

文章编号: 1000-0887(2005) 11-1328-09

# 一种便于摄动分析的编队飞行 卫星相对运动的描述\*

孟 鑫, 李俊峰, 高云峰

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(马兴瑞推荐)

摘要: 定义了一组参数来描述卫星编队飞行的相对运动, 称为相对轨道要素。利用它可以方便地分析摄动对相对轨道构形的影响以及卫星编队队形的几何特点。首先, 对相对轨道要素给予了详细的推导, 指出当主星偏心率为小量时, 在主星轨道坐标系中相对轨道是一椭圆柱和一平面相交所得的交线, 用描述该椭圆柱和平面的参数即可确定相对轨道构形, 进而提出了相对轨道要素。其次, 利用相对轨道要素对相对轨道进行地球扁率摄动分析, 指出相对轨道构形的变化由两部分组成: 一是椭圆柱的漂移导致相对轨道中心的漂移, 二是平面法线的章动和进动引起相对轨道平面转动, 同时还给出了地球扁率摄动下相对轨道构形漂移率及转动率的解析公式。最后, 针对  $J_2$  摄动分析了卫星编队相对轨道构形的变化以及相对轨道构形的漂移量和转动量。

关键词: 卫星编队飞行; 相对轨道要素; 地球扁率摄动; 漂移率; 转动率

中图分类号: V412.4 文献标识码: A

## 符 号 说 明

$OXYZ$ 地心赤道坐标系	$\omega$ 近地点幅角
$S_1xyz$ 主星轨道坐标系	$M$ 平近点角
$S_fxyz$ 从星轨道坐标系	$f$ 真近点角
$a$ 半长轴	$\theta = \omega + f$ 纬度幅角
$e$ 偏心率	$n$ 平均角速度
$i$ 轨道倾角	$r$ 卫星位置矢量
$\Omega$ 升交点赤经	$x, y, z$ 在主星轨道坐标系中的相对位置

## 引 言

卫星编队飞行中, 各卫星距离较近, 构成特定的队形, 编队各卫星间进行有效的协作, 共同

\* 收稿日期: 2004\_11\_12; 修订日期: 2005\_07\_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10202008); 高等学校博士学科点专项科研资助课题基金资助项目(20020003024)

作者简介: 孟鑫(1977—), 女, 满族, 黑龙江人, 博士(Tel: + 86\_10\_62773402; E\_mail: mengx02@mails.tsinghua.edu.cn);

李俊峰(联系人, Tel: + 86\_10\_62772936; E\_mail: lijunf@tsinghua.edu.cn)。

完成任务,整体上相当于一颗很大的虚拟卫星。为了实现这样的功能,需要研究卫星间的相对运动及制定相对轨道的控制策略,设计既省燃料、寿命又长的卫星相对运动轨道。

目前主要有以下两种参数形式描述卫星间的相对运动。第1种是用从星相对主星的位置  $x, y, z$  和速度  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  描述从星的相对运动。采用这种形式的有  $C_W$  方程及其改进方法<sup>[1~5]</sup>。 $C_W$  方程有解析解,并且形式简单,便于定性和定量分析和控制规律设计,具有理论分析的优势。但  $C_W$  方程的前提假设(地球是理想球体,主星为圆轨道)、方程的线性化处理以及没有考虑摄动对卫星运动的影响等限制了它在卫星编队飞行问题中的应用<sup>[6]</sup>。 $C_W$  方程的改进方法在相对运动方程中加入了  $J_2$  摄动,可进行摄动分析,但方程解的形式很复杂。有的文献还考虑了主星偏心率不为零的情况<sup>[7,8]</sup>。第2种是用主、从星的轨道根数确定相对轨道形状及从星在相对轨道上的位置,如轨道根数法<sup>[9~12]</sup>。该方法得到的编队卫星相对运动方程为代数方程,与  $C_W$  方程相比,更适于研究摄动问题。但用该相对运动方程分析摄动问题并不太容易,因为考虑摄动后,该相对运动方程变得很复杂。另外,用轨道根数作为参数分析卫星间的相对运动时,相对轨道构形的几何形状以及摄动下描述相对轨道变化量的参数不是很清晰。总的说来,对于相对轨道的控制而言,轨道根数法并不是十分理想的描述方法。

