

文章编号: 1000-0887(2004) 04_0417_08

圆形界面刚性线夹杂的反平面问题^{*}

刘又文, 方棋洪, 王明斌

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(我刊原编委樊大钧推荐)

摘要: 研究了在反平面集中力和无穷远纵向剪切作用下, 不同弹性材料圆形界面上有多条刚性线夹杂的问题。运用 Riemann-Schwarz 解析延拓技术与复势函数奇性主部分析方法, 首次获得了该问题的一般解答, 求出了几种典型情况的封闭解, 并给出了刚性线夹杂尖端的应力场分布。结果表明, 在反平面加载的情况下圆形界面刚性线夹杂尖端应力具有平方根奇异性, 无奇异性应力振荡; 应力场与刚性线夹杂的形状, 加载方式和材料性质有关。退化结果与已有的解答完全吻合。

关键词: 刚性线夹杂; 圆形界面; 反平面问题; 复变函数方法

中图分类号: O343.7 **文献标识码:** A

引 言

随着复合材料的不断发展, 影响材料性能的内部缺陷, 例如裂纹、孔洞、刚性夹杂等, 也就越来越引起人们的重视。研究内部缺陷对应力场影响和由此引起的应力集中就显得非常重要。关于不同的加载情况下界面裂纹问题, 包括共线和共圆弧裂纹, 都已得到较为充分的研究。对于刚性线夹杂(反裂纹)问题, 也有不少研究成果; 文[1~8]研究了直线刚性线夹杂问题, 包括单个线夹杂和共线夹杂在任意荷载作用下的情况。文[9]和[10]研究了各向异性材料中共线刚性线夹杂的问题。但是有关曲线形刚性线性夹杂的问题还没有进行充分的研究, 只有文[11]研究了平面任意荷载作用下无限大平面内含圆弧刚性线夹杂的问题, [12]研究了无穷远均匀热流作用下无限大平面内含一条圆弧刚性线夹杂的热应力问题。关于共圆弧界面刚性线夹杂的问题, 至今未见研究成果。而这一模型对于描述复合材料的界面强度具有重要的应用价值。

本文利用 Riemann-Schwarz 解析延拓技术和复势函数的奇性主部分析方法研究了共圆弧界面刚性线夹杂的反平面问题。导出了在反平面集中力和无穷远纵向剪切作用下弹性场的一般解答, 求出了几种典型情况的封闭形式解。获得了刚性线夹杂尖端的奇异应力场公式, 分析结果表明, 在反平面荷载下圆弧形界面刚性线夹杂尖端应力与裂纹尖端相似, 具有平方根的奇异性, 且无奇异应力场的振荡性; 应力的大小与刚性线夹杂的形状, 加载方式和材料性质有

* 收稿日期: 2002_02_24; 修订日期: 2003_11_28

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(02JJY2014)

作者简介: 刘又文(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 硕士(联系人, Tel: + 86_731_8821889;

E_mail: liuyouwu8294@sina.com)。

关·文中解答的退化结果与已有的解答完全吻合·

1 问题描述

如图 1 所示, 设剪切模量为 G_1 的介质 I 占有半径为 R 的圆内区域 S^+ , 剪切模量为 G_2 的介质 II 占有圆外无限大区域 S^- . 在两种材料的交界面上有一系列圆弧形刚性线夹杂 L_j ($L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$), 刚性线 L_j 的尖端用 a_j 和 b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示, 界面的剩余部分用 L' 表示·

