

文章编号: 1000-0887(2005) 11-1373-07

# 应用边界元法模拟纤维增强 复合材料平面弹性问题\*

孔凡忠, 郑小平, 姚振汉

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(本刊原编委黄敦推荐)

**摘要:** 将含有随机分布多种夹杂相复合材料的二维弹性力学问题归结为复连通区域的边界积分方程, 进而转化成矩阵方程进行求解和分析。根据同类夹杂相外在边界上的面力与位移之间关系矩阵完全相同的特点, 使得最后的矩阵方程阶数得到大规模减少, 这正是此处提出改进的边界元方法的主要思路。数值算例表明, 对于此类问题, 与常规的边界元分域解法相比更加有效。以该方法为基础, 可以详细给出纤维增强复合材料二维条件下的宏观等效力学性质。

**关键词:** 夹杂; 边界元法; 二维弹性; 纤维增强复合材料

**中图分类号:** 130.15      **文献标识码:** A

## 引 言

随着现代工业的发展, 复合材料日益在许多工程结构中得到广泛应用。因此, 确定复合材料的宏观等效力学特性对于现代工程应用具有非常重要的意义。一般来说, 复合材料可以看作在基体材料中嵌入了各种不同的夹杂相, 其宏观等效力学特性主要取决于所嵌入夹杂相的尺寸、形状、性质、体积比和夹杂相的空间分布。

为了计算复合材料的宏观等效力学特性, Eshelby<sup>[1]</sup> 最早提出了等效介质近似方法, 后来的许多研究者进一步发展和完善了这种近似求解方法。其中, Hashin<sup>[2]</sup> 提出复合材料圆柱模型, Budiansky<sup>[3]</sup> 和 Hill<sup>[4]</sup> 提出了自洽方法(SCM), Christensen 和 Lo<sup>[5]</sup> 以及 Aboudi 和 Benveniste<sup>[6]</sup> 提出和发展了广义自洽方法(GSCM), Mori 和 Tanaka<sup>[7]</sup> 提出了 Mori-Tanaka 方法。

但是, 据作者所知, 公开发表的文献中仅有少量的数值结果。Isida<sup>[8]</sup> 提出对复位势函数进行级数展开的求解方案, 对周期性排列的孔洞模型进行了计算。Day<sup>[9]</sup> 对域内含有三角形或者六角形排列的圆孔模型进行了计算。作者所在的研究组近年来发表了利用边界元法对含随机分布圆形夹杂的方板所作的计算方案<sup>[10, 11]</sup>。

\* 收稿日期: 2003\_08\_25; 修订日期: 2005\_07\_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172053, 10472051)

作者简介: 孔凡忠(1972—), 山东曲阜人, 博士(E-mail: kongfanzhong@mail.tsinghua.org.cn);

郑小平(联系人, Tel: + 86\_10\_62796187; E-mail: zhengxp@mail.tsinghua.edu.cn);

姚振汉(1939—), 教授(E-mail: demyzh@mail.tsinghua.edu.cn)。

## 1 边界元求解方案

本文选用如图 1 所示的含  $n$  个随机分布夹杂相的二维平面问题, 以说明边界元求解方案。其中,  $\Omega_0$  为基体弹性材料所占区域,  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_j, \dots, \Omega_n$  分别为各个弹性夹杂相所占区域,  $\Gamma_j$  为基体和夹杂相的界面边界,  $\Gamma_0$  是基体的外边界, 其中, 外边界线  $\Gamma_0$  包括给定位移边界  $\Gamma_0^u$  和给定面力边界  $\Gamma_0^t$  两个部分。

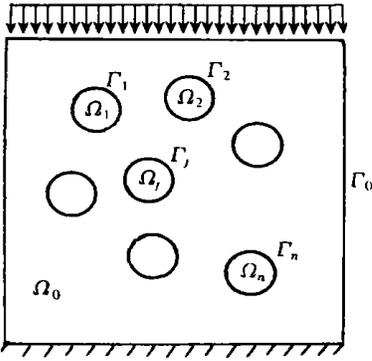


图 1 含多个夹杂相的复合材料横截面示意图

如果域内含有单个夹杂相, 对基体子域  $\Omega_0$  和第  $j$  个夹杂相  $\Omega_j$  可以分别列出边界积分方程

$$C_{\alpha\beta}(p) u_{\beta}(p) = \int_{\Gamma_{0^+} \Gamma_j} U_{\alpha\beta}(p, q) t_{\beta}^0(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma_{0^+} \Gamma_j} T_{\alpha\beta}^0(p, q) u_{\beta}(q) d\Gamma(q), \quad (1)$$

$$C_{\alpha\beta}(p) u_{\beta}(p) = \int_{\Gamma_j} U_{\alpha\beta}(p, q) t_{\beta}^j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma_j} T_{\alpha\beta}^j(p, q) u_{\beta}(q) d\Gamma(q), \quad (2)$$