上面提到的两种编队卫星相对运动的描述形式各有优点,应用也很广泛,目前绝大多数的研究者均采用这两种描述形式,但这两种方法在进行编队卫星相对轨道的摄动分析时并不方便。单颗卫星在空间的位置可以用6个轨道根数来确定,但当轨道倾角和偏心率趋于零时,轨道的升交点和近地点的方向会变得不确定,而且在卫星轨道的摄动方程中出现奇点,为了保持控制策略,选用了其他的轨道参数,更方便地描述卫星的漂移运动。对于静止卫星,定义了平经度漂移率代替静止轨道半长轴,定义卫星的平赤经代替初始时刻的平近点角,另外轨道的偏心率 and 倾角矢量采用在地心赤道坐标系中的投影形式<sup>[13]</sup>。在单颗卫星的静止轨道6要素的启发下,本文对编队卫星间的轨道根数差进行组合,得到一组新的参数来描述编队卫星的相对运动。这些参数称为相对轨道要素,它们很清晰地反映了相对轨道的中心位置和形状,以及考虑摄动后相对轨道的变化。文中首先对相对轨道要素进行了详细的推导;然后,利用相对轨道要素对相对轨道进行摄动分析,给出了地球扁率摄动下相对轨道构形漂移率及转动率的解析公式;最后,针对  $J_2$  摄动分析了卫星编队相对轨道构形的变化以及相对轨道构形的漂移量和转动量。

## 1 用主、从星轨道根数描述的相对运动方程

单颗卫星在空间中的位置由6个轨道根数确定,用这些轨道根数可以得到卫星编队飞行的相对运动方程<sup>[12]、[14]</sup>。令  $\varepsilon^T = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ , 由于主、从星的轨道根数很接近,所以主、从星轨道根数之差可作为主星轨道根数的变分,即  $\delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_l$ , 其中下标“l”表示主星,“f”表示从星。

从星的位置矢量为

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_l + \boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\rho}$  为主从星相对位置矢量。

相对位置矢量  $\boldsymbol{\rho}$  在主星轨道坐标系  $S_{lxyz}$ <sup>[14]</sup> 中的投影  $(x, y, z)^T$  为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{l0}^T \mathbf{R}_{f0} \begin{Bmatrix} r_f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_l \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

从星轨道坐标系  $S_{fxyz}^{[14]}$  到地心赤道坐标系  $OXYZ^{[14]}$  的转换矩阵为

$$\mathbf{R}_{f0} = \mathbf{R}(\Omega_f) \mathbf{R}(i_f) \mathbf{R}(\theta_f), \quad (3a)$$

地心赤道坐标系  $OXYZ$  到主星轨道坐标系  $S_{1xyz}$  的转换矩阵为

$$\mathbf{R}_{10} = \mathbf{R}(-\theta_1) \mathbf{R}(-i_1) \mathbf{R}(-\Omega_1), \quad (3b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\Omega_j) = \begin{bmatrix} \cos \Omega_j & -\sin \Omega_j & 0 \\ \sin \Omega_j & \cos \Omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{R}(i_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_j & -\sin i_j \\ 0 & \sin i_j & \cos i_j \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}(\theta_j) = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (j = 1, f), \end{cases} \quad (4)$$

把式(3a)、(3b)和(4)代入式(2)后可以得到用轨道根数差描述的一阶近似相对运动方程:

$$\begin{cases} x = r_f - r_1, \\ y = r_1(\delta\theta + \delta\Omega\cos i_1), \\ z = r_1(\delta i \sin \theta_1 - \delta\Omega\cos \theta_1 \sin i_1), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $r_1 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1\cos f_1}$ ,  $r_f = \frac{a_f(1 - e_f^2)}{1 + e_f\cos f_f}$ .

