文章编号: 1000_0887(2004) 04_0425_08

第二梯度流体的蠕变流和热传导相似解*

M. 禹 儒 索一

(阿夫坚 考卡特裴大学 技术教育学院 力学教育系, TR_03200, 阿夫坚, 土耳其)

(周哲 玮推 荐)

摘要: 给出了在笛卡儿坐标系中, 忽略惯性的缓慢流动的二维运动方程和二阶梯度流体的传热方程• 当 $Re \ll 1$ 时, 若从运动方程中简单地省略惯性项, 则结果方程的解仍然近似有效• 事实上, 从无量纲的动量和能量方程也可导出这一结论• 利用李群分析, 知道求得的方程是对称的• 李代数包括 4 个有限参数和一个无限参数组成的李群变换, 其中一个是比例对称变换, 另一个是平移变换• 利用对称性求得两种不同形式的解• 利用 x 和 y 坐标的平移, 给出了指数形式的精确解• 对于比例对称变换, 更多地涉及到常微分方程, 只能给出级数形式的近似解, 最后讨论了某些边值问题•

关 键 词: 蠕变流; 热传导; 李群
中图分类号: O357; O152. 9 文献标识码: A

引 言

第二梯度流概念可以看作消除记忆项的牛顿流• 这样做了以后, 需求解速度场的高阶导数• 因此, 第二阶流体只能提供实际粘弹性性能的一个近似• 而高阶导数的物理意义, 即使有也是不清晰的• 通常采用 Rivlin Ericksen 第二阶流体, 对它作进一步的研究是必要的•

文[1] ~ [4] 在特例的基础上, 定性地研究了 Stokes 流动的解和第二梯度蠕变流动的解• Tanner[1] 给出了如下定理: “给定速度边界条件的任何牛顿蠕变流速度场, 也是具相同边界条件的第二梯度流流体的解”• Huilgol[2] 建立了 Stokes 解且仅是第二梯度流体平面蠕变流解的判定准则• Fosdick 和 Rajagopal[3] 讨论了该问题的唯一性, 并给出 Tanner 定理的推广• 他们还导出了浸没在第二梯度蠕变流中某固定物体的阻力公式•

Tanner 定理实际上模糊了第二梯度蠕变流运动较对应的 Stokes 运动更高阶的事实, 并且求解时需要附加边界条件• Rajagopal[4] 提到了这个问题, 他讨论了多孔平直板上的蠕变流动• 他的研究表明, 当第二梯度流有解时, 对应的 Stokes 问题却没有解• 他还讨论了将 Tanner 定理推广到三维流动的问题• 文[5] 详细地讨论了不同类型流体中附加边界条件问题• Bourgin 和 Tichy[6] 给出了在不平行多孔壁间的第二梯度流体蠕变流的相似解• 并提出了解的数值类型和摄动类型• Galdi 和 Rajagopal[7] 定性地研究了物体在第二梯度流体中缓慢运动的问题• 他们的结果表明, 若流体上没有体力作用, 并且运动速度足够小, 则其解与 Stokes 解重合•

---

* 收稿日期: 2002_10_31
作者简介: M. 禹儒索一. Tel: 90_272_228 13 11(217) ; E_mail: yurusoy@ aku. edu. tr
本文原文为英文, 由吴承平 译, 张禄坤 校.

本文在笛卡儿坐标系中, 讨论第二梯度流体的定常平面蠕变流和传热方程• 将李群理论[8]应用于运动方程, 找到了方程组的对称性• 该方程可以作比例对称变换, 可以作平移对称变换或无限单参数对称变换• 给出了两个不同类型的解: 其一, 利用 x、y 坐标平移, 将偏微分方程变换为常微分方程, 求得了指数型精确解析解; 其二, 利用比例对称性变换原偏微分方程组• 这样得到的微分方程更具有普遍性, 求得了级数渐近解, 并给出了实际边值问题的解•

