

文章编号: 1000\_0887(2005) 10\_1198\_11

# 通过可渗透近球体的轴对称流动

F 阿亚日

(伽热大学 科学和艺术学院 数学系, 06500, 安卡拉, 土耳其)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 提出了可渗透近球体轴对称流动的分析方法 用修正边界条件的办法反映可渗透性 用正规摄动法求解了 Stokes 方程, 达到 的 2 阶修正 是描述不变形球体半径偏差的小参数 计算了阻力和流量, 并从几何方面和表面渗透性方面考查了计算结果 还尝试将此理论应用于过滤供水问题 小型的生态学上重要的水生生物体的过滤器, 被模型化为轴对称可渗透物体, 用扁球体或近球体建立了该问题的初级模型

**关键词:** Stokes 流; 摄动法; 过滤供水

**中图分类号:** O357.3      **文献标识码:** A

## 引 言

本文研究通过略微偏心的可渗透近球体的 Stokes 流动问题 研究表面的几何性质和渗透性, 对球体的总阻力和通过球体的流量的影响 作为过滤器的初级模型, 我们将可渗透近球体系统置入匀速的定常层流(球体置入前的流态)中, 当流体流经物体的孔隙时, 球体内外间的压力差产生一个力的作用 如果模拟的过滤器有很强的可渗透性, 流体很容易通过, 颗粒被分散在流体中 反之, 若渗透性很差, 流体不能充分穿过球体, 还造成越过过滤器时的压力降 本模型中, 过滤器性能完全取决于对应渗透性的最佳孔隙尺寸 过滤供水通常考虑低雷诺数流体, 捕获到的微粒很少有直径超过微米的, 同时过滤器单元也是很小的 过滤时的流速通常很低, 因此, 小型水生生物水动力学涉及的惯性可以忽略 因为忽略了惯性力, 微生物的运动仅承受粘性力的作用 无疑, Stokes 流动适用于本问题的研究<sup>[1-4]</sup>

当粘性力高于惯性力时, Stokes 流动需关心有障碍物时的流体运动 这里的障碍物(将过滤器作为整体来看)是可渗透的并且有一个对称轴 远离物体处的流动是均匀的并与轴平行 流函数  $\psi$  的 Stokes 方程为  $E^4 \psi = 0$ , 其中  $E$  为不可压缩粘性流体轴对称流动时的算子<sup>[5-7]</sup>

尽管 Stokes 流动的研究已经有 150 余年的历史, 但仅得到了一些特殊几何条件下的解析解 Stokes 于 1851 年求解了变换球问题<sup>[8]</sup>, Oberbeck 于 1876 年将这一结果变换到与轴平行的

收稿日期: 2004\_06\_18

作者简介: F 阿亚日, 副教授, 博士(Tel: + 90\_312\_212\_26\_01/2821; Fax: + 90\_312\_212\_22\_79; E\_mail: fayaz@yazi.edu.tr).

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校.

近球体问题<sup>[9]</sup>, Jeffrey 于 1922 年得到了浸没在一般线性流场中的椭球解<sup>[10]</sup>, 1936 年 Ray 采用直接解法得到了圆盘问题的解<sup>[11]</sup>

自 20 世纪 60 年代开始, 导出了在特殊正交坐标系中物体(表面与一个特殊坐标面有关)的解, 其中 Stokes 方程是简单可分离的。此外, 二维 Stokes 流动问题<sup>[7, 12, 5]</sup>也常用该方法处理, 该方法要求选择一个适当的拖带坐标系, 根据物体的几何条件的变化简化分离。再有, 文献<sup>[13~ 17]</sup>又把 Stokes 流动理论扩展到通过略微变形球体的流动问题

至此, 我们已有 Stokes 流动在不同几何条件下不多的解析解; 然而, 由于方程的线性性质, 提醒人们用基本解的叠加处理。因此, 通过近球体的轴对称流动, 其流函数可以展开为小参数的幂级数, 该小参数是不变形球体的偏差量。因此, 在适当边界条件下, 球坐标系中的可分离解就可在级数中逐项求出

## 1 基本方程和边界条件

设在不可压缩粘性流体中, 有一可渗透轴对称物体, 在距物体很远处, 有一速度为  $U$ 、压力为  $p$  的均匀流动。我们先考虑其外流场和内流场的控制方程和边界条件。假定运动的雷诺数十分小, 并且定常 Stokes 方程和连续性方程适用于该运动。因此不可压缩 Stokes 流动或蠕变粘性流动的控制方程为

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \quad (1)$$

和

$$\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{u}$  为流体速度,  $\mu$  为粘度,  $p$  为压力。引入矢量恒等式, 方程(1)还可展开:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3)$$

根据方程(2), 方程(3)中的项  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$  消失。将方程(3)代入方程(1), 对方程两边取旋度消去压力。在球坐标系中, 轴对称流动的速度分量可以用  $u_r$  表示为