式中, 上下标 0 和  $j$  分别代表基体子域和第  $j$  个夹杂相子域,  $C_{\alpha\beta}(p)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) 是根据边界曲线在源点  $p$  的几何特征所确定的常数,  $U_{\alpha\beta}(p, q)$ 、 $T_{\alpha\beta}^0(p, q)$  和  $T_{\alpha\beta}^j(p, q)$  分别是二

维弹性问题的基本解,  $u_{\beta}$ 、 $t_{\beta}$  分别为边界位移和边界面力。

利用二次边界单元插值离散后, 方程(1)和(2)可以写成矩阵方程的形式

$$\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & A_{23}^0 \\ A_{31}^0 & A_{32}^0 & A_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^0 \\ T^0 \\ \dot{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 & B_{23}^0 \\ B_{31}^0 & B_{32}^0 & B_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T^0 \\ U^0 \\ T^{j0} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$G^j T^{jj} = H^j \dot{U}, \quad (4)$$

式中,  $U^0$ 、 $T^0$  分别为基体边界给定面力部分  $\Gamma_0^t$  的未知结点位移矢量和给定结点面力矢量;  $T^0$ 、 $U^0$  分别为基体边界给定位移部分  $\Gamma_0^u$  的未知结点面力矢量和给定结点位移矢量;  $\dot{U}$  为夹杂界面边界线  $\Gamma_j$  的结点未知位移矢量;  $T^{j0}$ 、 $T^{jj}$  分别为对应于基体子域的界面结点处的未知面力矢量和对应于夹杂子域的界面结点未知面力矢量。

对于基体材料子域而言, 是一个带有内边界条件的复连通域, 因此, 在同一段边界线上结点编号按照边界线正方向顺序排列, 即沿边界线正方向前进时域内始终在左侧。对于夹杂子域而言, 界面结点编号必须和基体子域保持一致, 对夹杂子域结点编号是沿该子域边界线的负方向排序的。

在方程(3)和(4)中, 已经考虑了夹杂界面的位移连续条件。此外, 为了定解, 还需要考虑夹杂界面两边的面力平衡条件, 即

$$T^{jj} = -T^{j0}, \quad (5)$$

把方程(5)代入方程(4), 可以得到夹杂界面边界线的位移面力之间的关系

$$T^{jj} = -T^{j0} = -(G^j)^{-1} H^j \dot{U}, \quad (6)$$

于是, 可以得到表征夹杂界面边界线  $\Gamma_j$  的面力与位移之间的关系矩阵

$$D^j = (G^j)^{-1}H^j, \quad (7)$$

式中, 对应于某一夹杂子域的系数矩阵  $G$  和  $H$  分别由下式确定:

$$G^j = \sum_{m=1}^{N^e} \int_{\Gamma_j} U_{n(m)}^* N_m d\Gamma(\xi), \quad H^j = C_n + \sum_{m=1}^{N^e} \int_{\Gamma_j} T_{n(m)}^* N_m d\Gamma(\xi), \quad (8)$$

把方程(7)代入方程(3), 可以得到模拟含单个夹杂相二维固体的最终求解方程组为

$$\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 + B_{13}^0(G^j)^{-1}H^j \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & A_{23}^0 + B_{23}^0(G^j)^{-1}H^j \\ A_{31}^0 & A_{32}^0 & A_{33}^0 + B_{33}^0(G^j)^{-1}H^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^0 \\ T^0 \\ U^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^0 & B_{12}^0 \\ B_{21}^0 & B_{22}^0 \\ B_{31}^0 & B_{32}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T^0 \\ U^0 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