式(5)中唯一的假设是主从星的距离很近。当主星轨道为近圆轨道时,式(5)可以简化为

$$\begin{cases} x = \delta a - a_1\cos f_1\delta e, \\ y = a_1(\cos i_1\delta\Omega + \delta\omega + \delta M + 2\sin f_1\delta e), \\ z = a_1[\sin(\omega_1 + f_1)\delta i - \cos(\omega_1 + f_1)\sin i_1\delta\Omega]. \end{cases} \quad (6)$$

式(6)是代数方程,便于分析编队卫星间的相对运动,但描述相对运动的参数过多并且考虑摄动后这些参数又是随时间变化的量,使得式(6)变得更加繁冗,分析相对运动及相对轨道的一些特性并不是很方便,很难清晰地反映出编队卫星相对轨道的几何特性及摄动下相对轨道的变化规律。

## 2 用相对轨道要素描述的编队卫星相对运动

编队卫星的相对运动可分解为相对轨道的方位与构形以及从星在相对轨道上的位置两部分。利用描述相对轨道方位和形状的参数以及从星在相对轨道上位置的参数,就可确定从星的位置。下面,首先分析主星轨道坐标系中相对轨道的几何方程。

### 2.1 相对轨道的几何方程

在主星轨道偏心率为小量的前提下,式(5)可改写为

$$\begin{cases} x = \delta a - a_1(e_f\cos M_f - e_1\cos M_1), \\ y = a_1(\cos i_1\delta\Omega + \delta\omega + \delta M + 2e_f\sin M_f - 2e_1\sin M_1), \\ z = a_1[\sin(\omega_f + M_f)\delta i - \cos(\omega_f + f_f)\sin i_1\delta\Omega], \end{cases} \quad (7)$$

如果主从星平近点角之差  $\delta M$  为小量,式(7)可继续化简为:

$$\begin{cases} x = D - A\cos(nt + \alpha), \\ y = B + 2A\sin(nt + \alpha), \\ z = -C\cos(nt + \alpha + \gamma), \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{cases} A = a_1 \delta e, \\ B = a_1 (\delta \omega_1 + \delta M + \delta \Omega \cos i_1), \\ C = a_1 \sqrt{(\delta \Omega \sin i_1)^2 + (\delta i)^2}, \\ D = \delta a, \end{cases} \begin{cases} \alpha = M_1 + \arctan \left( \frac{e_f \delta M}{\delta e} \right), \\ \beta = M_1 + \arctan \left( \frac{\delta i}{\delta \Omega \sin i_1} \right), \\ \gamma = \omega_1 + \delta \omega + \delta M + \beta - \alpha, \end{cases}$$

分析式(8), 可得到描述相对轨道的几何方程:

$$\left( \frac{x-D}{A} \right)^2 + \left( \frac{y-B}{2A} \right)^2 = 1, \tag{9}$$

$$z = \frac{C \cos \gamma}{A} (x-D) + \frac{C \sin \gamma}{2A} (y-B). \tag{10}$$

相对轨道构形是由式(9)所示的椭圆柱和式(10)所示的平面相交所得交线。

## 2.2 相对轨道的空间位置

由于相对轨道构形是平面和椭圆柱相交所得的交线, 那么一旦确定了椭圆柱和平面的位置, 就可以得到相对轨道的空间位置。

### 2.2.1 椭圆柱

从式(9)中可知, 在  $x-y$  平面, 椭圆的中心位置坐标为  $(D, B)$ , 该椭圆的半长轴长  $2A$ , 长、短半轴之比为 2:1, 由此可确定椭圆柱在主星轨道坐标系下的空间位置。

### 2.2.2 与椭圆柱相交的平面

本节中需定义一个新坐标系  $Sx'y'z'$ 。该坐标系与主星轨道坐标系  $S_{1xyz}$  平行。坐标系  $Sx'y'z'$  的原点为  $(D, B, 0)$ , 该点为相对轨道在  $x-y$  平面投影的中心位置,  $x'y'$  平面与主星轨道平面重合。在坐标系  $Sx'y'z'$  下, 式(10)变为

$$2C \cos \gamma \cdot x + C \sin \gamma \cdot y - 2A \cdot z = 0, \tag{11}$$

由式(11)得, 在坐标系  $Sx'y'z'$  中, 式(11)所示的平面法线的单位矢量为:

$$n = \left[ \frac{2C \sin \gamma}{\sqrt{C^2(1+3\cos^2 \gamma) + 4A^2}}, \frac{C \sin \gamma}{\sqrt{C^2(1+3\cos^2 \gamma) + 4A^2}}, \frac{-2A}{\sqrt{C^2(1+3\cos^2 \gamma) + 4A^2}} \right]^T. \tag{12}$$