在圆外任意点 z_0 作用有反平面集中力 P , 在无穷远处作用反平面剪切应力 τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞ . 设圆形夹杂的中心在复平面的坐标原点, $t = e^{i\theta}R$ 表示 z 在圆形界面 $|z| = R$ 上的点· 在界面上位移 w_k 和应力 τ_{zk} ($k = 1, 2$) 的连接条件可表示为

$$w_1^+(t) = w_2^-(t) = \xi \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad t \in L, \quad (1)$$

$$w_1^+(t) = w_2^-(t), \quad t \in L', \quad (2)$$

$$\tau_{z1}^+(t) = \tau_{z2}^-(t), \quad t \in L', \quad (3)$$

式中 ξ 为刚性线 L_j 的位移常量, 下标 1 和 2 分别表示区域 S^+ 和 S^- 中的量, 上标 + 和 - 表示函数从区域 S^+ 和 S^- 趋向界面时所取的值·

将(1)式对 θ 微分后相加和相减得:

$$w_1^+(t) + w_2^-(t) = 0, \quad t \in L, \quad (4)$$

$$w_1^+(t) - w_2^-(t) = 0, \quad t \in L, \quad (5)$$

式中 $w' = dw/d\theta$ ·

此外, 为了唯一地确定问题的解, 还必须考虑刚性线的平衡条件, 假设刚性线上无外载荷作用, 可得:

$$\int_{a_j}^{b_j} \frac{\tau_{z1}^+}{t} dt - \int_{a_j}^{b_j} \frac{\tau_{z2}^-}{t} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad t \in L. \quad (6)$$

2 一般解答

利用 Muskhelishvili 复变函数理论, 弹性反平面问题的应力和位移, 可由一个解析函数 $f_k(z)$ 来表示

$$w_k = \operatorname{Re} f_k(z) \quad (k = 1, 2), \quad (7)$$

$$\tau_{zk} - i\tau_{\theta k} = G_k F_k(z) \quad (k = 1, 2), \quad (8)$$

$$\tau_{zk} - i\tau_{\theta k} = G_k e^{i\theta} F_k(z) \quad (k = 1, 2), \quad (9)$$

式中 $F_k(z) = f_k'(z)$, τ_{xz} 、 τ_{yz} 为直角坐标应力分量, τ_r 、 τ_θ 为极坐标应力分量·

考虑如图 1 所示的问题, 通过奇性分析可知两个区域的复势函数 $F_k(z)$ 表示为^[13]

$$F_1(z) = D + F_{10}(z), \quad z \in S^+, \quad (10)$$

$$F_2(z) = \frac{-P}{2\pi G_2} \cdot \frac{1}{z - z_0} + \Gamma + F_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (11)$$

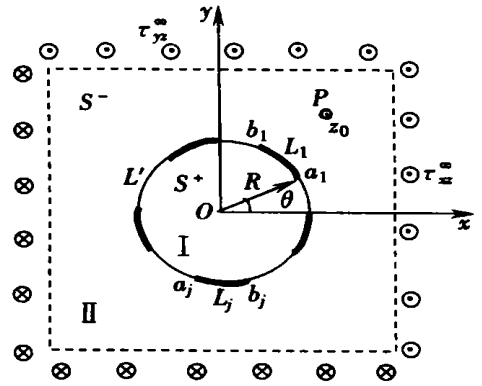


图 1 弹性平面中圆形界面刚性线

式中 $F_{10}(z)$ 和 $F_{20}(z)$ 在 S^+ 和 S^- 区域内全纯, 在 $z = 0$ 点的邻域内 $F_{10}(z) = O(1/z)$, D 为待定复常数, Γ 表示无穷远应力状态常数.

$$\Gamma = \frac{\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty}{G_2}. \quad (12)$$

根据 Riemann-Schwarz 对称原理, 一个新的解析函数 $\Omega_2(z)$ 在区域 S^+ 内被引入^[14]

$$\Omega_2(z) = -\frac{R^2}{z} F_2 \left[\frac{R^2}{z} \right], \quad z \in S^+. \quad (13)$$

将式(11)代入(13), 得到

$$\Omega_2(z) = \frac{-P}{2\pi G_2} \left[\frac{1}{z-z^*} - \frac{1}{z} \right] - \frac{R^2}{z^2} \Gamma + \Omega_{20}(z), \quad z \in S^+, \quad (14)$$

式中 $z^* = R^2/z_0$, $\Omega_{20}(z)$ 在 S^+ 内全纯.

