 的方法, 引进新的变量

$$w(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\exp(z) \cdot u(z), \tag{8}$$

并设 $n = 0$, 于是方程(1)和相应的边界条件变化为

$$4z^2\frac{d^2w}{dz^2} - 8z^2\frac{dw}{dz} + w = 0, \tag{9}$$

$$w(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(1) \cdot K_0(1), \quad z = 1. \tag{10}$$

再使用变换 $\xi = 1/z$, 最后使用移位 Chebyshev 多项式 $T^*(\xi) = T(2\xi - 1)$ 作为展开的基函数计算, 结果如图 3 所示.

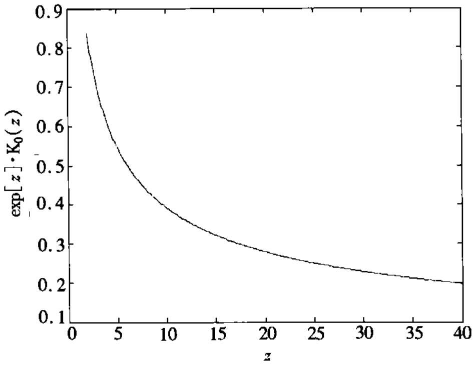


图 3 Luke 的计算结果

由图 3 可见, Luke 的结果和 Amos 的结果吻合得很好. 但是使用变换(8) 求解方程(3) 时由于方程在 $z \to \infty$ 时存在奇点而给计算带来了很大困难.

4 指数变换

根据零阶第二类变型 Bessel 函数 $K_0(z)$ 在无穷远处的渐近性质, 引进新的变量

$$w(z) = \exp(cz) \cdot u(z), \tag{11}$$

其中 c 为指数变换系数, 于是

$$\frac{du}{dz} = \exp(-cz)\left(\frac{dw}{dz} - cw\right), \tag{12}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \exp(-cz)\left(c^2w - 2c\frac{dw}{dz} + \frac{d^2w}{dz^2}\right). \tag{13}$$

将方程(11)~(13)代入方程(3)和相应的边界条件有

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (1 - 2cz)\frac{dw}{dz} + (-c + c^2z - k^2z)w = 0. \tag{14}$$

$$w(z) = \exp(c) \cdot K_0(1), z = 1. \tag{15}$$

最后使用谱方法求解方程(14) 和(15). 在图 4 中对指数变换方法和 D. E. Amos[1] 的计算结果作了比较, 图 4 中虚线表示 D. E. Amos[1] 的计算结果, 而实线是使用指数变换方法的计算值. 然后我们计算了 $k \in [1, 100]$ 的情况图 5 显示的是当 $k = 1$ 时采用指数变换后的计算结果. 在图 6 中显示的是当 $k = 100$ 时采用指数变换后的计算结果.

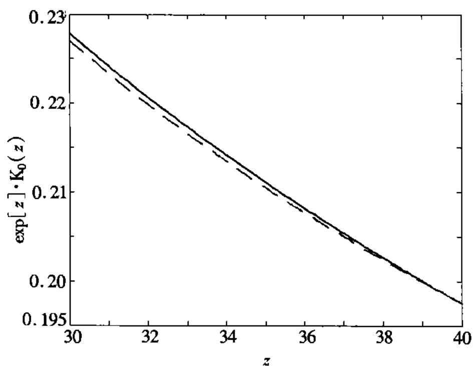
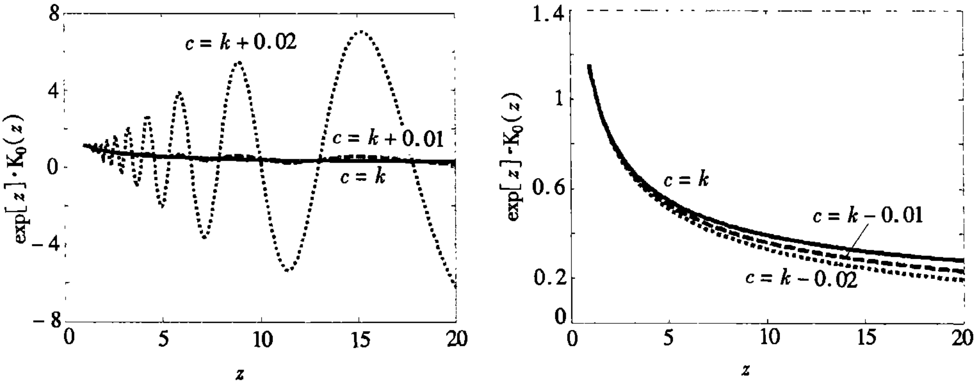