对于含  $n$  个随机分布(例如韦布尔分布和正态分布)夹杂相的固体而言, 如果我们仍然按照常规的边界元分域解法进行计算, 那么, 将会得到一个  $n+1$  子域的问题, 需要  $n+1$  个方程组联合求解。显然, 随着夹杂相数目的增加, 计算量迅速增加。

对于完全相同的夹杂相(形状、大小和材料性质完全相同), 在相同的分元插值离散条件下, 由方程(7)确定的夹杂界面面力与位移之间的关系矩阵是完全相同的。也就是说, 对应于所有相同夹杂相的关系矩阵  $D^j$  是相同的, 如方程(10)所示。因此, 由方程(8)所确定的系数矩阵  $G$  和  $H$  对于相同的夹杂相只需要求解一次。

$$D^j = D, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

于是, 与方程(9)类似, 可以把含  $n$  个随机分布相同夹杂相的固体简化为对一个含有内边界条件基体复连通域问题的求解, 如下述方程所示

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}^1 & \dots & A_{13}^i & \dots & A_{13}^n \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}^1 & \dots & A_{23}^i & \dots & A_{23}^n \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^{11} & \dots & A_{33}^{1i} & \dots & A_{33}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^{i1} & \dots & A_{33}^{ii} & \dots & A_{33}^{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{31}^n & A_{32}^n & A_{33}^{n1} & \dots & A_{33}^{ni} & \dots & A_{33}^{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ T \\ U^1 \\ \vdots \\ U^i \\ \vdots \\ U^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31}^1 & B_{32}^1 \\ \vdots & \vdots \\ B_{31}^i & B_{32}^i \\ \vdots & \vdots \\ B_{31}^n & B_{32}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ U \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} A_{13}^i = A_{13}^i + B_{13}^i(G)^{-1}H, & A_{23}^i = A_{23}^i + B_{23}^i(G)^{-1}H, \\ A_{33}^{ij} = A_{33}^{ij} + B_{33}^{ij}(G)^{-1}H, \end{cases} \quad (12)$$

式中第一下标表示离散化边界积分方程中的源点结点  $p$  处在单元段边界线, 第二下标表示场点结点  $q$  处在单元段边界线。其中, 1 代表外边界给定面力的部分, 2 代表外边界给定位移的部分, 3 代表基体与夹杂的界面。由于含多个夹杂相, 对不同的内边界进行区分是很必要的。当下标出现 3 时, 使用第一和第二个上标(如果有第二个)表示源点结点  $p$  和场点结点  $q$  所在的内边界线的数目。

方程(11)中的  $U$ 、 $T$  和  $U^i$  分别为外边界给定面力部分的未知位移矢量、给定位移部分的未知面力矢量和基体与第  $i$  个夹杂相界面处的未知位移矢量,  $T$  和  $U$  分别为外边界给定面力部分的给定面力值和给定位移部分的给定位移值。方程(12)中的矩阵  $G$  和  $H$  分别是对应于夹杂相的 2 个系数矩阵, 由于所考虑的随机分布夹杂相是相同的, 因此, 只需对任意一个夹杂相形成这些矩阵即可。

如果固体材料中随机分布的弹性夹杂相具有相同的大小、形状和泊松比, 只是弹性模量不

同,那么,上述的边界元求解方案也很容易推广应用于此类问题的求解。对于仅仅弹性模量不同的弹性夹杂相,其关系矩阵之间具有方程(13)所表示的确定关系,因此,由方程(8)所确定的系数矩阵  $G$  和  $H$  对于不同杨氏模量的夹杂相也只需要求解一次。

$$D^{j+1} = (E^{j+1}/E^j) D^j. \quad (13)$$

如果域内随机分布的夹杂相具有相同的形状和杨氏模量,只是大小不同,为了减少计算量,必需推导出夹杂相关联矩阵  $D^j$  之间的关系。根据方程(3)、(4)和方程(8),推导得到不同大小夹杂相关联矩阵  $D^j$  之间的关系如方程(14)所示。于是,由方程(8)所确定的系数矩阵  $G$  和  $H$  对于不同大小的夹杂相只需要求解一次。

$$\begin{cases} D^{j+1} = (G^{j+1})^{-1} H^{j+1}, & D^j = (G^j)^{-1} H^j, & H^j = H^{j+1}, \\ G^{j+1} = CG^j - \ln C \int_{\Gamma_{j+1}} N_j d\Gamma_{j+1}, \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $C$  为表征夹杂相的形状比例因子。