如图 1 所示, 令式(11)所表示的平面与  $x'y'$  面的夹角为  $\theta$ , 与其在  $x'y'$  平面投影的交线为  $SA$ ,  $SA$  与  $x'$  轴的夹角为  $\phi$ 。很明显, 即式(11)所表示平面为相对轨道平面。在坐标系  $Sx'y'z'$  中用  $\theta$  和  $\phi$  表示的平面法线的 3 个分量为

$$\begin{cases} n_x = \sin \theta \sin \phi, \\ n_y = -\sin \theta \cos \phi, \\ n_z = \cos \theta, \end{cases} \tag{13}$$

由(12)和(13)得

$$\begin{cases} \tan \phi = -\frac{n_x}{n_y} = -2 \cot \gamma, \\ \cos \theta = n_z = \frac{-2A}{\sqrt{C^2(1+3\cos^2 \gamma) + 4A^2}}, \end{cases} \tag{14}$$

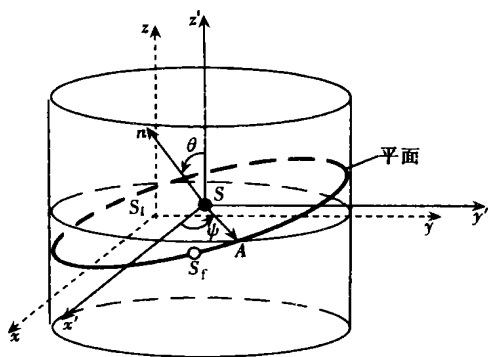


图 1 相对轨道构形在空间的位置

所以  $C = A \sqrt{\tan^2 \theta (1 + 3 \cos^2 \phi)}$ 。

从上面的分析可知, 相对轨道平面的方位由  $\theta$  和  $\phi$  决定, 相对轨道在  $x_y$  平面投影的中心位置由  $D$  和  $B$  决定。

### 2.3 从星在相对轨道上的位置

把确定相对轨道方位的参数代入到式(8)中, 可得到新的卫星编队飞行的相对运动方程。

$$\begin{cases} x = D - A \cos(nt + \alpha), \\ y = B + 2A \sin(nt + \alpha), \\ z = A \sqrt{\tan^2 \theta (1 + 3 \cos^2 \phi)} \cos(nt + \alpha + \gamma), \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\tan \phi = -n_x/n_y = -2 \cot \gamma$ 。

式(15)是用描述相对轨道几何特性的参数描述的一阶近似相对运动方程, 需要指出的是, 该方程组成立的条件是主星为近圆轨道。任意时刻从星在相对轨道的位置由  $\alpha$  和  $\phi$  决定, 其中  $\alpha$  决定  $x_y$  平面内从星在相对轨道的初始位置,  $\alpha$  和  $\phi$  决定  $z$  方向的初始位置。

### 2.4 相对轨道要素的定义及几何意义

从上面的分析可知, 由  $A$ 、 $B$ 、 $D$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  和  $\alpha$  可以完全确定任意时刻从星的相对位置, 本文把这 6 个参数称为相对轨道要素。式(15)所在的主星轨道坐标系  $S_{xyz}$  的原点是主星,  $x_y$  平面为主星的轨道平面, 从星围绕主星旋转得到的运动轨迹为相对轨道。这与地心赤道坐标系  $OXYZ$  很类似, 只是把地心改换为主星, 卫星轨道换为相对轨道。仿照经典轨道根数的定义, 我们把  $\theta$  和  $\phi$  分别称为相对轨道的相对倾角和相对升交点赤经。这 2 个参数确定了相对轨道平面在主星轨道坐标系  $S_{xyz}$  中的方位。但与卫星轨道几何形状的参数  $a$  和  $e$  所不同的是描述相对轨道几何形状的参数不是独立的量, 而是由确定相对轨道平面的椭圆柱及相交平面所决定, 即由  $A$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  及  $\alpha$  的组合所决定, 所以本文没有对这些参数进行公式推导。