1 运动方程

第二梯度流体流动的无量纲连续性方程、动量方程和能量方程为

$$u^*_x + v^*_y = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\rho(u^* u^*_x + v^* u^*_y) = -p^*_x + \mu(u^*_{xx} + u^*_{yy}) + \alpha_1(5u^*_x u^*_{xx} + u^*_x u^*_{yy} + \\ u^* u^*_{xxx} + v^* u^*_{yyy} + u^* u^*_{yyx} + 2v^*_x v^*_{xx} + u^*_y u^*_{yx} + u^*_y v^*_{xx} + v^* u^*_{yxx}),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\rho(u^* v^*_x + v^* v^*_y) = -p^*_y + \mu(v^*_{xx} - u^*_{xy}) + \alpha_1(5u^*_x u^*_{xy} - u^*_x v^*_{xx} - \\ v^* u^*_{yyx} + u^* v^*_{xxx} - v^* u^*_{xxx} + 2u^*_y u^*_{yy} - v^*_x u^*_{xx} + v^*_x u^*_{yy} - u^* u^*_{yxx}),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\rho C_p(u^* \theta^*_x + v^* \theta^*_y) = K(\theta^*_{xx} + \theta^*_{yy}) + \mu(4(u^*_x)^2 + (u^*_y + v^*_x)^2) + \\ \alpha_1(u^*_{xx}(4u^* u^*_x - v^* v^*_x - v^* u^*_y) + u^*_{yy}(v^* v^*_x + v^* u^*_y) + \\ v^*_{xx}(u^* u^*_y + u^* v^*_x) + u^*_{xy}(4v^* u^*_x + u^* v^*_x + u^* u^*_y)),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度分量• x 和 y 分别为沿表面方向和垂直于表面方向的距离• θ 为温度, p 为压力, K 为热传导系数, ρ 为密度, μ 为粘度, C_p 为比热, α_1 为材料模量• 由(4)知, 方程(2)和(3)不耦合• 现对方程(1)~(4)无量纲化, 引入无量纲变量

$$x = \frac{x^*}{L},\ y = \frac{y^*}{L},\ u = \frac{u^*}{U},\ v = \frac{v^*}{U},\ \theta = \frac{\theta^*}{\theta_*},\ p = \frac{p^* \mu U}{L}, \tag{5}$$

将方程(5)代入方程(1)~(4), 有

$$u_x + v_y = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}Re(uu_x + vu_y) = -p_x + (u_{xx} + u_{yy}) + \delta(5u_x u_{xx} + u_x u_{yy} + \\ uu_{xxx} + vu_{yyy} + uu_{yyx} + 2v_x v_{xx} + u_y u_{yx} + u_y v_{xx} + vu_{yxx}),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}Re(uv_x + vv_y) = -p_y + (v_{xx} - u_{xy}) + \delta(5u_x u_{xy} - u_x v_{xx} - \\ vu_{yyx} + uv_{xxx} - vu_{xxx} + 2u_y u_{yy} - v_x u_{xx} + v_x u_{yy} - uu_{yxx}),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}Re(u\theta_x + v\theta_y) = \delta_1(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \delta_2(4(u_x)^2 + (u_y + v_x)^2) + \\ \delta\delta_2(u_{xx}(4uu_x - vv_x - vu_y) + u_{yy}(vv_x + vu_y) + \\ v_{xx}(uu_y + uv_x) + u_{xy}(4vu_x + uv_x + uu_y)),\end{aligned} \tag{9}$$

其中无量纲系数定义如下:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu},\ \delta = \frac{\alpha_1 U^3}{L},\ \delta_1 = \frac{1}{Pr} = \frac{K}{\mu C_p},\ \delta_2 = E_c = \frac{U^2}{C_p \theta_*}, \tag{10}$$

这里 Re 是雷诺数, E_c 是埃克特特数, Pr 是普朗特数•

对蠕变流动 $(Re \ll 1)$, 忽略方程(7)~(9)的惯性项后, 得

$$u_x + v_y = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}-p_x + (u_{xx} + u_{yy}) + \delta(5u_x u_{xx} + u_x u_{yy} + uu_{xxx} + \\ vu_{yyy} + uu_{yyx} + 2v_x v_{xx} + u_y u_{yx} + u_y v_{xx} + vu_{yxx}) = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$-p_y + (v_{xx} - u_{xy}) + \delta(5u_x u_{xy} - u_x v_{xx} - vu_{yyx} + uv_{xxx} -$$

$$vu_{xxx} + 2u_y u_{yy} - v_x u_{xx} + v_x u_{yy} - uu_{yxx}) = 0, \tag{13}$$

$$(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \delta_1^* (4(u_x)^2 + (u_y + v_x)^2) + \delta_2^* (u_{xx}(4uu_x - vv_x - vu_y) + u_{yy}(vv_x + vu_y) + v_{xx}(uu_y + uv_x) + u_{xy}(4vu_x + uv_x + uu_y)) = 0, \tag{14}$$

