应用数学和力学, 第 26 卷 第 10 期(2005 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1253_08

离散型区间概率随机变量和模糊概率随机变量的数学期望*

肖 盛 燮[1], 吕 恩 琳[2]

(1. 重庆交通学院 工程力学系, 重庆 400074;
2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(陈山林推荐)

摘要: 研究离散型区间概率随机变量和离散型第二类模糊概率随机变量数学期望的性质及求解方法• 利用模糊分解定理, 把求模糊概率随机变量的数学期望问题化为求一系列区间概率随机变量的数学期望• 求区间概率随机变量的数学期望是一个典型的线性规划问题, 用单纯形方法推导了求区间概率随机变量数学期望的一个很实用的计算公式• 算例表明, 用该计算公式得到的结果和用数学规划方法得到的结果完全吻合, 但计算过程相对简单•

关 键 词: 区间数; 模糊集; 概率; 随机变量; 数学期望
中图分类号: O159 文献标识码: A

引 言

对连续型第二类模糊概率随机变量问题, 即连续型的清晰事件_模糊概率问题, 文献[1]给出了模糊密度函数、模糊密度随机变量及其分布函数、期望和方差的基本概念及定义和计算方法• 对离散型第二类模糊概率随机变量问题, 文献[2]给出了模糊概率随机变量及其分布函数、分布列和模糊数学期望的定义• 在此基础上, 本文利用模糊分解定理[3], 研究离散型第二类模糊概率随机变量数学期望的性质和具体计算方法•

1 离散型区间概率随机变量和模糊概率随机变量的数学期望[2~4]

本文用含 π 的式子表示满足封闭运算的区间概率和模糊概率, 有关概念详见文献[2,4]•

定义 1 对离散型区间概率 (nIP) 随机变量 ξ[4], 若

$$\xi(\omega_i) = x_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \mid L_i \leqslant p_i \leqslant U_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\} \tag{1}$$

* 收稿日期: 2003_09_16; 修订日期: 2005_06_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59878057); 国家科技攻关计划“西部开发科技行动”重大项目(2004BA901A02)
作者简介: 肖盛燮(1937—), 男, 四川营山人, 教授, 主要从事防灾减灾工程研究及模糊分析(联系人. Tel/Fax: + 86_23_62652765; E_mail: xiaoshengxie@sina.com)•

为 ξ 的数学期望(或期望区间)·

定义 2　对离散型模糊概率(nFP)随机变量 ξ[2]，若

$$\xi(\omega_i) = x_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称

$$\underset{\sim}{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{\sim}{\pi}_i = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda E_\lambda \xi \tag{2}$$

为 ξ 的模糊数学期望，其中 $E_\lambda \xi \overset{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_{i\lambda}$，这里 $\pi_{i\lambda}$ 是 $\underset{\sim}{\pi}$ 的 λ 水平截集·

定义 3　若离散型 nIP 随机变量 ξ 的概率区间分布列[4]为

$$Q(\xi = a_j) = \pi_j', \qquad j = 1, 2, \cdots, n',$$

则称

$$E'\xi = \sum_{j=1}^{n'} a_j \pi_j' = \left\{ \sum_{j=1}^{n'} a_j q_j \mid L_j' \leqslant q_j \leqslant U_j', j = 1, 2, \cdots, n' \text{ 且 } \sum_{j=1}^{n'} q_j = 1 \right\} \tag{3}$$

为 ξ 的数学区间期望(或期望区间)·

定义 4　若离散型 nFP 随机变量 ξ 的模糊概率分布列[2]为

$$\underset{\sim}{Q}(\xi = a_j) = \underset{\sim}{\pi}_j', \qquad j = 1, 2, \cdots, n',$$

则称

$$\underset{\sim}{E}'\xi = \sum_{i=1}^{n'} a_j \underset{\sim}{\pi}_j' = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda E_\lambda' \xi \tag{4}$$

为 ξ 的模糊数学期望，其中 $E_\lambda'\xi \overset{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_{i\lambda}'$·