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (5)$$

则方程(3)变为

$$E^4 \psi = 0, \quad (6)$$

其中算子  $E^2$  定义为

$$E^2 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (7)$$

本文建立的可渗透物体模型中, 可渗透的封闭球表面分隔出球外区域和球内区域。因此, 将通过可渗透近球体的流动分成两个部分: 球内流动和球外流动。我们用角标  $e$  和  $i$  分别表示球外区域和球内区域。对同一流体流动, 方程(6)在两个区域都成立, 并且球内区域的流动  $(\mathbf{u}^{(i)}, p^{(i)}, \psi^{(i)})$  通过表面  $S$  的边界条件和球外区域的流动  $(\mathbf{u}^{(e)}, p^{(e)}, \psi^{(e)})$  相联系。 $S$  上的边界条件为:

(1) 表面无滑移, 即

$$\mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{n}$  为外法向矢量;

( ) 表面过滤定律:

$$\mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{n} = k(p^{(i)} - p^{(e)}), \quad (9)$$

其中  $k$  为  $S$  的渗透系数 注意, 方程(9) 包含了流体的流出( $p^{(i)} > p^{(e)}$ ) 和流入( $p^{(i)} < p^{(e)}$ ) 还要注意, 粘性对正应力的贡献没有在方程(9) 中反映; 事实上, 由方程(8) 和方程(2) 可知, 在表面  $S$  上它为零

根据球坐标系中轴对称蠕变流动微分方程的一般解的存在性, 在相应边界条件下, 我们可以求得可渗透近球体问题的近似解析解 Sampson<sup>[18]</sup> 于 1891 年得到的一般解可用于球坐标系中任意几何条件的流动问题 该解可用流函数表示为

$$(r, \theta) = \sum_{n=2} (A_n r^n + B_n r^{-n+1} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+3}) \mathcal{F}_n(\theta), \quad (10)$$

其中  $\mathcal{F}_n(\theta)$  为连带的 Legendre 多项式, 即

$$\mathcal{F}_n(\theta) = -\frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d}{d\theta} \right]^{n-2} \left[ \frac{1-\cos^2\theta}{2} \right]^{n-1} \quad (11)$$

由方程(11) 可得到任意  $n$  阶的 Legendre 函数值 在球坐标系中, 因  $\theta = \cos^{-1} \mu$ , 则  $n = 2, 4, 6$  时的连带的 Legendre 多项式为

$$\mathcal{F}_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} \sin^2\theta,$$

$$\mathcal{F}_4(\cos\theta) = -\frac{1}{8} \sin^2\theta (1 - 5\cos^2\theta),$$

$$\mathcal{F}_6(\cos\theta) = \frac{1}{16} \sin^2\theta (1 - 14\cos^2\theta + 21\cos^4\theta)$$

将  $n = 2$  时的 Legendre 多项式代入方程(10), 就得到轴对称球体的一般解 将更高阶的 Legendre 多项式代入方程(10), 可得到变形球体类似的简单解; 当然, 新的系数须由边界条件确定(为得到近球体问题的 1 阶和 2 阶近似解, 我们将用到类似于多项式  $\mathcal{A}(\theta)$  和  $\mathcal{B}(\theta)$  的函数)

只要满足变形球体的边界条件, 求解 Stokes 方程问题就归结为相关问题对任意阶小参数的一个序列, 并在未变形球体上满足更为复杂的边界条件 此外,  $x$  轴正向无限远处均匀流动条件要求

$$\sim \frac{1}{2} U r^2 \sin^2\theta, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \quad (12)$$

假定变形球体表面满足如下方程

$$R(\theta) = r = a[1 + g(\theta)], \quad (13)$$

其中  $(r, \theta)$  为原点在半径  $r = a$  的未变形球体中心的球坐标系;  $0 < \epsilon \ll 1$  为无量纲小参数,

$g(\theta)$  为任意给定的函数, 它正比于 2 阶连带的 Legendre 多项式,

$$g(\theta) = 3 - 5\cos^2\theta \quad (14)$$

将函数  $g(\theta)$  代入表面  $S$  的边界条件, 得到与任意阶简单解的相容性条件

因此, 对于问题的更高阶的逼近, 必须计算  $r = R$  时的边界条件 如果记  $p$  为  $r = R$  时的压力差

$$p = p^{(i)}(r, \theta) - p^{(e)}(r, \theta),$$

则由方程(1)、(4)、(5) 可得压力和流函数间的关系:

$$\frac{p}{r} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} (E^2), \quad (15)$$

$$p = - \frac{E^2}{\sin r}, \quad (16)$$

任意阶的压力场,可由方程(15)、(16)的积分计算得到。在本例中,我们希望得到球坐标系中控制方程(6)的解,可渗透近球体的边界条件为方程(8)~(12)。因此,我们将寻求本问题如下形式的解:

$$= 0 + 1 + 2 + \quad (17)$$

取  $R = a(1 + g)$ ,把方程(8)和(9)展开成级数形式,就可以得到1阶解和2阶解的边界条件,并且是  $g(\ )$  和  $\ )$  的组合形式