## 3 用相对轨道要素分析常用编队队形的特点

在卫星编队飞行中, 为了完成指定的任务, 卫星需组成一定的队形, 这就需要根据队形要求设计初始的卫星轨道根数, 从满足队形的卫星轨道根数中很难看出相对轨道的特点。下面用相对轨道要素对这些常用队形进行分析。

### 3.1 圆形编队

圆形编队是指从星与主星的距离在空间中保持常值, 相对轨道构形为一圆形。根据式(15)有, 该圆形编队队形是由椭圆柱  $x^2/A^2 + y^2/(4A^2) = 1$  和平面  $z = \pm\sqrt{3}x$  相交所得的交线。相对轨道满足条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 4A^2$ , 相对轨道平面的相对倾角  $\theta = \pm\pi/3$ , 相对轨道平面的相对升交点赤经  $\phi = \pi/2$  或者  $\phi = 3\pi/2$ 。

### 3.2 投影为圆形的编队

投影为圆的编队与圆形编队在设计上类似, 区别在于投影为圆的编队只是在所要求的投影平面内从星与主星的距离为固定值。

#### 3.2.1 $y_z$ 面的投影

相对轨道所在平面方程变为  $z = \pm 2x$ , 相对轨道在  $y_z$  面投影为圆, 约束条件为  $y^2 + z^2 = 4A^2$ , 相对轨道平面的相对倾角  $\theta = \pm \arccos(\sqrt{5}/5)$ , 相对轨道平面的相对升交点赤经  $\phi = \pi/2$  或者  $\phi = 3\pi/2$ 。

#### 3.2.2 $x_z$ 面的投影

对于这种情况, 相对轨道所在平面方程为  $z = \pm y/2$ , 相对轨道在  $xz$  面的投影为圆  $x^2 + z^2 = A^2$ , 相对轨道平面的相对倾角为  $\theta = \pm \arccos(2\sqrt{5}/5)$ , 相对轨道平面的相对升交点赤经为  $\phi = 0$  或者  $\phi = \pi$

### 3.3 共面椭圆编队

当编队各卫星的运行轨道均在一个平面上时, 该编队称为共面椭圆编队。相对轨道平面的相对倾角  $\theta = 0$ , 相对轨道方程为

$$\begin{cases} \left[ \frac{x-D}{A} \right]^2 + \left[ \frac{y-B}{2A} \right]^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad (16)$$

相对轨道是  $x,y$  平面内的偏心率为  $\sqrt{3}/2$  的椭圆, 长半轴平行于  $y$  轴 ( $D \neq 0$ ) 或在  $y$  轴上 ( $D = 0$ )。

## 4 用相对轨道要素进行相对轨道的摄动分析

本文提出的相对轨道要素在刻画相对轨道的几何特性方面有一定优势, 通过对相对轨道要素进行摄动分析, 可以得到摄动下相对轨道的定量变化规律。本文所指的摄动仅为地球扁率摄动。

### 4.1 摄动下相对轨道的漂移和转动

从几何角度看, 相对轨道是由椭圆柱和平面相交所得的交线, 因此相对轨道构形的变化可分解为该椭圆柱的变化和平面的变化。

对于开普勒轨道, 卫星的轨道根数中除平近点角  $M$  外均为常量。但考虑摄动后, 卫星的轨道根数随时间变化。从长期影响来看, 这些摄动对轨道根数  $a, e$  和  $i$  没有影响, 只会使近地点幅角  $\omega$ 、升交点赤经  $\Omega$  及平近点角  $M$  发生变化<sup>[7]</sup>。这样, 只考虑摄动的长期影响, 可得到任意时刻主从星的轨道根数差, 其中下标“0”表示卫星运行的初始时刻。

$$\begin{cases} \delta a = \delta a_0, \delta e = \delta e_0, \delta i = \delta i_0, \\ \delta \Omega = \delta \Omega_0 + \delta \dot{\Omega}(t - t_0), \\ \delta \omega = \delta \omega_0 + \delta \dot{\omega}(t - t_0), \\ \delta M = \delta M_0 + \delta \dot{M}(t - t_0). \end{cases} \quad (17)$$