可以证明 $E\xi = E'\xi$，$\underset{\sim}{E}\,\xi = \underset{\sim}{E}'\xi$，于是定义 1 与定义 3 等价，定义 2 与定义 4 等价·　我们以后通常采用定义 3 和 4，并约定 $n' = n$·

定理 1　设离散型 nIP ξ 的区间概率分布列为

$$Q(\xi = a_i) = \pi_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

又 $g(x)$ 是实变量 x 的单值实函数，则有

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g(a_i)\pi_i·$$

定理 2　设离散型 nFP ξ 的模糊概率分布列为

$$\underset{\sim}{Q}(\xi = a_i) = \underset{\sim}{\pi}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

又 $g(x)$ 是实变量 x 的单值实函数，则有

$$\underset{\sim}{E}\,g(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g(a_i)\underset{\sim}{\pi}_i·$$

定理 3　设离散型 nIP(ξ, η) 的联合区间概率分布列为

$$Q(\xi = a_i, \eta = b_j) = \pi_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n_1; j = 1, 2, \cdots, n_2,$$

又 $g(x, y)$ 是实变量 x、y 的单值实函数，则有

$$Eg(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} g(a_i, b_j)\pi_{ij}·$$

定理 4　设离散型 nFP(ξ, η) 的联合模糊概率分布列为

$$\underset{\sim}{Q}(\xi = a_i, \eta = b_j) = \underset{\sim}{\pi}_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n_1; j = 1, 2, \cdots, n_2,$$

又 $g(x, y)$ 是实变量 x、y 的单值实函数，则有

$$\underset{\sim}{E}g(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g(a_i,b_j)\underset{\sim}{\pi}_{ij}.$$

定义 5 设 $g(x,y)$ 是实变量 x、y 的单值实函数，对二维 $[n_1+n_2]$ IP(ξ,η) 定义

$$Eg(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g(a_i,b_j)\pi_i^{(\xi)}\cdot\pi_j^{(\eta)}=$$

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g(a_i,b_j)p_i^{(\xi)}\cdot p_j^{(\eta)}\mid p_i^{(\xi)}\in\pi_i^{(\xi)},\ i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}p_i^{(\xi)}=1;\ p_j^{(\eta)}\in\pi_j^{(\eta)},\ j=1,2,\cdots,n_2,\ \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(\eta)}=1\Big\}.$$

定义 6 设 $g(x,y)$ 是实变量 x、y 的单值实函数，对二维 $[n_1+n_2]$ FP(ξ,η) 定义

$$\underset{\sim}{E}g(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g(a_i,b_j)\underset{\sim}{\pi}_i^{(\xi)}\underset{\sim}{\pi}_j^{(\eta)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda E_\lambda g(\xi,\eta),$$

其中

$$E_\lambda g(\xi,\eta)\overset{\Delta}{=}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g(a_i,b_j)\pi_{i\lambda}^{(\xi)}\cdot\pi_{j\lambda}^{(\eta)}.$$

定理 5 IP 随机变量的数学区间期望具有如下性质：

1) 若 C 为常数，则 $EC=C$；

2) 设 k_1、k_2 为实数，则对任一 $[n_1+n_2]$ IP(ξ,η) 有

$$E(k_1\xi+k_2\eta)=k_1[E\xi]+k_2[E\eta];$$

3) 当 ξ、η 相互独立时，$E(\xi\eta)=[E\xi][E\eta]$.

证明 1) $EC=\sum_{i=1}^{n}C\pi_i=C\sum_{i=1}^{n}\pi_i=C.$

2) $$E(k_1\xi+k_2\eta)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}(k_1\xi+k_2\eta)\pi_{ij}=$$