我们还要计算无量纲阻力  $\mathcal{D}/6 aU$ ,将通过多孔球体和近球体流动的无量纲流量  $Q/a^2 U$ ,作为无量纲渗透率  $= k/a$  的一个函数

对作用在物体表面法向(压力)和切向(粘滞摩擦力)流体应力积分,得到由流函数表达的静止于流动中的轴对称物体的 Stokes 阻力。其球坐标系中的计算公式可以写为<sup>[5]</sup>

$$\mathcal{D} = \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \theta \left[ \frac{E^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] r d\theta \quad (18)$$

通常利用公式(18)计算轴对称物体的阻力是困难的,而应用极限定理<sup>[7,6]</sup>则要容易得多,即

$$\mathcal{D} = 8 \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-}{r \sin^2 \theta}, \quad (19)$$

其中  $r$  为半径,  $\ )$  为对应流体运动的流函数。通过表面  $S$  的瞬时体积流量为<sup>[5]</sup>:

$$Q = \int_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (20)$$

其中  $S_1$  表示  $\theta = \pi/2$  物体的前面一半,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  (速度的法向分量)可由边界条件确定。因此,通过可渗透近球体流动的流量可由如下公式计算:

$$Q = 2 \int_0^{\pi/2} k (p_0 + p_1 + p_2) r^2 \sin \theta d\theta \quad (21)$$

## 2 可渗透近球体内外区域及摄动问题的计算公式

设  $x$  正向速度为  $U(= U_0)$  的定常均匀流中,保持不动的可渗透近球体问题与通过固定不变球的流动问题密切相关。对于通过一固体球的 Stokes 流动,展开式中的导出项  $\ )$  可用无穷远处的均匀流确定。通过一球体流动问题的简单解满足球体几何条件,即

$$\phi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta \quad (22)$$

每一摄动场适合的边界条件都要求确定表面的法线。因为法线平行于表面(方程(13))的梯度,所以  $\mathbf{n}$  平行于  $\nabla \phi = [r - a - ag]$ 。因此,表面  $r = R = a(1 + g)$  的法向矢量和切向矢量可由如下式子计算:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r - \frac{g}{1+g} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta + \frac{g}{1+g} \mathbf{e}_r,$$

其中  $\mathbf{e}_r$  和  $\mathbf{e}_\theta$  为坐标方向的单位矢量。对法向矢量和切向矢量取模,并在  $r = R$  展开得

$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{t}| = 1 + 0.5 g^2 (1 - 2g) + O(g^4) \quad (23)$$

因此,速度的法向和切向分量,可以很方便地变换为下列形式:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} = [u + u_r g (1 - g + O(g^2))]/|\mathbf{t}|, \quad (24)$$

$$u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{t}} = [u_r + u g (1 - g + O(g^2))]/|\mathbf{n}| \quad (25)$$

以上各量的计算必须满足  $r = R = a(1 + g)$ ,这表明  $r$  的任何函数,可以在  $R$  处展开成级数

形式:

$$f(r) \Big|_{r=R} = f[a(1+g)] =$$

$$f(a) + agf_r(a) + \frac{1}{2} a^2 g^2 f_{rr}(a) + O(g^3),$$

$$\frac{1}{r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{a} (1-g + 2g^2 + O(g^3)),$$

$$\frac{1}{r^2} \Big|_{r=R} = \frac{1}{a^2} (1-2g + 3g^2 + O(g^3))$$

我们计算方程(24)、(25)并把它们按  $g$  的幂次分组, 即可得边界面上的速度分量 因此, 表面外区域和内区域上的流体速度的切向和法向分量为

$$u_t \Big|_a = -v_r \Big|_a + \left[ -v_r \Big|_a + g v_r \Big|_a + \frac{g}{a} v_\theta \Big|_a - ag v_{r\theta} \Big|_a \right] +$$

$$2 \left[ -\frac{1}{2} a^2 g^2 v_{rr} \Big|_a - ag v_{r\theta} \Big|_a + ag^2 v_{r\theta} \Big|_a + g g v_{r\theta} \Big|_a - \right.$$

$$\left. 2v_r \Big|_a + g v_r \Big|_a - \left( g^2 - \frac{g^2}{2} \right) v_r \Big|_a + \frac{g}{a} v_\theta \Big|_a - \frac{3gg}{a} v_\theta \Big|_a \right] = 0, \quad (26)$$

$$u_n \Big|_a = \frac{1}{a^2 \sin \theta} v_\theta \Big|_a + \left[ \frac{1}{a^2 \sin \theta} (ag v_{r\theta} \Big|_a + v_\theta \Big|_a - 2g v_\theta \Big|_a + ag v_{\theta r}^{(e)} \Big|_a) \right] +$$

$$2 \left[ \frac{1}{2 \sin \theta} g^2 v_{r\theta} \Big|_a + \frac{1}{a \sin \theta} (g v_{r\theta} - 2g^2 v_{r\theta} + agg v_{r\theta}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left[ 2v_\theta \Big|_a - 2g v_\theta \Big|_a + \left( 3g^2 - \frac{g^2}{2} \right) v_\theta + g a v_r \Big|_a - 2ag g v_{r\theta} \Big|_a \right] =$$

$$k \left[ (p_0^{(i)} \Big|_a - p_0^{(e)} \Big|_a) + (ag [p_0^{(i)} \Big|_a - p_0^{(e)} \Big|_a] + [p_1^{(i)} \Big|_a - p_1^{(e)} \Big|_a]) + \right.$$

$$\left. 2([p_2^{(i)} \Big|_a - p_2^{(e)} \Big|_a] + ag [p_{1r}^{(i)} \Big|_a - p_{1r}^{(e)} \Big|_a]) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} a^2 g^2 [p_{0r}^{(i)} \Big|_a - p_{0r}^{(e)} \Big|_a] \right] \quad (27)$$