如果各个夹杂相的形状不同,而且不同形状夹杂相的类型数  $k$  远远小于夹杂相的总数  $N$ ,那么,与夹杂相有关的矩阵方程(12)可以改写为

$$\begin{cases} A_{13}^i = A_{13}^i + B_{13}^i (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)}, & A_{23}^i = A_{23}^i + B_{23}^i (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)}, \\ A_{33}^{ij} = A_{33}^{ij} + B_{33}^{ij} (G^{k(i)})^{-1} H^{k(i)}, \end{cases} \quad (15)$$

式中,  $k = 1, 2, \dots, m$ , 表示不同形状的夹杂类型数。对于每一种不同形状的夹杂相,由方程(8)所确定的系数矩阵  $G$  和  $H$  需要求解一次。

总之,对于含  $n$  个随机分布多种不同形状、不同大小、不同弹性模量弹性夹杂相的二维固体,采用本文设计的边界元求解方案,只需求解一个相应于基体材料的含内边界条件的复连通域问题,由方程(11)~(15)确定。从而,降低了计算量,提高了计算效率。

## 2 数值算例

一般地,含随机分布椭圆夹杂的固体可以作为纤维增强复合材料的计算模型,当椭圆夹杂的长短轴  $a/b = 1.0$  时,椭圆夹杂就退化为圆形夹杂。

### 2.1 含两个非常接近椭圆夹杂的板材截面上下均匀受拉

含两个非常接近椭圆夹杂板材截面如图2,它是一个简单而又有说明意义的算例。边长  $L = 100$  mm,椭圆夹杂长半轴  $a = 1$  mm,长短半轴比值  $a/b = 2.0$ ,夹杂界面边界线之间的最小距离  $e = 0.1$  mm,上下边界给定载荷  $q = 10$  MPa,基体材料  $E_1 = 10$  MPa,  $\nu_1 = 0.3$ ,夹杂材料  $E_2 = kE_1$ ,  $\nu_2 = 0.3$ 。

对于含两个椭圆孔的情况,采用边界元法和有限元法计算得到夹杂界面的  $V_{on\_Mises}$  应力如图3所示。其中有限元计算结果是采用MSC.Marc软件得到的,单元剖分大约4.8万左右。而本文所采用的边界元方法只要40个二次单元即可。图3中二者的计算结果非常吻合,这表明本文的边界元计算方案具有较高的计算精度和效率。

对于含随机分布椭圆夹杂的二维固体材料而言,域内将含有大量彼此之间非常靠近的夹杂相。由于所含夹杂相的尺度和形状各不相同,产生精细的有限元网格来精确反应各种微结构性能将涉及大量繁杂的工作。显然,对于此类问题,与传统的有限元和边界元分域解法相比,本文的边界元计算方案具有更高的计算效率。

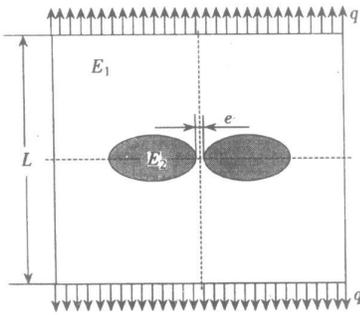


图2 含两个非常接近椭圆夹杂板材截面上下均匀受拉

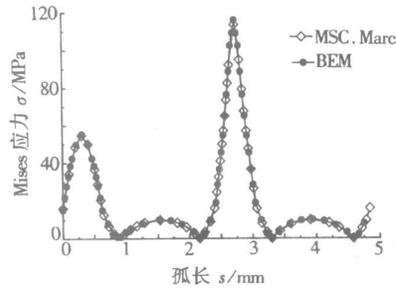


图3 边界元和 MSC. Marc 求得的界面 Von Mises 应力比较

## 2.2 两边均匀受拉含 100 个随机分布椭圆夹杂板材截面

含 100 个随机分布椭圆夹杂的板材截面如图 4 所示。方板的边长为 100 mm, 两边的拉伸载荷为 20 MPa, 椭圆夹杂的长短半轴的比值  $a/b = 2.0$ , 椭圆夹杂所占体积比为 0.4。在算例中所有椭圆夹杂的大小相同, 所以根据 100 个椭圆夹杂所占的体积比可以自动确定椭圆夹杂的长短半轴。另外需要说明的是, 图 5 的域内网格仅仅用来描述板材的变形和应力情况。