其中, $\delta_1^* = \delta_2/\delta_1$, $\delta_2^* = \delta\delta_2/\delta_1$• 在导出方程(11)~(13)中, 用到了第二梯度流体材料系数的热力学相容性条件, 即 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$[9]• 热力学相容性条件及材料系数符号的详细内容请参见文[10]• 在求解蠕变流动($Re \ll 1$)的近似解时, 忽略方程(2)~(4)的惯性项, 并利用其连续性条件•

2 方程的对称群

对方程(11)~(14)利用李群理论求其精确解• 首先要求在无限小李点变换下, 方程组保持不变

$$\begin{cases} x^* = x + \epsilon\xi_1(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2), \\ y^* = y + \epsilon\xi_2(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2), \\ u^* = u + \epsilon\eta_1(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2), \\ v^* = v + \epsilon\eta_2(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2), \\ p^* = p + \epsilon\eta_3(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2), \\ \theta^* = \theta + \epsilon\eta_4(x, y, u, v, p, \theta) + O(\epsilon^2)• \end{cases} \tag{15}$$

通过冗长、直接的代数运算导得了微元(关于微元计算的详细讨论参见文[8])

$$\begin{cases} \xi_1 = ax + b,\ \xi_2 = ay + c,\ \eta_1 = au,\ \eta_2 = av, \\ \eta_3 = d,\ \eta_4 = 2a\theta + \gamma(x, y),\ \dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\gamma}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

从而方程组成为容许有 4 个有限参数, 而没有无限参数的李群变换• 参数 a 对应于变量 x、y、u、v、θ 的比例系数• 参数 b、c、d 分别对应于 x、y、p 坐标的平移• 下一节的相似解(群不变解)对应于上述对称性变换•

3 平移对称性变换

本节考虑 x 和 y 坐标的平移, 因此取 $a = d = \gamma(x, y) = 0$• 得到相似变换的特征方程为

$$\frac{dx}{b} = \frac{dy}{c} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{0} = \frac{dp}{0} = \frac{d\theta}{0}; \tag{17}$$

相似变量和相似函数为

$$\xi = y - mx,\ u = f(\xi),\ v = g(\xi),\ p = h(\xi),\ \theta = k(\xi), \tag{18}$$

其中 $m = c/b$ 为任意参数•

将相似变量和相似函数代入原运动方程, 得

$$g' - mf' = 0, \tag{19}$$

$$mh' + (1 + m^2)f'' + \delta(1 + m^2)[-2m(1 + m^2)f'f'' - mff''' + gf'''] = 0, \tag{20}$$

$$-h' + m(1 + m^2)f'' + \delta(1 + m^2)[2(1 + m^2)f'f'' - mff''' + mgf'''] = 0, \tag{21}$$

$$k'(1 + m^2) + \delta_1^*[4m^2f'^2 + (f' - mg')^2] + \delta_2^*[m^2f''(-4mff' + mgg' - gf') + f''(gf' - mgg') + m^2g''(ff' - mfg') - mf''(-4mgg' - mfg' + ff')] = 0• \tag{22}$$