根据方程(26)和(27),  $u$  的各阶展开式的边界条件可以逐次确定 原则上, 对每一  $n$  场, 应用简单可分离解的方法, 可以得到问题的任意阶近似解 实际上, 由于代数运算量的快速增长, 我们只能将解扩展到  $g$  的 2 阶

### 3 零阶解: 球体

可渗透近球体内部流场  $(\mathbf{u}^{(i)}, p^{(i)}, \theta^{(i)})$  和外部流场  $(\mathbf{u}^{(e)}, p^{(e)}, \theta^{(e)})$  的零阶解, 就是确定可渗透球体问题的速度和压力分布

Leonov<sup>[19]</sup>和 Wolfersdorf<sup>[20]</sup>先后求解了可渗透球体问题

无穷远处边界条件满足方程(12), 表面  $S$  上的其它边界条件, 由方程(26)、(27) 确定, 并取到  $O(g^0)$  项, 得

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{1}{a^2 \sin \theta} v_\theta \Big|_{r=a} = \frac{1}{a^2 \sin \theta} v_\theta \Big|_{r=a} = k [p_0^{(i)}(a, \theta) - p_0^{(e)}(a, \theta)] \quad (29)$$

这些边界条件对于求出方程(6)的唯一解是充分的 把方程(22)代入方程(6), 不变球体 Stokes 可分离解很容易地修正到可渗透情况 对于内部区域和外部区域的流函数, 可得到如下一般解:

$$w_0^{(i)} = (Ar^4 + Br^2 + Cr + D/r) U \sin^2 \theta, \quad r < a \tag{30}$$

和

$$w_0^{(e)} = (Ar^4 + Br^2 + Cr + D/r) U \sin^2 \theta, \quad r > a \tag{31}$$

无穷远处条件要求

$$A = 0, B = 1/2;$$

还要求消除球心  $r = 0$  处的奇异性, 即

$$C = 0, D = 0$$

将  $C, D, A_c, B_c$  的值代入方程(30)和(31), 得

$$w_0^{(i)} = (Ar^2 + Br^4) U \sin^2 \theta, \quad r < a \tag{32}$$

和

$$w_0^{(e)} = (r^2/2 + Ccr + Dc/r) U \sin^2 \theta, \quad r > a \tag{33}$$

将  $E^2 w_0^{(i)}$  和  $E^2 w_0^{(e)}$  的值代入方程(15)和(16), 并且进行积分, 可以求得压力场的零阶解为

$$p_0^{(i)}(r, \theta) = 20LUBr \cos \theta \tag{34}$$

和

$$p_0^{(e)}(r, \theta) = LU \cos \theta \left[ \frac{2C_c}{r^2} + p \right] \tag{35}$$

将内外压力场和  $r = a$  时  $W$  的计算值代入方程(28)、(29), 得到关于系数  $A, B, C_c, D_c$  的方程组# 这些系数是渗透率  $B = kL/a$  的函数# 解这一方程组得

$$A = -3B/(2 + 21B), \tag{36}$$

$$B/a^2 = -3B/[2(2 + 21B)], \tag{37}$$

$$C_c/a = -3(1 + 10B)/[2(2 + 21B)], \tag{38}$$

$$D_c/a^3 = (1 + 12B)/[2(2 + 21B)] \tag{39}$$

因此, 在可渗透球体的外部区域, 用方程(19)~(21), 可计算其无量纲阻力和通过球体的流量# 将  $C_c$  和  $D_c$  的值代入方程(33), 得到物体外部区域的一般解, 利用公式(19)又得出其阻力为

$$\mathcal{D}/6\pi LaU = -\frac{4}{3} \frac{C_c}{a}$$

由方程(21) 截断到  $E$  的 1 次幂和 2 次幂, 算得流量为

$$\frac{Q}{2a^2 U} = 2Q_0 \int_0^{\pi/2} k \sin^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = 20B \frac{B}{a^2} - 2B \frac{C_c}{a}$$

## 4 近球体的高阶摄动解

### 4.1 一阶解

为了得到可渗透近球体的近似解, 我们展开可渗透球体解  $W$  到  $E$  的高阶项# 可渗透近球体的 1 阶近似可由 Stokes 一般解得到# 物体内外区域的流函数可写为

$$w_1^{(i)} = (A_1 r^6 + B_1 r^4)(1 - 5\cos^2 \theta) U \sin^2 \theta + (C_1 r^2 + D_1 r^4) U \sin^2 \theta \tag{40}$$