#### 4.1.1 椭圆柱的变化

由椭圆柱方程(9)可知, 在  $x,y$  面内椭圆的半长轴为  $2a_1 |\delta e|$ , 椭圆中心为  $(\delta a, B)$ 。如果只考虑地球扁率摄动的长期影响, 主从星的轨道半长轴之差  $\delta a$  和离心率之差  $\delta e$  不随时间变化, 也就是椭圆柱的形状不变, 而  $B$  的大小变化(如式 18 所示), 所以在摄动的影响下, 只有椭圆的中心位置发生变化, 其变化规律是椭圆中心沿  $y$  轴方向平移, 本文把这种变化称为漂移。

$$B = a_1 [\delta \omega_0 + \delta M_0 + \delta \Omega_0 \cos i_1 + (\delta \dot{\omega} + \delta \dot{M} + \delta \dot{\Omega} \cos i_1)(t - t_0)], \quad (18)$$

另外, 漂移率即  $B$  的变化率为

$$\dot{B} = a_1 (\delta \dot{\omega} + \delta \dot{M} + \delta \dot{\Omega} \cos i_1). \quad (19)$$

#### 4.1.2 平面的变化

在摄动作用下, 平面法线会发生转动, 即平面转动。法线的转动由  $\theta$  和  $\phi$  决定, 从而平面转动量也由  $\theta$  和  $\phi$  决定。

$\theta$  和  $\phi$  的变化速率为

$$\Phi = \frac{2\mathcal{B}}{1 + 3\cos^2\gamma}, \quad (20)$$

$$\Theta = \frac{A}{C^2(1 + 3\cos^2\gamma) + 4A^2} \left[ -2C\sqrt{1 + 3\cos^2\gamma} + \frac{3C\sin(2\gamma)\mathcal{B}}{\sqrt{1 + 3\cos^2\gamma}} \right], \quad (21)$$

其中

$$\alpha = \frac{e_i \delta M}{\delta e}, \quad \mathcal{C} = \frac{a_1 \sin^2 i_1 \delta \Omega \delta \mathcal{Q}}{\sqrt{(\delta \Omega \sin i_1)^2 + \delta i^2}}, \quad \beta = \frac{\delta i \delta \mathcal{Q} \sin i_1}{(\delta \Omega \sin i_1)^2 + \delta i^2},$$

$$\mathcal{B} = \alpha + \delta \mathcal{C} + \delta M + \beta \alpha$$

$J_2$  摄动下, 式(19)、(20)和(21)中主从星轨道根数差的变化速率  $\delta \alpha$ 、 $\delta \mathcal{C}$  和  $\delta M$  的表达式见参考文献[11]。

#### 4.2 $J_2$ 摄动下相对轨道构形的数值仿真

从前两个小节知道, 通过分析  $\mathcal{B}$ 、 $\Theta$  及  $\Phi$  的变化, 可以知道摄动作用下, 卫星编队飞行相对轨道的变化趋势及变化量。但是从方程(9)和(10)的推导过程可知, 相对轨道的漂移率和转动率公式只适用于主星的偏心率  $e_1$  为小量, 并且主从星轨道偏心率之差  $\delta e$  不为零的情况。另外,  $\mathcal{B}$ 、 $\Theta$  及  $\Phi$  的表达式中轨道根数为平均轨道根数。下面以  $J_2$  摄动为例来具体分析相对轨道的变化。

在本例中, 主星轨道根数为

$$a_1 = 7\,500 \text{ km}, \quad e_1 = 0.005, \quad i_1 = 30^\circ, \quad \omega_1 = 30^\circ, \quad \Omega_1 = 45^\circ, \quad M_{10} = 0^\circ$$

主从星轨道根数差为

$$\delta a = 0, \quad \delta e = 0.001, \quad \delta i = 1^\circ, \quad \delta \omega = 0, \quad \delta \Omega = 0, \quad \delta M = 0^\circ$$