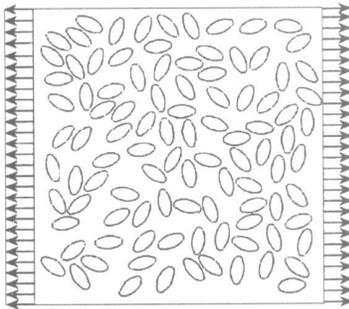


图4 含 100 个随机分布相同椭圆夹杂的板材截面

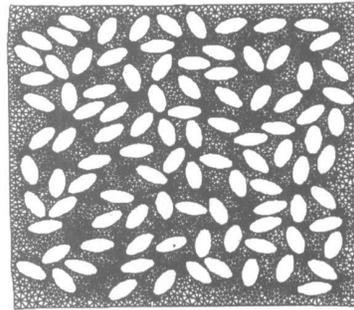


图5 含 100 个随机分布相同椭圆夹杂的位移变形图

应用边界元求解方案, 经过数值计算可以得到位移和应力分布。当夹杂与基体材料的模量比为  $E_2/E_1 = 0.5$  时, 图 5 和图 6 分别表示位移变形图和应力等差线图。

由图 5 和图 6 可以看出, 随着椭圆夹杂之间的距离减小, 等差线变密, 表明夹杂之间的应力梯度增大。对于同一个椭圆夹杂而言, 曲率较大的地方等差线更加密集, 表明随着夹杂界面边界线曲率的增大, 应力梯度迅速增大。

## 2.3 两边均匀受拉含 120 个随机分布混合夹杂的板材截面

含随机分布多种混合夹杂相(不同形状、不同大小、不同材料性质)的固体可以作为一般复合材料的分析模型。两边均匀受拉含 120 个随机分布混合夹杂(不同形状、不同大小)的板材截面如图 7 所示。边长为 100 mm, 两边的拉伸载荷为 20 MPa, 域内含有 20 个三角形夹杂、20 个四边形夹杂、40 个两种不同大小的圆形夹杂和 40 个不同大小不同  $a/b$  的椭圆夹杂。

为了简化计算, 所有夹杂与基体材料的模量比取为 0, 换句话说, 不同形状和大小的夹杂都变成相应的缺陷。同样, 图 8 的域内网格仅仅便于用来描述板材的变形和应力情况。