和

$$w_1^{(e)} = \left[ \frac{A_1^c}{r^3} + \frac{B_1^c}{r} \right] (1 - 5\cos^2 \theta) U \sin^2 \theta + \left[ C_1^c r + \frac{D_1^c}{r} \right] U \sin^2 \theta \tag{41}$$

因此, 我们将在适当的条件下求得问题的解, 并且确定流场的系数# 表面  $S$  上的边界条件可由方程(8)、(9) 截断到  $E$  的 1 次幂得到:

$$u_l^{(i)} = u_l^{(e)} = \left[ g W_{0r} \Big|_{r=a} - ag W_{0r} \Big|_{r=a} + \frac{gc}{a} W_{0H} \Big|_{r=a} - W_{lr} \Big|_{r=a} \right] = 0, \quad (42)$$

$$u_n^{(i)} = u_n^{(e)} = \frac{1}{a^2 \sin H} \left[ ag W_{rH} \Big|_{r=a} - 2g W_{0H} \Big|_{r=a} + W_{nH} \Big|_{r=a} + agc W_{lr} \Big|_{r=a} \right] = k[ag(p_{0r}^{(i)} - p_{0r}^{(e)}) + (p_1^{(i)} - p_1^{(e)})] \quad (43)$$

整理方程(42)和(43)得

$$W_{lr}^{(i)} \Big|_{r=a} = - ag W_{0r}^{(i)} \Big|_{r=a} + g W_{0r}^{(i)} \Big|_{r=a} + \frac{gc}{a} W_{0H}^{(i)} \Big|_{r=a}, \quad (44)$$

$$W_{nH}^{(i)} \Big|_{r=a} = - ag W_{rH}^{(i)} \Big|_{r=a} + 2g W_{0H}^{(i)} \Big|_{r=a} - agc W_{lr}^{(i)} \Big|_{r=a} + k[ag(p_{0r}^{(i)}(a, H) - p_{0r}^{(e)}(a, H)) + p_1^{(i)}(a, H) - p_1^{(e)}(a, H)] a^2 \sin H \quad (45)$$

以上方程  $W_l^{(e)}$  也适合# 将方程

$$E^2 w_l^{(i)} / U = 18B_1 r^4 \sin^2 H (1 - 5\cos^2 H) + 10D_1 r^2 \sin^2 H, \quad (46)$$

$$E^2 w_l^{(e)} / U = \sin^2 H (1 - 5\cos^2 H) (-10B_1^c / r^3) + \sin^2 H (-2C_1^c / r) \quad (47)$$

代入方程(15)和(16), 可由前面的方程(44)和(45), 求得1阶压力场

$$p_1^{(i)} = LU \cos H [24(3 - 5\cos^2 H) B_1 r^3 + 20D_1 r], \quad (48)$$

$$p_1^{(e)} = LU \cos H [10(3 - 5\cos^2 H) B_1 r^4 + C_1^c / r^2] \quad (49)$$

因此, 对式(40)和(41)作微分运算并代入边界条件(44)~(47), 可得到一个系数方程组# 解此方程组, 得到关于渗透率B的一组系数:

$$A_1 = (72a^2 B C c + 24a^3 B + 45a^5 B + 33a^5 B B + 90B D c + 18a^3 B A + 45a^3 B) / a^5 (4 + 63B), \quad (50)$$

$$B_1 = - (48a^2 B C c + 20a^3 A + 40a^5 B + 190a^5 B B + 60B D c + 75a^3 B A + 30a^3 B) / a^7 (4 + 63B), \quad (51)$$

$$C_1 = - 2(-10a^5 B + 95a^5 B B + 10a^2 B C c + 3a^3 B + 6B D c) / a^3 (2 + 21B), \quad (52)$$

$$D_1 = - (20a^5 B + 10a^5 B B - 10a^2 B C c - 3a^3 B - 6B D c) / a^5 (2 + 21B), \quad (53)$$

$$A_1^c = a^2 (110a^5 B B + 114a^2 B C c + 60a^3 B A + 87a^3 B B + 174 B D c + 8a^2 C c + 6a^3 + 12D c) / (4 + 63B), \quad (54)$$

$$B_1^c = - 2(165a^5 B B + 45a^2 B C c + 90a^3 B A + 36a^3 B B + 72B D c + 4a^2 C c + 3a^3 + 6D c) / (4 + 63B), \quad (55)$$

$$C_1^c = - (100a^5 B B - 100a^2 B C c - 6D c - 30a^3 B B - 60B D c - 10a^2 C c) / a^2 (2 + 21B), \quad (56)$$

$$D_1^c = - (100a^5 B B - 16a^2 B C c - 6D c - 30a^3 B B - 60B D c - 2a^2 C c - 3a^3) / a^2 (2 + 21B) \quad (57)$$