根据式(19)、(20)和(21), 可以计算出相对轨道的漂移率和转动率, 结果如下:

$$\mathcal{B} = -3.707\,190\,071\,687\,528 \text{ E} - 004, \quad \Phi = 5.787\,128\,541\,874\,584 \text{ E} - 015,$$

$$\Theta = -3.256\,028\,466\,929\,585 \text{ E} - 016$$

编队卫星运行3天后, 相对轨道的漂移量和转动量为

$$\Delta B = -95.853\,436\,700\,387\,04 \text{ km}, \quad \Delta \Phi = 1.496\,325\,110\,498\,231 \text{ E} - 009,$$

$$\Delta \Theta = -8.418\,816\,206\,189\,917 \text{ E} - 011$$

从上述分析可知,  $J_2$  摄动对相对轨道的影响以漂移为主, 卫星运行3天后相对轨道沿主星运动反方向(- $y$  方向)漂移了约95.85 km, 但由于转动率  $\Theta$  及  $\Phi$  非常小, 相对轨道并没有明显的转动。图2所示为用上述轨道根数通过仿真获得的相对轨道构形, 编队卫星运行3天。图中“°”表示从星在相对轨道的初始位置。相对轨道的漂移量很容易从数值仿真中得到。卫星运行3天后, 相对轨道沿  $y$  轴负方向漂移90 km, 该结果稍小于由解析公式得到的漂移量。图2中相对轨道的转动不明显。需要说明的是, 由解析公式(式(19)、(20)和(21))得到的漂移量和由数值仿真得到的漂移量存在少量的偏差, 经分析认为该偏差是由轨道根数差变化速率的表达式<sup>[11]</sup>的误差导致的。轨道根数差变化速率的表达式中的轨道根数均采用平均轨道根数, 并没有考虑  $J_2$  摄动对卫星轨道根数的短周期及长周期影响。

## 5 结 论

本文定义了一组新的参数来描述卫星编队飞行的相对运动, 这组参数称为相对轨道要素, 这些参数反映了卫星编队飞行相对轨道的几何特点, 可以方便的分析摄动对相对轨道构形的影响。文中指出当主星偏心率为小量时, 在主星轨道坐标系中相对轨道是一偏心率为  $\sqrt{3}/2$  的

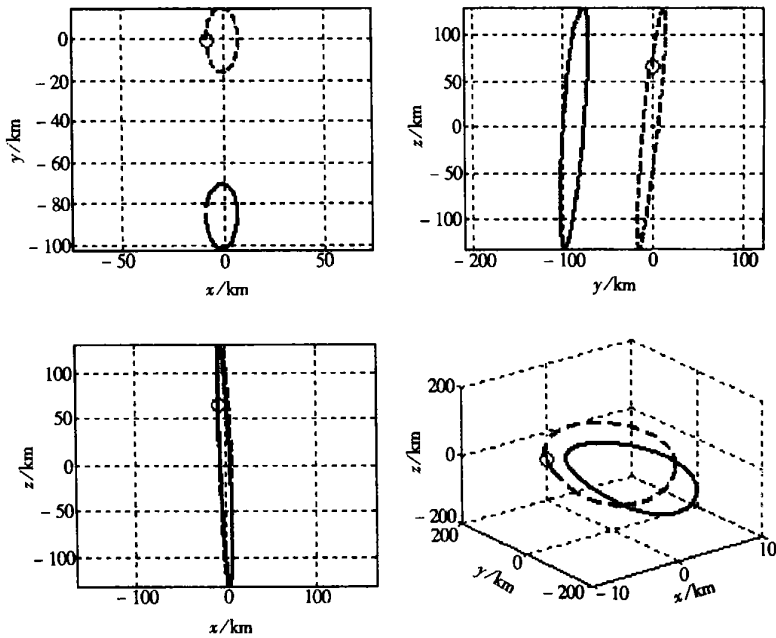


图 2  $J_2$  摄动下编队卫星相对轨道构形及其投影(运行 3 天)