利用方程(19)并消去方程(20)和(21)中的 $h(\xi)$，可得线性方程

$$f''' + \frac{1}{\alpha\delta}f'' = 0. \tag{23}$$

解f、g、h、k，得到结果

$$f = (\alpha\delta)^2 c_1 \mathrm{e}^{-\xi/(\alpha\delta)} + c_2\xi + c_3, \tag{24}$$

$$g = m\left[(\alpha\delta)^2 c_1 \mathrm{e}^{-\xi/(\alpha\delta)} + c_2\xi + c_3\right] + \alpha, \tag{25}$$

$$h = 2(1+m^2)\,\delta c_1(\alpha\delta)\left[\frac{1}{2}(\alpha\delta)c_1\mathrm{e}^{-2\xi/(\alpha\delta)} - c_2\mathrm{e}^{-\xi/(\alpha\delta)}\right] + c_4, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} k = -\frac{m^4+2m^2+1}{m^2+1}\Bigg[&\delta_1^*\left(\frac{c_1^2(\alpha\delta)^4}{4}\mathrm{e}^{-2\xi/(\alpha\delta)} - 2c_1c_2(\alpha\delta)^3\mathrm{e}^{-\xi/(\alpha\delta)} + \frac{c_2^2\xi^2}{2}\right) + \\ &\alpha\delta_2^*\left(c_2c_1(\alpha\delta)^2\mathrm{e}^{-\xi/(\alpha\delta)} - \frac{c_1^2(\alpha\delta)^3}{4}\mathrm{e}^{-2\xi/(\alpha\delta)}\right)\Bigg] + c_5\xi + c_6, \end{aligned} \tag{27}$$

其中 c_1, …, c_6 和 α 均为积分常数, 回代到原变量, 得到

$$u(x,y) = (\alpha\delta)^2 c_1\mathrm{e}^{-(y-mx)/(\alpha\delta)} + c_2(y-mx) + c_3, \tag{28}$$

$$v(x,y) = m\left[(\alpha\delta)^2 c_1\mathrm{e}^{-(y-mx)/(\alpha\delta)} + c_2(y-mx) + c_3\right] + \alpha, \tag{29}$$

$$p(x,y) = 2(1+m^2)\,\delta c_1(\alpha\delta)\left[\frac{1}{2}(\alpha\delta)c_1\mathrm{e}^{-2(y-mx)/(\alpha\delta)} - c_2\mathrm{e}^{-(y-mx)/(\alpha\delta)}\right] + c_4, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \theta(x,y) = -\frac{m^4+2m^2+1}{m^2+1}\Bigg[&\delta_1^*\Bigg(\frac{c_1^2(\alpha\delta)^4}{4}\mathrm{e}^{-2(y-mx)/(\alpha\delta)} - \\ &2c_1c_2(\alpha\delta)^3\mathrm{e}^{-(y-mx)/(\alpha\delta)} + \frac{c_2^2(y-mx)^2}{2}\Bigg) + \alpha\delta_2^*\Bigg(c_2c_1(\alpha\delta)^2\mathrm{e}^{-(y-mx)/(\alpha\delta)} - \\ &\frac{c_1^2(\alpha\delta)^3}{4}\mathrm{e}^{-2(y-mx)/(\alpha\delta)}\Bigg)\Bigg] + c_5(y-mx) + c_6. \end{aligned} \tag{31}$$

注意到 m 为任意参数, 可取任意值. 当在运动方程($\delta = 0$)中忽略第二梯度影响时, 解(28)~(31)不满足牛顿方程. 事实上, 指数项正很好地反映了第二梯度影响. 因此, 任何边界条件的集合, 得到非零的 c_1、α 值, 可导得第二梯度流体的速度剖面, 但得不出牛顿流体的速度剖面. 特殊边值问题将稍后讨论.

4 比例对称性变换

为此, 在方程(16)中, 取参数 a 为任意值, 其他参数取为0, 其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\theta}. \tag{32}$$

相似变量和相似函数为

$$\xi = \frac{y}{x},\quad u = xf(\xi),\quad v = xg(\xi),\quad p = h(\xi),\quad \theta = x^2 r(\xi). \tag{33}$$