将方程(19)按E的幂次展开, 计算近球体的阻力# 经整理得到

$$\mathcal{D} = - 8P L U a (C c + C_1^c), \quad (58)$$

由方程(21)截断到  $O(E)$ , 又得到流量

$$Q = 2R_0 \int_0^{\pi/2} k(p_0 + E p_1) dH \quad (59)$$

#### 4.2 二阶解

至此, 我们已经求得了问题的1阶解# 显然, 通过同样的分析, 可得到进一步的结果# 我们重新选择方程(6)的简单可分离解, 就可得到可渗透球体的2阶解, 其中H取决于表面S上

的边界条件#  $W^{(i)}$  和  $W^{(e)}$  的简单解为

$$W_2^{(i)} = (E_2 r^6 + F_2 r^8)(1 - 14\cos^2 H + 21\cos^4 H) U \sin^2 H + (A_2 r^4 + B_2 r^6)(1 - 5\cos^2 H) U \sin^2 H + (C_2 r^2 + D_2 r^4) U \sin^2 H, \quad (60)$$

$$W_2^{(e)} = \left[ \frac{E_2^c}{r^5} + \frac{F_2^c}{r^3} \right] (1 - 14\cos^2 H + 21\cos^4 H) U \sin^2 H + \left[ \frac{A_2^c}{r^3} + B_2^c r \right] (1 - 5\cos^2 H) U \sin^2 H + \left[ C_2^c r + \frac{D_2^c}{r} \right] U \sin^2 H, \quad (61)$$

上述简单解类似于方程(10)给出的 Stokes 流的一般解# 对于可渗透近球体的 2 阶近似, 其表面边界条件也可由方程(26)和(27)取到  $E^2$  项得到, 故其速度的法向和切向分量分别为

$$u_{i2}^{(i)} = u_{i2}^{(e)} = -\frac{1}{2} a^2 g^2 w_{0rr} |_{r=a} - ag W_{rr} |_{r=a} - ag^2 w_{0r} |_{r=a} + ggc W_{0H} |_{r=a} - W_r |_{r=a} + g W_r |_{r=a} - \left[ g^2 - \frac{gc^2}{2} \right] W_r |_{r=a} + \frac{gc}{a} W_H |_{r=a} - \frac{3ggc}{a} W_{0H} |_{r=a} = 0, \quad (62)$$

$$u_{n2}^{(i)} = u_{n2}^{(e)} = \frac{1}{a^2 \sin H} \left[ \frac{1}{2} a^2 g^2 w_{0Hr} |_{r=a} + ag W_{Hr} |_{r=a} - 2ag^2 w_{0H} |_{r=a} + a^2 ggc W_{rH} |_{r=a} - W_H |_{r=a} - 2g W_H |_{r=a} + \left[ 3g^2 - \frac{gc^2}{2} \right] W_r |_{r=a} + agc W_r |_{r=a} - 2agc W_{0r} |_{r=a} \right] = k \left[ p_2^{(e)}(a, H) - p_2^{(i)}(a, H) + ag(p_{1r}^{(i)}(a, H) - p_{1r}^{(e)}(a, H)) + \frac{1}{2} a^2 g^2 (p_{0r}^{(i)}(a, H) - p_{0r}^{(e)}(a, H)) \right], \quad (63)$$

此外, 还需计算方程(63)中的  $p_2^{(i)}$  和  $p_2^{(e)}$  # 重复 1 阶时的步骤, 积分方程(15)和(16), 确定球体内外区域的 2 阶压力场

$$p_2^{(i)} = 2LU \left[ \frac{26}{5} LF_2 r^5 \cos H (15 - 70\cos^2 H + 63\cos^4 H) + 12B_2 r^3 \cos H (3 - 5\cos^2 H) + 10D_2 r \cos H \right], \quad (64)$$

$$p_2^{(e)} = 2LU \left[ \frac{3LF_2^c}{r^6} \cos H (15 - 70\cos^2 H + 63\cos^4 H) + \frac{5B_2^c}{r^4} \cos H (3 - 5\cos^2 H) + \frac{C_2^c}{r^2} \cos H \right] # \quad (65)$$

最后, 将方程(60)~(61)的导数、 $W$  的 0 阶和 1 阶导数及压力值代入边界条件, 由方程(62)和(63)可得到如下系数的方程组:

$$A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, A_2^c, B_2^c, C_2^c, D_2^c, E_2^c, F_2^c #$$

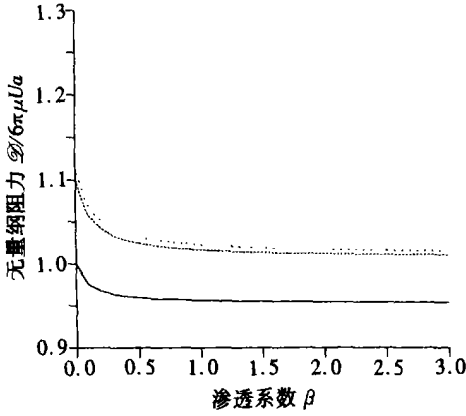
16 个联立方程组的解给出这些常数值, 它们取决于渗透系数  $B\#$  作为结果, 我们得到了可渗透近球体的流场和压力场的一般解, 该解以方程(17)中  $W_0, W_1, W_2$  和  $E$  的组合形式表现#