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}(k_1a_i+k_2b_j)p_i^{(\xi)}\cdot p_j^{(\eta)}\mid p_i^{(\xi)}\in\pi_i^{(\xi)},\ i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$p_j^{(\eta)}\in\pi_j^{(\eta)},\ j=1,2,\cdots,n_2,\ \sum_{i=1}^{n_1}p_i^{(\xi)}=1,\ \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(\eta)}=1\Big\}=$$

$$\Big\{k_1\sum_{i=1}^{n_1}a_ip_i^{(\xi)}+k_2\sum_{j=1}^{n_2}b_jp_j^{(\eta)}\mid p_i^{(\xi)}\in\pi_i^{(\xi)},\ i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$p_j^{(\eta)}\in\pi_j^{(\eta)},\ j=1,2,\cdots,n_2,\ \sum_{i=1}^{n_1}p_i^{(\xi)}=1,\ \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(\eta)}=1\Big\}=$$

$$\Big\{k_1\sum_{i=1}^{n_1}a_ip_i^{(\xi)}\mid p_i^{(\xi)}\in\pi_i^{(\xi)},\ i=1,2,\cdots,n_1,\ \sum_{i=1}^{n_1}p_i^{(\xi)}=1\Big\}+$$

$$\Big\{k_2\sum_{j=1}^{n_2}b_jp_j^{(\eta)}\mid p_j^{(\eta)}\in\pi_j^{(\eta)},\ j=1,2,\cdots,n_2,\ \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(\eta)}=1\Big\}=$$

$$k_1\Big\{\sum_{i=1}^{n_1}a_ip_i^{(\xi)}\mid p_i^{(\xi)}\in\pi_i^{(\xi)},\ i=1,2,\cdots,n_1,\ \sum_{i=1}^{n_1}p_i^{(\xi)}=1\Big\}+$$

$$k_2\Big\{\sum_{j=1}^{n_2}b_jp_j^{(\eta)}\mid p_j^{(\eta)}\in\pi_j^{(\eta)},\ j=1,2,\cdots,n_2,\ \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(\eta)}=1\Big\}=$$

$k_1[E\xi] + k_2[E\eta]$•

3) 同理可证当 ξ、η 相互独立时, $E(\xi\eta) = [E\xi][E\eta]$•

定理 6 模糊概率(FP) 随机变量的数学期望具有如下性质:

1) 若 C 为常数, 则 $\underset{\sim}{E}\, C = C$;

2) 设 k_1、k_2 为任意实数, 则对任一 $[n_1 + n_2]$ 源模糊概率随机变量 (ξ, η) 有

$$\underset{\sim}{E}\,(k_1\xi + k_2\eta) = k_1[\underset{\sim}{E}\,\xi] + k_2[\underset{\sim}{E}\,\eta],$$

3) 当 ξ、η 相互独立时

$$\underset{\sim}{E}\,(\xi\eta) = [\underset{\sim}{E}\,\xi][\underset{\sim}{E}\,\eta]$$•

2 离散型区间概率随机变量和模糊概率随机变量的数学期望的算法

由定义 2, 欲计算 FP 随机变量的数学期望, 只须先计算 IP 随机变量的数学期望• 而求 IP 随机变量的数学期望区间只需求出该区间的上、下限即可• 设 nIP 随机变量 ξ 的概率分布列为

$$Q(\xi = a_i) = \pi_i = [L_i, U_i], \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则求 $E\xi$ 只需求解最优化问题($LPE^- \sim 1$) 和($LPE^+ \sim 1$):

$$(LPE^- \sim 1) \quad \min\left\{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n\right\}$$
$$\text{s.t. } p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1, L_i \leqslant p_i \leqslant U_i, i = 1, 2, \cdots, n \bullet \tag{5}$$
$$(LPE^+ \sim 1) \quad \max\left\{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n\right\}$$
$$\text{s.t. } p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1, L_i \leqslant p_i \leqslant U_i, i = 1, 2, \cdots, n \bullet \tag{6}$$

定理 7 设离散型 nIP 随机变量 ξ 的概率分布列为

$$Q(\xi = a_i) = \pi_i = [L_i, U_i], \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 则当 $n \geqslant 3$ 时

$$E\xi = \Big[\sum_{i=1}^{k-1}(a_i - a_k)U_i + a_k + \sum_{i=k+1}^{n}(a_i - a_k)L_i,\ \sum_{i=1}^{m-1}(a_i - a_m)L_i + a_m + \sum_{i=m+1}^{n}(a_i - a_m)U_i\Big], \tag{7}$$