椭圆柱和一个平面相交所的交线,用描述该椭圆柱和平面的参数即可定义相对轨道平面,以此为基础得到了描述编队卫星相对运动的相对轨道要素。在地球扁率摄动力的作用下,相对轨道构形的变化由两部分组成:椭圆柱的漂移导致相对轨道平面中心的漂移,漂移量用  $B$  表示。平面法线的转动引起相对轨道平面转动及相对轨道形状的改变,转动量为  $\theta$  和  $\phi$ 。文中还给出了摄动下相对轨道构形漂移率  $\dot{B}$  及转动率  $\dot{\theta}$  和  $\dot{\phi}$  的解析公式,用该解析公式可以定量的分析地球扁率摄动对卫星编队飞行相对轨道构形的变化以及相对轨道构形的漂移量和转动量。本文虽然只分析了地球扁率摄动,但这种方法同样适用其它的保守摄动力分析。

### [参 考 文 献]

- [1] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. Journal of the Aerospace Science, 1960, 27(5): 653—658, 674.
- [2] Karlgaard C D, Lutze F H. Second\_order relative motion equation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 27(1): 499—501.
- [3] Schweighart S A, Sedwick R J. High\_fidelity linearized  $J_2$  model for satellite formation flight[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(6): 1073—1080.
- [4] Vaddi S S, Vadali S R, Alfriend K T. Formation flying: accommodating nonlinearity and eccentricity perturbations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(2): 214—223.
- [5] Sedwick R J, Miller D W, Kong E M C. Mitigation of differential perturbations in clusters of formation flying satellites[R]. AAS/ AIAA Space Flight Mechanics Meeting, American Astronautical Society, AAS Paper, Feb, 1999, 99\_124.
- [6] Baoyin H, LI Jun\_feng, GAO Yun\_feng. Dynamical behaviors and relative trajectories of spacecrafts formation flying[J]. Journal of Aerospace Science and Technology, 2002, 4(6): 295—301.
- [7] Inalhan G, Tillerson M, How J P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric



- orbits[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1): 48—59.
- [8] Melton R G. Time explicit representation of relative motion between elliptical orbits[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(4): 604—610.
- [9] 李俊峰, 高云峰, 宝音贺西, 等. 卫星编队飞行动力学与控制研究[J]. 力学与实践, 2002, 24(2): 1—6.
- [10] 高云峰, 宝音贺西, 李俊峰. 卫星编队飞行动力学特性与相对轨道构形仿真[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002, 42(4): 458—461.
- [11] 孟鑫, 李俊峰, 高云峰. 编队飞行卫星相对运动的零  $J_2$  摄动条件研究[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(2): 219—223.
- [12] LI Jun\_feng, MENG Xin, GAO Yun\_feng, et al. Study on relative orbital configuration in satellite formation flying[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 21(1): 87—94.
- [13] 章仁为. 航天器轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998.
- [14] 李俊峰, 孟鑫, 高云峰, 等.  $J_2$  摄动对编队飞行卫星相对轨道构形的影响[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(2): 224—227, 251.

## Useful Relative Motion Description Method for Perturbations Analysis in Satellite Formation Flying

MENG Xin, LI Jun\_feng, GAO Yun\_feng

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

**Abstract:** A set of parameters called relative orbital elements were defined to describe the relative motion of the satellites in the formation flying. With the help of these parameters, the effect of the perturbations on the relative orbit trajectory and geometric properties of satellite formation can be easily analyzed. First, the relative orbital elements are derived, and pointed out: if the eccentricity of the leading satellite is a small value, the relative orbit trajectory is determined by the intersection between an elliptic cylinder and a plane in the leading satellite orbit frame reference; and the parameters that describe the elliptic cylinder and the plane can be used to obtain the relative orbit trajectory and the relative orbital elements. Second, by analyzing the effects of gravitational perturbations on the relative orbit using the relative orbital elements, it is found that the propagation of a relative orbit consists of two parts: one is the drift of the elliptic cylinder; and the other is the rotation of the plane resulted from the rotation of the normal of the plane. Meanwhile, the analytic formulae for the drift and rotation rates of a relative trajectory under gravitational perturbations are presented. Finally, the relative orbit trajectory and the corresponding changes were analyzed with respect to the  $J_2$  perturbation.

**Key words:** satellite formation flying; relative orbital element; gravitational perturbation; drift rate; rotation rate