将以上常参数的计算值代入方程(19)~(21), 可计算出通过近球体的无量纲阻力和流量#



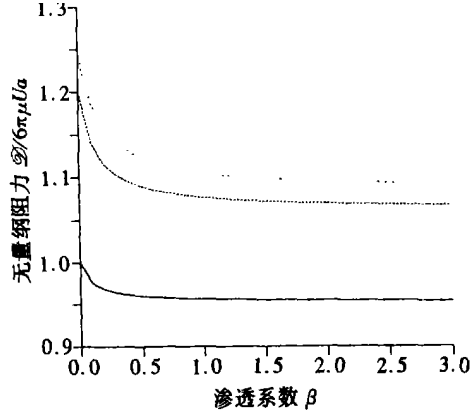
### 5 结 论

本研究给出了求解通过可渗透近球体轴对称流动的解析方法# 用正规摄动法求解了



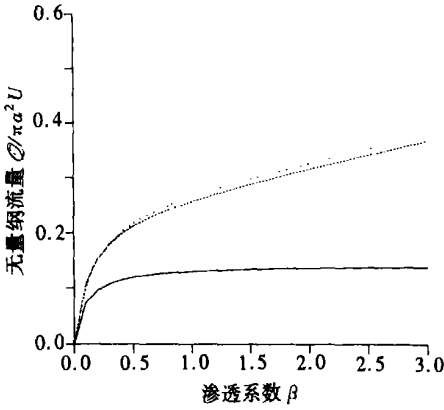
( ) : 0 阶解; ( ) : 1 阶解,  $E = 0.05$ ;  
, : 2 阶解,  $E = 0.05$ )

图 1 可渗透近球体的阻力



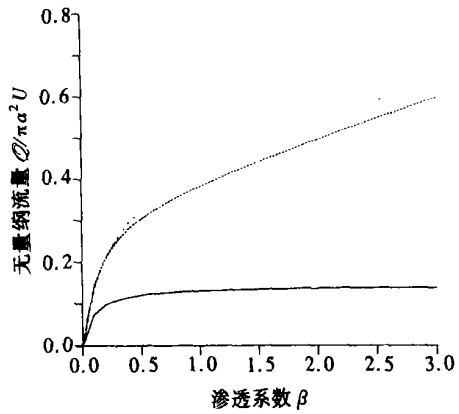
( ) : 0 阶解; ( ) : 1 阶解,  $E = 0.1$ ;  
, : 2 阶解,  $E = 0.1$ )

图 2 可渗透近球体的阻力



( ) : 0 阶解; ( ) : 1 阶解,  $E = 0.05$ ;  
, : 2 阶解,  $E = 0.05$ )

图 3 通过可渗透近球体的流量



( ) : 0 阶解; ( ) : 1 阶解,  $E = 0.1$ ;  
, : 2 阶解,  $E = 0.1$ )

图 4 通过可渗透近球体的流量

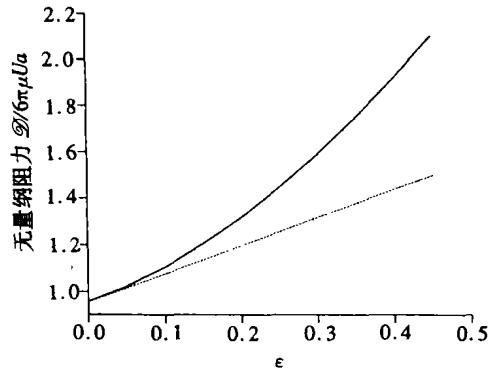
Stokes 方程, 达到  $E$  的 2 阶修正,  $E$  为描述不可变形球体半径偏差的小参数# 计算了阻力和流量, 绘制了可渗透球体和可变形、可渗透球体的计算结果图样#

根据我们的结果, 可渗透球体 ( $E = 0$ ) 的阻力随着渗透性的增大而减小, 当  $B$  趋于无穷大时, 阻力趋于一个极限值# 当  $B$  为零时, 阻力取得最大值, 成为不可渗透球体的结果# 图 1、图 2 显示小  $B$  值时阻力的主要变化情况: 特别是, 当  $B$  由 0 增加到 0.5 时, 阻力急剧减小# 对可渗透球体来说, 当  $B$  值非常小时, 通过球体的流量急速增大, 然后达到一个常数值(图 3, 图 4)#

对于一给定的  $E$  ( $E = 0.0$  表示圆球体), 我们分别画出了可渗透近球体对应于  $B$  的阻力和流量的 1 阶和 2 阶解的图形# 可渗透近球体的阻力大于可渗透圆球体# 流量也存在同样的关系# 对于  $E = 0.1$  和  $E = 0.05$  两种情况, 图 1~ 图 4 分别显示了阻力和流量的 0 阶、1 阶和 2 阶解间的关系# 我们清楚地看到,  $E$  越小, 得到的阻力和流量的近似解越好# 而  $E$  较大时, 阻