其中, k、m 由下列条件(Ⅰ)、(Ⅱ) 分别唯一确定:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} U_1 + \cdots + U_{k-1} + L_k + \cdots + L_n \leqslant 1, \\ U_1 + \cdots + U_k + L_{k+1} + \cdots + L_n \geqslant 1, \end{cases} \qquad 2 \leqslant k \leqslant n-1; \tag{8}$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} L_1 + \cdots + L_{m-1} + U_m + \cdots + U_n \geqslant 1, \\ L_1 + \cdots + L_m + U_{m+1} + \cdots + U_n \leqslant 1, \end{cases} \qquad 2 \leqslant m \leqslant n-1 \bullet \tag{9}$$

证明 设 $E\xi = [E\xi^-, E\xi^+]$, 则 $E\xi^-$、$E\xi^+$ 分别是($LPE^- \sim 1$) 和($LPE^+ \sim 1$) 的最优值• 下面先求($LPE^- \sim 1$) 的最优值•

首先因为定理中 (L, U) 是可行的, 易证总存在 k, 使得

$$\begin{cases} U_1 + \cdots + U_{k-1} + L_k + \cdots + L_n \leqslant 1, \\ U_1 + \cdots + U_k + L_{k+1} + \cdots + L_n \geqslant 1, \end{cases} \qquad 2 \leqslant k \leqslant n-1;$$

其次, 在($LPE^- \sim 1$) 中, 令 $p_i = x_i + L_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则($LPE^- \sim 1$) 化为($LPE^- \sim 2$):

$$\min\left\{(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots + a_nL_n)\right\}$$
$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 - (L_1 + L_2 + \cdots + L_n),$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant U_i - L_i, \ i = 1, 2, \cdots, n;$$

进一步可转化为(LPE$^-$ ~ 3):

$$\max\{(-a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_nx_n)\}$$
$$\text{s.t. } x_i+y_i=U_i-L_i,\quad x_i\geqslant 0,\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1-(L_1+L_2+\cdots+L_n).$$

按线性规划单纯形法的大 M 法(LPE$^-$ ~ 3)可表为(LPE$^-$ ~ 3′):

$$\max\{(-a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_nx_n-Mz)\}$$
$$\text{s.t. } x_i+y_i=U_i-L_i,\quad x_i\geqslant 0,\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n+z=1-(L_1+L_2+\cdots+L_n).$$

列单纯形表得

表 1 单纯形法初始表

c_j	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	…	$-a_n$	0	0	0	…	0	$-M$	
X_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	y_1	y_2	y_3	…	y_n	z	b_i
	1	0	0	…	0	1	0	0	…	0	0	U_1-L_1
	0	1	0	…	0	0	1	0	…	0	0	U_2-L_2
a_{ij}	0	0	1	…	0	0	0	1	…	0	0	U_3-L_3
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	0	0	0	…	1	0	0	0	…	1	0	U_n-L_n
	1	1	1	…	1	0	0	0	…	0	1	$1-(L_1+L_2+\cdots+L_n)$
	$M-a_1$	$M-a_2$	$M-a_3$	…	$M-a_n$	0	0	0	…	0	0	

因为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 所以 $M-a_1\geqslant M-a_2\geqslant\cdots\geqslant M-a_n$, 于是, 当 $[1-(L_1+L_2+\cdots+L_n)]-(U_1-L_1)\leqslant 0$ 即 $U_1+L_2+\cdots+L_n\geqslant 1$ 时, 选表 1 中 $1-(L_1+L_2+\cdots+L_n)$ 所在行, $M-a_1$ 所在列的元为主元对表 1 进行单纯形替代得表 2.