同理将 $F_1(z)$ 从 S^+ 开拓到 S^- 内, 得到

$$\Omega_1(z) = -\frac{R^2}{z} D + \Omega_{10}(z), \quad z \in S^-, \quad (15)$$

式中 $\Omega_{10}(z)$ 在区域 S^- 内全纯, 在无穷远处为零.

由式(2)两边对 θ 微分, 并考虑到式(5)有

$$w'_1(t) = w'_2(t), \quad t \in L + L'. \quad (16)$$

将(7)式代入上式(16), 并注意到(13)和(15)有

$$[F_1(t) - \Omega_2(t)]^+ = [F_2(t) - \Omega_1(t)]^-, \quad t \in L + L'. \quad (17)$$

由推广的 Liouville 定理, 并考虑到(10)、(11)、(12)、(14)和(15), 由式(17)得到

$$F_1(z) - \Omega_2(z) = h(z), \quad z \in S^+, \quad (18)$$

$$F_2(z) - \Omega_1(z) = h(z), \quad z \in S^-, \quad (19)$$

$$h(z) = \frac{-P}{2\pi G_2} \left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z^*} + \frac{1}{z} \right] + \Gamma + \frac{R^2}{z^2} \Gamma. \quad (20)$$

把式(9)代入式(3), 并利用式(10)、(11)、(14)和(15)可推得

$$[G_1 F_1(t) + G_2 \Omega_2(t)]^+ = [G_2 F_2(t) + G_1 \Omega_1(t)]^-, \quad t \in L'. \quad (21)$$

设

$$g(z) = \begin{cases} G_1 F_1(z) + G_2 \Omega_2(z), & z \in S^+, \\ G_2 F_2(z) + G_1 \Omega_1(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (22)$$

考虑到式(10)、(11)、(12)、(14)和(15), 对 $g(z)$ 进行奇性分析可得到

$$g(z) = \frac{-P}{2\pi} \left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z^*} - \frac{1}{z} \right] + G_2 \Gamma - G_2 \frac{R^2}{z^2} \Gamma + g_0(z), \quad (23)$$

式中 $g_0(z)$ 在沿 L 割开的全平面全纯, 在无穷远处为零.

由式(18)、(19)以及(22)可导出

$$F_1(z) = \frac{G_2}{G_1 + G_2} h(z) + \frac{1}{G_1 + G_2} g(z), \quad z \in S^+, \quad (24)$$

$$\Omega_2(z) = -\frac{G_1}{G_1 + G_2} h(z) + \frac{1}{G_1 + G_2} g(z), \quad z \in S^+, \quad (25)$$

$$F_2(z) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} h(z) + \frac{1}{G_1 + G_2} g(z), \quad z \in S^-, \quad (26)$$

$$\Omega_1(z) = -\frac{G_2}{G_1 + G_2} h(z) + \frac{1}{G_1 + G_2} g(z), \quad z \in S^-. \quad (27)$$

将式(7)代入(4)式并注意到(24)~(27)有

$$g^+(t) + g^-(t) = 0, \quad t \in L \tag{28}$$

根据 Muskhelishvili^[13], 方程(28)的解答为

$$g(z) = \frac{-P}{2\pi} \left[\frac{1}{X_0(z_0)} \cdot \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{X_0(z^*)} \cdot \frac{1}{z - z^*} - \frac{1}{X_0(z)} \cdot \frac{1}{z} \right] X_0(z) + \left[\frac{G_2 R^3}{z^2} \Gamma - \frac{G_2 R^2 \cos \theta}{z} \Gamma + p_n(z) \right] X_0(z), \tag{29}$$

式中

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-1/2} \cdot (z - b_j)^{-1/2}; \tag{30}$$