将这些新变量代入原方程组, 得到如下常微分方程组

$$f - \xi f' + g' = 0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\xi h' + f''(1+\xi^2) + \delta\Big\{(5\xi^2+1)f''(f-\xi f') - f\big[(3\xi^2+1)f'' + \\ &\quad \xi(\xi^2+1)f'''\big] + g\big[2\xi f'' + (\xi^2+1)f'''\big] - \xi f'f'' + \\ &\quad \xi^2 g''\big[f' + 2(g-\xi g')\big]\Big\} = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &-h' + \xi(\xi g'' + f'') + \delta\Big\{-\xi(f-\xi f')(5f'' + \xi g'') + g\big[(3\xi^2+1)f'' + \\ &\quad \xi(\xi^2+1)f'''\big] + 2f'f'' - f(3\xi^2 g'' + \xi^3 g''' + 2\xi f'' + \xi^2 f''') + \end{aligned}$$

$$(1-\xi^2)f''(g-\xi g')\Big\}=0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&r''(\xi^2+1)+2r-2r'\xi+\delta_1^*[\xi^2(4f'^2+g'^2)+\xi(-8ff'-2f'g'-2gg')+\\&\quad g^2+f'^2+2f'g]\,\delta_2^*[\xi^2(3f''f'g+g''fg-f''g^2+g''ff'+4f''f^2+\\&\quad f''fg')+\xi(-f''ff'-f''gg'-5f''fg)+(f''g^2+f''f'g)]=0\cdot\end{aligned} \tag{37}$$

消去方程(35)和(36)中的 h 并利用方程(34)

$$(1+\xi^2)f''+\delta[-4\xi^2ff''-\xi(1+\xi^2)ff'''+4\xi gf''+(1+\xi^2)gf''']=0\cdot \tag{38}$$

由于上述方程实质上是变系数和非线性的,因此宜于采用级数型渐近解• 利用级数

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^k,\quad g=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\xi^k,\quad r=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\xi^k \tag{39}$$

可以构造其渐近解• 将这些级数代入方程(34)可以得到如下递推关系

$$b_{k+1}=\frac{k-1}{k+1}a_k\qquad(k=0,1,2,\cdots)\cdot \tag{40}$$

类似地,由方程(38)可以得到如下方程组的集合

$$2a_2+\delta(6b_0a_3)=0\qquad(k=0), \tag{41}$$

$$6a_3+\delta(-6a_0a_3+8b_0a_2+6b_1a_3+24b_0a_4)=0\qquad(k=1), \tag{42}$$

$$\begin{aligned}&(2a_2+12a_4)+\delta(-8a_0a_2-6a_1a_3-24a_0a_4+8b_1a_2+30b_0a_3+\\&\quad 6b_2a_3+24b_1a_4+60b_0a_5)=0\qquad(k=3),\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&[a_{k+2}(k+2)(k+1)+a_kk(k-1)]+\delta\Big[-4\sum_{n=2}^{k}a_{k-n}a_nn(n-1)-\\&\quad\sum_{n=3}^{k+2}a_{k+2-n}a_nn(n-1)(n-2)-\sum_{n=3}^{k}a_{k-n}a_nn(n-1)(n-2)+\\&\quad 4\sum_{n=2}^{k+1}b_{k+1-n}a_nn(n-1)+\sum_{n=3}^{k+3}b_{k+3-n}a_nn(n-1)(n-2)+\\&\quad\sum_{n=3}^{k+1}b_{k+1-n}a_nn(n-1)(n-2)\Big]=0\qquad(k=3,4,5,\cdots)\cdot\end{aligned} \tag{44}$$

系数 a_k 和 b_k 由解上述方程组得出,函数 f 和 g 为

$$f(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2-\frac{a_2}{3\delta b_0}\xi^3+\left(\frac{1}{12\delta^2b_0}-\frac{a_0}{6\delta b_0^2}-\frac{1}{3}\right)a_2\xi^4+\cdots, \tag{45}$$

$$g(\xi)=b_0-a_0\xi+\frac{1}{3}a_2\xi^3-\frac{a_2}{6\delta b_0}\xi^4+\cdots; \tag{46}$$

$h(\xi)$ 和 $r(\xi)$ 分别由方程(35)或(36),方程(37)和(39)确定,

$$h(\xi)=\gamma+4\delta(b_0+a_1)a_2\xi+2a_2\left[2\delta(a_2-2a_0)-\left(1+\frac{a_1}{b_0}\right)\right]\xi^2+\cdots, \tag{47}$$

$$r(\xi)=c_0+\xi c_1-\left(c_0+\frac{\delta_1^*[a_1^2+2a_1b_0]+\delta_2^*[12a_2b_0^2+2a_2a_1b_0]}{2}\right)\xi^2+\cdots; \tag{48}$$