表 2 当 $U_1+L_2+\cdots+L_n\geqslant 1$ 时单纯形法迭代结果

c_j	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	…	$-a_n$	0	0	0	…	0	$-M$	
X_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	y_1	y_2	y_3	…	y_n	z	b_i
	0	-1	-1	…	-1	1	0	0	…	0	-1	$(U_1+L_2+\cdots+L_n)-1$
	0	1	0	…	0	0	1	0	…	0	0	U_2-L_2
a_{ij}	0	0	1	…	0	0	0	1	…	0	0	U_3-L_3
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	0	0	0	…	1	0	0	0	…	1	0	U_n-L_n
	1	1	1	…	1	0	0	0	…	0	1	$1-(L_1+L_2+\cdots+L_n)$
	0	a_1-a_2	a_1-a_3	…	a_1-a_n	0	0	0	…	0	0	

因为

$$a_1-a_2\leqslant 0,\ a_1-a_3\leqslant 0,\ \cdots,\ a_1-a_n\leqslant 0,$$

所以(LPE$^-$ ~ 3) 的最优解为:

$$x_1=1-(L_1+L_2+\cdots+L_n),$$
$$y_1=(U_1+L_2+\cdots+L_n)-1,\quad y_i=U_i-L_i,$$
$$i=2,3,\cdots,n.$$

当 $[1-(L_1+L_2+\cdots+L_n)]-(U_1-L_1)\geqslant 0$ 即 $U_1+L_2+\cdots+L_n\leqslant 1$ 时, 选表 1 中 U_1-L_1 所在行, $M-a_1$ 所在列的元为主元对表 1 进行单纯形替代得表 3.

表 3　　　　当 $U_1+L_2+\cdots+L_n\leqslant 1$ 时单纯形法迭代结果

c_j	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$\cdots$	$-a_n$	0	0	0	$\cdots$	0	$-M$	
X_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	z	b_i
	1	0	0	$\cdots$	0	1	0	0	$\cdots$	0	0	U_1-L_1
	0	1	0	$\cdots$	0	0	1	0	$\cdots$	0	0	U_2-L_2
a_{ij}	0	0	1	$\cdots$	0	0	0	1	$\cdots$	0	0	U_3-L_3
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	0	0	0	$\cdots$	1	0	0	0	$\cdots$	1	0	U_n-L_n
	0	1	1	$\cdots$	1	-1	0	0	$\cdots$	0	1	$1-(U_1+L_2+\cdots+L_n)$
	0	$M-a_2$	$M-a_3$	$\cdots$	$M-a_n$	a_1-M	0	0	$\cdots$	0	0	

再对表 3 分情况进行单纯形替代, 可以得到当 $[1-(U_1+L_2+\cdots+L_n)]-(U_2-L_2)\leqslant 0$ 即 $U_1+U_2+L_3+\cdots+L_n\geqslant 1$ 时, $(\mathrm{LPE}^-\sim 3)$ 的最优解为

$$x_1=U_1-L_1,\quad x_2=1-(U_1+L_2+\cdots+L_n),$$

$$y_2=(U_1+U_2+\cdots+L_n)-1,\quad y_i=U_i-L_i,\qquad i=3,4,\cdots,n\bullet$$

当 $[1-(U_1+L_2+\cdots+L_n)]-(U_2-L_2)\geqslant 0$ 即 $U_1+U_2+\cdots+L_n\leqslant 1$ 时得表 4•

表 4　　　当 $U_1+U_2+L_3\cdots+L_n\geqslant 1$ 和 $U_1+U_2+\cdots+L_n\leqslant 1$ 时单纯形法迭代结果

c_j	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$\cdots$	$-a_n$	0	0	0	$\cdots$	0	$-M$	
X_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	z	b_i
	1	0	0	$\cdots$	0	1	0	0	$\cdots$	0	0	U_1-L_1
	0	1	0	$\cdots$	0	0	1	0	$\cdots$	0	0	U_2-L_2
a_{ij}	0	0	1	$\cdots$	0	0	0	1	$\cdots$	0	0	U_3-L_3
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	0	0	0	$\cdots$	1	0	0	0	$\cdots$	1	0	U_n-L_n
	0	0	1	$\cdots$	1	-1	-1	0	$\cdots$	0	1	$1-(U_1+U_2+L_3+\cdots+L_n)$
	0	0	$M-a_3$	$\cdots$	$M-a_n$	a_1-M	a_2-M	0	$\cdots$	0	0	

再对表 4 进行单纯形替代, ……, 如此作下去, 不难得到: 当

$$\begin{cases} U_1+\cdots+U_{k-1}+L_k+\cdots+L_n\leqslant 1, \\ U_1+\cdots+U_k+L_{k+1}+\cdots+L_n\geqslant 1 \end{cases}$$