$X_0(z)$ 是 z 平面上沿 L 割开的一单值分支, 且满足

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1; \tag{31}$$

$p_n(z)$ 是关于 $g(z)$ 的一个任意多项式

$$p_n(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_0. \tag{32}$$

在 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 比较式(23)和(29)的系数可得

$$C_n = G_2 \Gamma, \tag{33}$$

剩余的待定系数 C_{n-1}, \dots, C_0 由刚性线的平衡条件式(6)决定。

将式(9)代入(6)并考虑到式(10)、(11)、(13)和(14), 以及(24)~(27)得

$$\oint_{\Lambda_j} g(z) dz = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{34}$$

式中 Λ_j 是包围 L_j 的围道。方程(34)决定剩余的 n 个待定系数, 这样 $g(z)$ 就可以确定, 通过式(24)和(26)分区复势函数 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 可以求出。

3 封闭形式解

例 1 作为一个典型例子, 考虑界面只有一条圆弧刚性线夹杂 ab , 无穷远受均匀反平面剪切力 τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞ 作用。如图 2 所示。不失一般性, 建立图中所示的极坐标, 在圆形界面 $|z| = R$ 上, 设 $a = R e^{-i\theta}$, $b = R e^{i\theta}$ 。

因为 $n = 1, P = 0$, 在式(29)中有

$$p_1(z) = C_1 z + C_0, \tag{35}$$

$$X_0(z) = (z - a)^{-1/2} (z - b)^{-1/2}. \tag{36}$$

由式(33)可得

$$C_1 = G_2 \Gamma. \tag{37}$$

由方程(29)得

$$g(z) = \left[\frac{G_2 R^3}{z^2} \Gamma - \frac{G_2 R^2 \cos \theta}{z} \Gamma + \right]$$

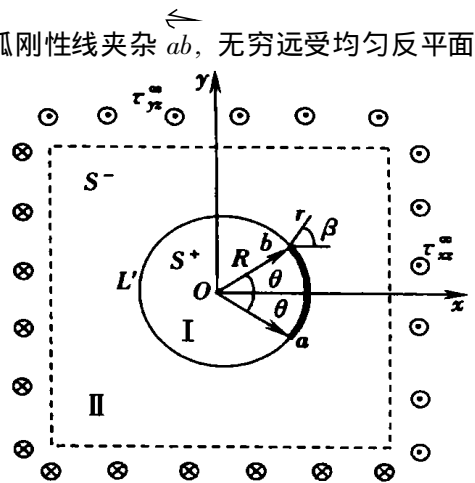


图 2 典型情况 1

$$\left(G_2 \Gamma z + C_0 \right) \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \tag{38}$$

把式(38)代入(34), 利用留数定理求得

$$C_0 = - C_1 R \cos \theta. \tag{39}$$

把式(39)代入(38)中得到

$$g(z) = G_2 \left[\frac{R^3 \Gamma}{z^2} - \frac{R^2 \cos \theta \Gamma}{z} + \Gamma z - \Gamma R \cos \theta \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \tag{40}$$

把式(20)与(40)代入式(24)和(26), $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 有如下形式

$$F_1(z) = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \left[\Gamma + \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right] + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \times \left[\frac{R^3 \Gamma}{z^2} - \frac{R^2 \cos \theta \Gamma}{z} + \Gamma z - \Gamma R \cos \theta \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{41}$$

$$F_2(z) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \left[\Gamma + \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right] + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \times \left[\frac{R^3 \Gamma}{z^2} - \frac{R^2 \cos \theta \Gamma}{z} + \Gamma z - \Gamma R \cos \theta \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \tag{42}$$

设 $G_1 = G_2 = G$, 由式(41)和(42)得到同种材料含一条圆弧刚性线夹杂的解答

$$F(z) = F_1(z) = F_2(z) = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{R^3 \Gamma}{z^2} - \frac{R^2 \cos \theta \Gamma}{z} + \Gamma z - \Gamma R \cos \theta \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \tag{43}$$

这是一个新结果.