用原变量表示

$$u(x,y)=a_0x+a_1y+a_2\frac{y^2}{x}-\frac{a_2}{3\delta b_0}\frac{y^3}{x^2}+\left(\frac{1}{12\delta^2b_0}-\frac{a_0}{6\delta b_0^2}-\frac{1}{3}\right)a_2\frac{y^4}{x^3}+\cdots, \tag{49}$$

$$v(x,y)=b_0x-a_0y+\frac{1}{3}a_2\frac{y^3}{x^2}-\frac{a_2}{6\delta b_0}\frac{y^4}{x^3}+\cdots, \tag{50}$$

$$p(x,y)=\gamma+4\delta(b_0+a_1)a_2\frac{y}{x}+2a_2\left[2\delta(a_2-2a_0)-\left(1+\frac{a_1}{b_0}\right)\right]\frac{y^2}{x^2}+\cdots, \tag{51}$$

$$\theta(x,y)=c_0x^2+yxc_1-\left(c_0+\frac{\delta_1^*[a_1^2+2a_1b_0]+\delta_2^*[12a_2b_0^2+2a_2a_1b_0]}{2}\right)y^2+\cdots \tag{52}$$

注意到系数 a_2 与第二梯度解相关, 当 $a_2=0$ 时, 方程满足牛顿解•

5 边值问题

本节给出几种对称类型的边值问题例子•

5.1 平移对称性变换边值问题

本小节给出两个例子• 第一例子的解同时取决于 x 和 y 坐标, 第二例子的解仅取决于 y 坐标•

第一例考虑如下边界条件:

$$\begin{cases} u(0,y)=U_0(1-e^{-\alpha y}),\ v(x,\infty)=V_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\infty)=0,\ p(-\infty,y)=p_0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,\infty)=0,\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(x,\infty)=0,\ \theta(x,\infty)=\theta_0 \end{cases} \tag{53}$$

对方程(28)~(31)应用边界条件, 得

$$u(x,y)=U_0(1-e^{-a(y-mx)}), \tag{54}$$

$$v(x,y)=V_0-mU_0e^{-a(y-mx)}, \tag{55}$$

$$p(x,y)=(1+m^2)\delta U_0^2a^2e^{-2a(y-mx)}+p_0, \tag{56}$$

$$\theta(x,y)=-\frac{m^4+2m^2+1}{m^2+1}\frac{U_0^2}{4}e^{-2a(y-mx)}\left[\delta_1^*-\frac{\delta_2^*}{\delta}\right]+\theta_0, \tag{57}$$

其中

$$a=\frac{1}{\alpha\delta} \tag{58}$$

且 α 取为正• 当 $m=0$, 解(54)便变为 Rajagopal[4] 给出的解•

第二例子来源于地质问题• 假设岩浆流体为第二梯度流体, 其上覆一层岩板, 岩板位于 $y=0$ 处, 取 y 的正向为从岩板垂直向下, 边界条件为

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0,\ u(x,\infty)=0,\ v(x,\infty)=-v_0, \\ p(x,\infty)=p_0,\ \theta(x,0)=\theta_0,\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(x,\infty)=0, \end{cases} \tag{59}$$

其中 u_0 为岩板速度, v_0 为岩浆流体渗入岩板的速度, p_0 为岩浆流体深处的压力•

解(28)~(31)变为

$$u(y)=u_0e^{y/(v_0\delta)}, \tag{60}$$

$$v=-v_0, \tag{61}$$

$$p(y)=\frac{u_0^2}{\delta v_0^2}e^{2y/(v_0\delta)}+p_0, \tag{62}$$

$$\theta(y)=\frac{u_0^2}{4}\left(1-e^{2y/(v_0\delta)}\right)\left(\delta_1^*-\frac{\delta_2^*}{\delta}\right)+\theta_0, \tag{63}$$