时$(\mathrm{LPE}^-\sim 3)$ 的最优解为:

$$x_i=U_i-L_i,\quad i=1,2,\cdots,k-1,\quad x_k=1-(U_1+\cdots+U_{k-1}+L_k+\cdots+L_n),$$

$$y_k=(U_1+\cdots+U_k+L_{k+1}+\cdots+L_n)-1,\quad y_i=U_i-L_i,$$

$$i=k+1,k+2,\cdots,n\bullet$$

于是得$(\mathrm{LPE}^-\sim 2)$ 的最优解:

$$x_i=U_i-L_i,\qquad i=1,2,\cdots,k-1;$$

$$x_k=1-(U_1+\cdots+U_{k-1}+L_k+\cdots+L_n),\qquad x_i=0,\ i=k+1,k+2,\cdots,n\bullet$$

再由 $p_i=x_i+L_i,\ i=1,2,\cdots,n$ 得$(\mathrm{LPE}^-\sim 1)$ 的最优解:

$$x_i=U_i,\qquad i=1,2,\cdots,k-1;$$

$$x_k=1-(U_1+\cdots+U_{k-1}+L_{k+1}+\cdots+L_n),\qquad x_i=L_i,\ i=k+1,k+2,\cdots,n\bullet$$

于是得

$$E^{-}\xi=\sum_{i=1}^{k-1}a_iU_i+a_k[1-(U_1+\cdots+U_{k-1}+L_{k+1}+\cdots+L_n)]+\sum_{i=k+1}^{n}a_iL_i=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}(a_i-a_k)U_i+a_k+\sum_{i=k+1}^{n}(a_i-a_k)L_i\bullet$$

类似地,可由($LPE^{+}\sim1$)求得

$$E^{+}\xi=\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_m)L_i+a_m+\sum_{i=m+1}^{n}(a_i-a_m)U_i,$$

其中 m 满足

$$L_1+\cdots+L_{m-1}+U_m+\cdots+U_n\geqslant1,\ L_1+\cdots+L_m+U_{m+1}+\cdots+U_n\leqslant1\bullet$$

证毕•

利用 IP 随机变量数学期望的算法,根据公式(2)便可求出 FP 随机变量的模糊期望•

3 算 例

设离散型 4FP 随机变量 ξ 具有概率分布列

$$\underset{\sim}{\pi}_1=\underset{\sim}{Q}(\xi=-2)=([0.3,\ 0.4],\ 5(t-0.1),\ -10(t-0.5)),$$
$$\underset{\sim}{\pi}_2=\underset{\sim}{Q}(\xi=2)=([0.2,\ 0.3],\ 10(t-0.1),\ -5(t-0.5)),$$
$$\underset{\sim}{\pi}_3=\underset{\sim}{Q}(\xi=3)=([0.2,\ 0.4],\ 5t,\ -5(t-0.6)),$$
$$\underset{\sim}{\pi}_4=\underset{\sim}{Q}(\xi=5)=([0.1,\ 0.3],\ 10t,\ -10(t-0.4)),$$

试求 $\underset{\sim}{E}\xi$•

解

方法一 用本文所给方法计算•

对 $\forall\lambda\in[0,1]$

$$\pi_{1\lambda}=[0.1+0.2\lambda,\ 0.5-0.1\lambda],\quad \pi_{2\lambda}=[0.1+0.1\lambda,\ 0.5-0.2\lambda],$$
$$\pi_{3\lambda}=[0.2\lambda,\ 0.6-0.2\lambda],\quad \pi_{4\lambda}=[0.1\lambda,\ 0.4-0.1\lambda]\bullet$$

由定理 7 可求得 $E_\lambda\xi=[0.9\lambda,\ 3.2-1.3\lambda]$, 于是

$$\underset{\sim}{E}\xi=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda E_\lambda\xi=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[0.9\lambda,\ 3.2-1.3\lambda]=$$
$$\left([0.9,1.9],\ \frac{9}{10}t,\ \frac{32-13t}{10}\right)\bullet \tag{10}$$