当 $\theta = 0$ 时, 有

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = z - R. \tag{44}$$

把式(44)代入(41)和(42)可得到界面无刚性线的圆形弹性夹杂解

$$F_1(z) = \frac{2G_2}{G_1 + G_2} \Gamma, \tag{45}$$

$$F_2(z) = \Gamma + \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \frac{R^2}{z^2} \Gamma. \tag{46}$$

该结果与文[15]解答完全一致.

例2 考虑另一种典型情况, 如图3所示, 界面含一条圆弧刚性线夹杂, 在区域 S^- 内任意点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 作用一反平面集中力 P .

因为 $n = 1, \Gamma = 0$, 在式(29)中

$$p_1(z) = C_1 z + C_0, \tag{47}$$

$$X_0(z) = (z-a)^{-1/2} \cdot (z-b)^{-1/2}, \tag{48}$$

$$\frac{1}{X_0(z_0)} = \sqrt{(z_0-a)(z_0-b)}, \tag{49}$$

$$\frac{1}{X_0(z^*)} = \sqrt{(z^*-a)(z^*-b)}, \tag{50}$$

$$\frac{1}{X_0(0)} = -R, \tag{51}$$

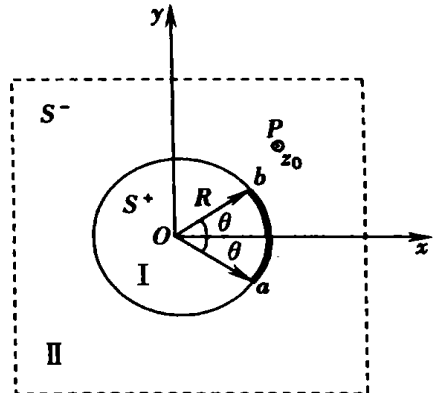


图3 典型情况2

$$C_1 = G_2 \Gamma = 0 \quad (52)$$

由方程(29)得

$$g(z) = \frac{-P}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} + \frac{\frac{R}{z} - \frac{2\pi C_0}{P}}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right\} \quad (53)$$

把式(53)代入(34), 并利用留数定理可得

$$C_0 = \frac{-P}{2\pi}, \quad (54)$$

所以有

$$g(z) = \frac{-P}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} + \frac{\frac{R}{z} + 1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right\} \quad (55)$$

把式(20)及(55)代入(24)和(26), 可以得到

$$F_1(z) = \frac{-P}{2\pi(G_1 + G_2)} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} + \frac{1}{z} \right] - \frac{P}{2\pi(G_1 + G_2)} \times \left[\frac{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} + \frac{\frac{R}{z} + 1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right] \quad (56)$$

$$F_2(z) = \frac{-PG_1}{2\pi(G_1 + G_2)G_2} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} + \frac{1}{z} \right] - \frac{P}{2\pi(G_1 + G_2)} \times \left[\frac{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} + \frac{\frac{R}{z} + 1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right] \quad (57)$$

设 $G_1 = G_2 = G$, 由式(56)和(57)得到同种材料含圆弧刚性线夹杂问题的基本解答

$$F_1(z) = F_2(z) = F(z) = \frac{-P}{4\pi G} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} + \frac{1}{z} \right] - \frac{P}{4\pi G} \times \left[\frac{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} + \frac{\frac{R}{z} + 1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right] \quad (58)$$

这也是一个新结果。

当 $\theta = 0$ 时,

$$\sqrt{(z - a)(z - b)} = z - R \quad (59)$$

把式(59)代入式(56)和(57)得到界面无刚性线夹杂的圆形弹性夹杂基本解,

$$F_1(z) = \frac{-P}{\pi(G_1 + G_2)} \frac{1}{z - z_0} \quad (60)$$

$$F_2(z) = \frac{-P}{2\pi G_2} \frac{1}{z - z_0} + \frac{P(G_1 - G_2)}{2\pi(G_1 + G_2)G_2} \left[\frac{1}{z - z^*} - \frac{1}{z} \right] \quad (61)$$