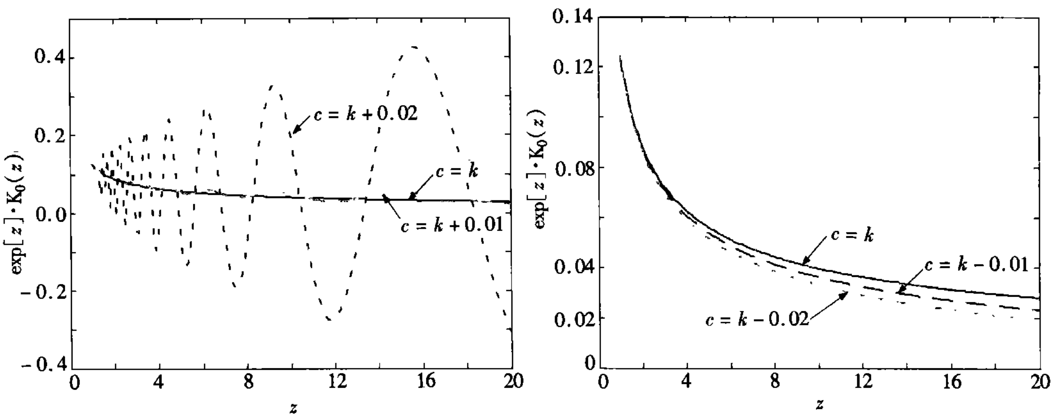
图 4 指数变换方法和 D. E. Amos[1] 的计算结果

由图 4 可见, 当自变量大时使用指数变换方法仍然保证较高的计算精度, 而此时如图 2 所示有理 Chebyshev 方法已经完全失去精度了. 由图 5 和图 6 可见当 $c < k$ 时随着 c 的增大计算曲线逐步接近 D. E. Amos[1] 的计算结果, 直到 $c = k$ 时计算的精度最高, 从图 5、图 6 中已经难于与 D. E. Amos[1] 的计算结果区分开了, 而当 $c > k$ 时计算的结果则是振荡的. 因此我们可以认为 $c = k$ 是一个临界的情况, 在 $c < k$ 和 $c > k$ 时谱方法逼近呈现了完全不同的特性, 因此实际数



(a) $c > k$ (b) $c \leqslant k$

图 5 采用指数变换后的计算结果($k = 1, N = 40, L = 1, 1 \leqslant z \leqslant + \inf$)



(a) $c > k$ (b) $c \leqslant k$

图 6 采用指数变换后的计算结果($k = 100, N = 40, L = 1$)

值计算时计算结果所呈现的不同特性可以帮助我们很快的找到计算精度最高的解•

当自变量较小时, 使用指数变换对 Chebyshev 多项式逼近影响不大; 但是当自变量很大时, 由于函数是指数衰减的, 使用指数变换和函数的无穷远处的性质相吻合, 从而有效的逼近了第二类变型 Bessel 函数•

5 结 论

使用 J. P. Boyd[9] 的有理 Chebyshev 多项式计算零阶第二类变型 Bessel 函数 $K_0(z)$, 当自变量较小时可以达到较高的精度, 但是随着自变量增大计算精度降低• 为了克服这一问题, 我们采用指数变换和函数的无穷远处的性质相吻合, 从而在自变量很大时得到较高的计算精度, 同时当自变量很小时仍然有很好的精度•

[参 考 文 献]

[1] Amos D E. Computation of modified Bessel functions and their ratios[J]. Math Comp, 1974, **28**(24): 239—251.

[2] Campbell J B. Bessel functions $I_n(z)$ and $K_n(z)$ of real order and complex argument[J]. Comput Phys Comm, 1981, **24**(1): 97—105.

[3] Gautschi W, Slavik J. On the computation of modified Bessel function ratios[J]. Math Comp, 1978, **32** (143): 865—875.
[4] Kerimov M K, Skorokhodov S L. Calculation of modified Bessel functions in the complex domain[J]. U S S R Comput Math and Math Phys, 1984, **24**(3): 15—24.
[5] Segura J, de Cordoba Fernandez P, Ratis Yu L. A code to evaluate modified Bessel functions based on the continued fraction method[J]. Comput Phys Comm, 1997, **105**(2/3): 263—272.
[6] Thompson I J, Barnett A R. Modified Bessel functions $I_n(z)$ and $K_n(z)$ of real order and complex argument, to selected accuracy[J]. Comput Phys Comm, 1987, **47**(4): 245—257.
[7] Yoshida T, Ninomiya I. Computation of Bessel functions $K_n(z)$ with complex argument by tau method[J]. J Inform Process, 1974, **14**(1): 32—37.
[8] Luke Y L. The Special Functions and Their Approximations[M]. New York: Academic Press, 1969.
[9] Boyd J P. Orthogonal rational function on a semi_infinite[J]. Journal of Computational Physics, 1987, **70**: 63—88.

Chebyshev Approximation of the Second Kind of Modified Bessel Function of Order Zero

ZHANG Jing, ZHOU Zhe_wei
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract: The second kind of modified Bessel function of order zero is the solutions of many problems in engineering. Modified Bessel equation is transformed by exponential transformation and expanded by J. P. Boyd's rational Chebyshev basis.

Key words: second kind of modified Bessel function of order zero; exponential transformation; rational Chebyshev basis