方法二 用数学规划方法计算•

取 $\lambda=0.5$, 则

$$\pi_1=[0.2,\ 0.45],\ \pi_2=[0.15,\ 0.4],\ \pi_3=[0.1,\ 0.5],\ \pi_4=[0.05,\ 0.35]\bullet$$

与($LPE^{-}\sim1$)或($LPE^{+}\sim1$)对应的数学规划问题为求 $P^*=(p_1^*,p_2^*,p_3^*,p_4^*)$:

$$\min\ (\max)\{-2p_1+2p_2+3p_3+5p_4\}$$
$$\text{s.t. } p_1+p_2+p_3+p_4=1,\ 0.2\leqslant p_1\leqslant0.45,$$
$$0.15\leqslant p_2\leqslant0.4,\ 0.1\leqslant p_3\leqslant0.5,\ 0.05\leqslant p_4\leqslant0.35\bullet$$

解极小化问题,得最优解: $P^*=(0.45,\ 0.4,\ 0.1,\ 0.05)$; 目标函数最优值,即 $E\xi^{-}=0.45$• 解极大化问题,得最优解: $P^*=(0.2,\ 0.15,\ 0.3,\ 0.35)$; 目标函数最优值,即 $E\xi^{+}=2.55$• 于是解以上两个规划问题,得 $E\xi=[0.45,\ 2.55]$,与式(10) 取 $t=0.5$ 时的结果完全一致• 计算表明:当 λ 取[0, 1] 区间中任一值时,由求解($LPE^{-}\sim1$) 和($LPE^{+}\sim1$) 所得结果与式(10) 中 t 取与 λ 相同值时的计算结果都完全一致•

4 结 论

本文研究了离散型第二类模糊概率随机变量数学期望的求解方法• 根据模糊分解定理,为了求模糊概率随机变量的数学期望,必须先求区间概率随机变量的数学期望• 而求离散型区间概率随机变量的数学期望是一个典型的线性规划问题,本文用线性规划的单纯形方法推导了求离散型区间概率随机变量的数学期望的一个计算公式• 算例结果表明:用本文方法得到的结果和用数学规划方法所得结果完全吻合,但本文方法计算量相对较小,容易编程•

[参 考 文 献]

[1] 吕恩琳,钟佑明. 模糊密度随机变量的数学描述[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(8): 861—869.

[2] 吕恩琳,钟佑明. 模糊概率随机变量[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(4): 434—440.

[3] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and System: Theory and Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[4] 钟佑明, 吕恩琳, 王应芳. 区间概率随机变量及其数字特征[J]. 重庆大学学报, 2001, **24**(1): 24—27.

[5] 武小悦,沙基昌. 具有 Fuzzy 概率的 Fuzzy 可靠性问题的求解途径[J]. 模糊系统与数学, 1997, **11**(3): 8—11.

[6] 崔玉玲,李延杰. 清晰事件模糊概率(CF 型)模糊可靠性研究[J]. 系统工程理论与实践, 1991, **11**(6): 41—45.

[7] 王明文. 基于概率区间的 Bayes 决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 1997, **17**(11): 79—80.

[8] 肖盛燮, 王平义, 吕恩琳. 模糊数学在土木与水利工程中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.

Mathematical Expectation About Discrete Random Variable With Interval Probability (DRVIP) or Fuzzy Probability (DRVFP)

XIAO Sheng_xie[1], LÜ En_lin[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R. China)

Abstract: The character and an algorithm about DRVIP(discrete randam variable with interval probability) and the second kind DRVFP (discrete random variable with crisp event_fuzzy probability) are researched. Using the fuzzy resolution theorem, the solving mathematical expectation of a DRVFP can be translated into solving mathematical expectation of a series of RVIP. It is obvious that solving mathematical expectation of a DRVIP is typically solving a linear programming problem. A very functional calculating formula solving mathematical expectation of DRVIP was obtained by using the Dantzig' s simplex method. The example indicates that the result obtained by using the functional calculate formula fits together completely with the result obtained by using the linear programming method, but the process using the formula deduced is simpler.

Key words: interval number; fuzzy set; probability; random variable; mathematical expectation