经过边界元数值计算, 可得方板的变形和应力分布。当夹杂相与基体之间的模量比为 0

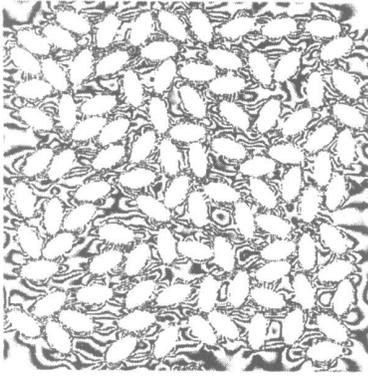


图 6 含 100 个随机分布相同椭圆夹杂的应力等差线

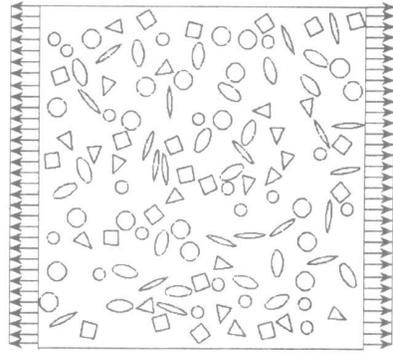


图 7 含 120 个随机分布混合夹杂的板材截面

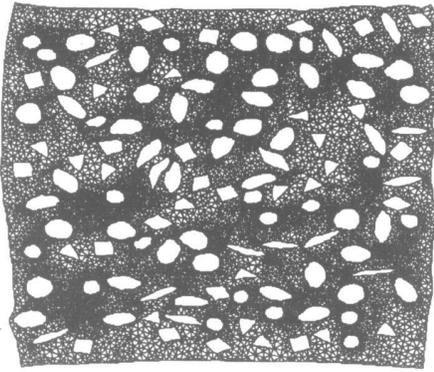


图 8 含 120 个随机分布混合夹杂板材截面的位移变形图

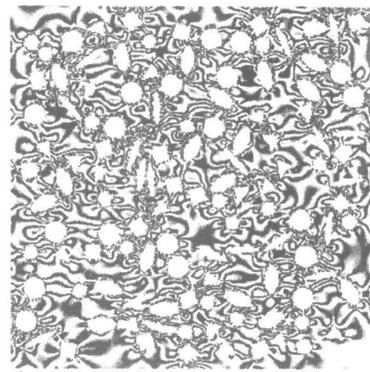


图 9 含 120 个随机分布混合夹杂的应力等差线图

时, 位移变形和应力等差线分别如图 8 和图 9 所示。于是, 在上述数值计算的基础上, 可以计算相应复合材料的宏观等效力学性质。

### 3 总结与讨论

1) 针对纤维增强复合材料的平面弹性力学问题, 本文应用边界元法, 将含有随机分布多种夹杂相的弹性体问题归结为对一个含内边界条件复连通域的边界积分方程, 经过对边界线适当划分, 最终转化为矩阵方程进行求解。

2) 根据同类夹杂相外边界线上的面力与位移关系矩阵完全相同的特点, 使得最后的矩阵方程阶数得到大规模减少, 从而, 建立了高效的边界元求解方案, 这正是本文提出改进的边界元方法的主要思路。

3) 对于纤维增强复合材料二维弹性力学问题, 与常规的边界元分域解法相比, 本文改进的边界元求解方案更加有效, 适用于二维纤维增强复合材料的宏观等效力学性质研究。

致谢 真诚感谢国家自然科学基金支持, 项目编号 10172053 和 10472051。

### [参 考 文 献]

- [1] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems

- [J]. Proc Royal Soc London A, 1957, **241**(1226): 376—396.
- [2] Hashin Z The elastic moduli of heterogeneous materials[J]. J Appl Mech, 1962, **29**(1): 143—150.
- [3] Budiansky Y. On the elastic moduli of heterogeneous materials[J]. J Mech Phys Solids, 1965, **13**(4): 223—227.
- [4] Hill R. A Self-consistent mechanics of composite materials[J]. J Mech Phys Solids, 1965, **13**(4): 213—222.
- [5] Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models[J]. J Mech Phys Solids, 1979, **27**(4): 315—330.
- [6] Aboudi J, Benveniste Y. The effective moduli of cracked bodies in plane deformation[J]. Engng Fracture Mech, 1987, **26**(2): 171—84.
- [7] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with mis\_fitting inclusions[J]. Acta Metall, 1973, **21**(4): 571—583.
- [8] Isida M, Igawa H. Analysis of zig\_zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension [J]. Int J Solids Struc, 1991, **27**(7): 849—864.
- [9] Day A R, Snyder K A, Garboczi E J, et al. The elastic moduli of a sheet containing circular holes[J]. J Mech Phys Solids, 1992, **40**(5): 1031—1051.
- [10] HU Ning, WANG Bo, TAN Guo\_wen, et al. Effective elastic properties of 2\_D solids with circular holes: numerical simulations[J]. Composites Science and Technology, 2000, **60**(9): 1811—1823.
- [11] KONG Fan\_zhong, YAO Zhen\_han, ZHENG Xiao\_ping. BEM for simulation of a 2D elastic body with randomly distributed circular inclusions[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, **15**(1): 81—88.

## Numerical Simulation of 2D Fiber Reinforced Composites Using Boundary Element Method

KONG Fan\_zhong, ZHENG Xiao\_ping, YAO Zhen\_han

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,  
Beijing 100084, P. R. China)

**Abstract:** The boundary element method was improved for the 2D elastic composites with randomly distributed inclusions. This problem can be reduced to a boundary integral equation for a multi-connected domain. Further, considering the matrices of the tractions and displacements for each group of the identical inclusion were the same, an effective computational scheme was designed, since the orders of the resulting matrix equations can be greatly reduced. Numerical examples indicate that this boundary element method scheme is more effective than the conventional multi\_domain boundary element method for such a problem. The present scheme can be used to investigate the effective mechanical properties of the fiber\_reinforced composites.

**Key words:** inclusion; boundary element method; 2D elasticity; fiber\_reinforced composite