力和流量的1阶和2阶近似解的差别变得很大# 为使这些结果可靠, 我们必须在允许的精度下评估  $E$  的值# 图5表明了  $B = 1$  时阻力的1阶解和2阶解间的差别; 如果选择  $E$  小于约 0.11, 这两个解的差别似乎十分小#

因此, 作用在可渗透轴对称物体上的阻力, 很大程度上取决于物体的形状# 换句话说, 选择可变形的可渗透形状, 不如选择可以变形的球体# 大多数过滤器可以用一个可渗透的平面来近似, 例如可渗透球或可渗透圆盘# 这些模型提供了整个过滤器的更多信息# 另一方面, 过滤器的阻力也十分重要# 因为过滤器应该不会由于高阻力作用而失效, 阻力还与压力差有关, 并且在鲁棒设计中也需要这些力进行自反馈#



( ) : 1阶解; ( ) : 2阶解;  $B = 1$

图5 可渗透近球体的阻力与  $E$  的关系

### [参 考 文 献]

- [1] Rubenstein D I, Koehl M A R. The mechanism of filter feeding: some theoretical consideration [J]. *The American Naturalist*, 1977, 111: 981) 994.
- [2] Spielman L A. Particle capture from low speed laminar flows [J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1977, 9: 297) 319.
- [3] Craig D A, Chance M M. Filter feeding in larva of simuliidae (ditera: culicomorpha): aspects of functional morphology and hydro\_dynamics [J]. *Can J Zool*, 1982, 60: 712) 724.
- [4] Silvester N R. Some hydrodynamic aspects of filter feeding with rectangular\_mesh nets [J]. *J Theoret Biol*, 1983, 103: 265) 286.
- [5] Happel J, Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics* [M]. Englewood Cliffs: Prantice\_Hall, 1965.
- [6] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [7] Payne L E, Pell W H. The Stokes problem for a class of axially symmetric bodies [J]. *J Fluid Mech*, 1960, 7: 529) 544.
- [8] Stokes G G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums [J]. *Trans Cambridge Phil Soc*, 1851, 9: 8) 106.
- [9] Oberbeck A J. Bber station re fl ssigkeitsbewegungen mit ber ecksichtigung d er inner reibung [J]. *J Reine Angew Math*, 1876, 81: 62) 80.
- [10] Jeffery G B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid [J]. *Proc Roy Soc A*, 1922, 102: 161) 179.
- [11] Ray M. On the problem of motion of a circular disk in a viscous liquid [J]. *Phil Mag*, 1936, 21( 7) : 546) 564.
- [12] Nir A, Acrivos A. On the creeping motion of two arbitrary sized touching spheres in a linear shear field [J]. *J Fluid Mech*, 1973, 59: 209) 221.
- [13] Taylor T D, Acrivos A. The Stoks flow past an arbitrary particle in the slightly deformed sphere [J]. *Chem Eng Sci*, 1964, 19: 445) 451.
- [14] Brenner H. The Stokes resistance of a slightly deformed sphere [J]. *Chem Eng Sci*, 1964, 19: 519)

539.

- [15] Richardson J, Power H. The low Reynolds number motion of a porous particle near a plane interface [J]. *Appl Math Modeling*, 1996, 20( 11) : 829) 837.
- [16] Zlatonowski T. Axisymmetric creeping flow past a porous prolate spheroidal particle using the Brinkman model[J]. *Q J Mech Appl Math*, 1999, 52(1) : 111) 126.
- [17] Zlatonowski T. Axisymmetric creeping flow past a porous prolate spheroidal particle using the Brinkman model[J]. *Q J Mech Appl Math*, 2000, 53(1) : 173.
- [18] Sampson R A. On Stokes. s current function[J]. *Phil Trans*, Ser A, 1891, 182: 449) 518.
- [19] Leonow A I. The slow stationary flow of a viscous fluid about a porous sphere[J]. *PMM*, 1962, 26 (3): 564) 566.
- [20] Wolfersdorf L V. Stokes flow past a sphere with permeable surface[J]. *Z Angew Math Mech*, 1989, 69 (2): 111) 112.

### A x i s y m m e t r i c F l o w T h r o u g h a P e r m e a b l e N e a r \_ S p h e r e

F. Ayaz

( Department of Mathematics , Faculty of Science and Arts , Gazi University ,  
06500 Teknikokullar , Ankara , Turkey )

Abstract: An analytical approach is described for the axisymmetric flow through a permeable near\_ sphere with a modification to boundary conditions in order to account permeability. The Stokes equation was solved by a regular perturbation technique up to the second order correction in epsilon representing the deviation from the radius of nondeformed sphere. The drag and the flow rate were calculated and the results were evaluated from the point of geometry and the permeability of the surface. An attempt also was made to apply the theory to the filter feeding problem. The filter appendages of small ecologically important aquatic organisms were modeled as axisymmetric permeable bodies, therefore a rough model for this problem was considered here as an oblate spheroid or near\_sphere.

Key words: Stokes flow; perturbation technique; filter feeding