其中 $\delta<0$• 事实上, 可以发现, 当上面覆盖着象砂岩或砾岩等多孔材料, 岩浆流体向地表上升时, 在几种岩浆流体间, 存在着类似上面的相互作用•

5.2 比例对称性变换边值问题

作为实例，研究通过多孔材料表面的泥浆流• 由于多孔性，泥浆的吸入速度增大• 泥浆流特别容易发生在周围受侵蚀尚少的，狭窄的又不对称的低洼盆地的坡度上• 泥浆流能够在由岩屑组成的、多孔的沉积物间伸展，沉淀物开始是较小的多孔砂质部分，以后是平原的充满砾石的部分• 初始时，y 方向的速度剖面是线性的，压力为 p_0• 其边界条件为

$$\begin{cases} u(x,0)=0,\ v(x,0)=-v_0x,\ u(-\infty,y)=u_0y,\ p(-\infty,y)=p_0, \\ \theta(x,0)=\theta_0x^2,\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(0,y)=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,\infty)=0 \end{cases} \tag{64}$$

对方程(49)～(52)应用该边界条件，得到

$$u(x,y)=u_0y, \tag{65}$$

$$v(x,y)=-v_0y, \tag{66}$$

$$p(x,y)=p_0, \tag{67}$$

$$\theta(x,y)=\theta_0x^2-\left(\theta_0+\frac{\delta_1^*[u_0^2+2u_0v_0]}{2}\right)y^2. \tag{68}$$

因为对于特殊边界条件，$a_2=0$，因而其解也满足牛顿流•

6 结论和说明

本文研究了第二梯度流体的蠕变流动• 对运动方程应用李群理论确定其变换对称性• 发现运动方程可以通过平移对称性变换求得指数型精确解• 通过比例对称性变换可以构造一种级数型的近似解• 最后，给出了几个边界条件集合下解的示例•

[参 考 文 献]

[1] Tanner R I. Plane creeping flow of incompressible second order fluids[J]. Phys Fluids, 1996, **9**: 1246.

[2] Huilgol R R. On uniqueness and non_uniqueness in the plane creeping flows of second order fluids [J]. Soc Ind Appl, 1973, **24**: 226.

[3] Fosdick R L, Rajagopal K R. Uniqueness and drag for fluids of second grade in steady motion[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1978, **13**: 131.

[4] Rajagopal K R. On the creeping flow of the second_order fluids[J]. J Non_Newtonian Fluid Mech, 1984, **15**: 239.

[5] Dunn J E, Rajagopal K R. Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis[J]. Internat J Engng Sci, 1995, **33**: 689.

[6] Bourgin P, Tichy J A. The effect of an additional boundary condition on the plane creeping flow of a second_order fluid[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1989, **24**: 561.

[7] Galdi G P, Rajagopal K R. Slow motion of a body in a fluid of second grade[J]. Internat J Engng Sci, 1997, **35**: 33.

[8] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer, 1989.

[9] Dunn J E, Fosdick R L. Thermodynamics stability and boundedness of fluids complexity 2 and fluids of second grade[J]. Arch Rational Mech Anal, 1971, **56**: 191.

[10] Rajagopal K R. On the boundary conditions for fluids of the differential type[A]. In: Navier_Stokes Equations and Related Nonlinear Problems[C]. New York: Plenum Press, 1994.

Similarity Solutions for Creeping Flow and Heat Transfer in Second Grade Fluid

Muhammet Y r soy
(Department of Mechanical Education , Faculty of Technical Education ,
Afyon Kocatepe University , TR_03200, Afyon , Turkey)

Abstract: The two dimensional equations of motions for the slowly flowing and heat transfer in second grade fluid are written in Cartesian coordinates neglecting the inertial terms. When the inertia terms are simply omitted from the equations of motions the resulting solutions are valid approximately for $Re \ll 1$. This fact can also be deduced from the dimensionless form of the momentum and energy equations. By employing Lie group analysis, the symmetries of the equations are calculated. The Lie algebra consists of four finite parameter and one infinite parameter Lie group transformations, one being the scaling symmetry and the others being translations. Two different types of solutions are found using the symmetries. Using translations in x and y coordinates, an exponential type of exact solution is presented. For the scaling symmetry, the outcoming ordinary differential equations are more involved and only a series type of approximate solution is presented. Finally, some boundary value problems are discussed.

Key words: creeping flow; heat transfer; Lie group