该结果与文[16]解答完全吻合。

4 刚性线夹杂尖端应力场

在本节, 我们将对刚性线尖端的应力分布提供一个精确的描述, 这对于建立断裂破坏准则有重要意义。如图2所示, 在刚性线端点 b 引入极坐标 (r, β) , 则尖端附近任意点的坐标可表示为: $z = R e^{i\theta} + r e^{i\beta}$ 。

当 r 比 $R \sin \theta$ 的值要小得多时, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \approx \frac{(1-i)e^{-i\beta/2}}{2\sqrt{rR\sin\theta}}, \quad r \ll R\sin\theta \quad (62)$$

将式(62)代入(41)和(42), 再由式(8)求得纵向剪切作用下刚性线尖端的奇异应力场主项

$$\begin{aligned} \tau_{xz1} = & \frac{G_1}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{R\sin\theta}{2r}} \left[\tau_{yz}^\infty \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{yz}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \right. \\ & \left. \tau_{xz}^\infty \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{xz}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right], \quad \theta - \frac{\pi}{2} < \beta < \theta + \frac{\pi}{2}, \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz1} = & \frac{G_1}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{R\sin\theta}{2r}} \left[\tau_{yz}^\infty \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{yz}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \right. \\ & \left. \tau_{xz}^\infty \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{xz}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right], \quad \theta - \frac{\pi}{2} < \beta < \theta + \frac{\pi}{2}, \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz2} = & \frac{G_2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{R\sin\theta}{2r}} \left[\tau_{yz}^\infty \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{yz}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \right. \\ & \left. \tau_{xz}^\infty \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{xz}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right], \quad -\theta - \frac{\pi}{2} < \beta < -\theta - \frac{\pi}{2}, \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz2} = & \frac{G_2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{R\sin\theta}{2r}} \left[\tau_{yz}^\infty \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{yz}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \right. \\ & \left. \tau_{xz}^\infty \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + \tau_{xz}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right], \quad -\theta - \frac{\pi}{2} < \beta < -\theta - \frac{\pi}{2}. \quad (66) \end{aligned}$$

把圆弧刚性线夹杂转化为直线时, 即 $\theta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 保持 $R\sin\theta = l$ (l 为直线刚性线长度的一半), 由式(63) ~ (66) 可得与文[8]一致的退化结果. 若设 $G_1 = G_2 = G, \tau_{xz}^\infty = \tau_{yz}^\infty = \tau$ 得到:

$$\tau_{xz} = \tau \sqrt{\frac{l}{2r}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), \quad (67)$$

$$\tau_{yz} = \tau \sqrt{\frac{l}{2r}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right). \quad (68)$$

设 $\beta = 90^\circ + \beta$, 并考虑到刚性线的放置方向, 式(67)和(68)与文[1]的结果一致.

对于反平面集中力的情况, 只要把(62)式代入式(56)和(57), 再由式(8)就可以得到界面刚性线夹杂尖端的相应应力场.

由本节的分析可知, 圆弧形界面刚性线夹杂尖端的剪应力和裂纹尖端一样都具有平方根的奇异性, 不出现奇异应力场的振荡性; 夹杂尖端应力的大小与刚性线形状, 加载条件以及材料性质相关.

[参 考 文 献]

- [1] Wang Z Y, Zhang H T, Chou Y T. Stress singularity at the top of a rigid line inhomogeneity under antiplane shear loading [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1986, **53**: 459—461.
- [2] Li Q Q, Ting T C T. Line inclusions in anisotropic elastic solids [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1989, **56**: 556—563.
- [3] Chueng Y C, Chen Y Z. Multiple rigid line problem in infinite plate [J]. Eng Frac Mech, 1989, **34** (2): 379—391.
- [4] Ballarini R. A rigid line inclusion at a biomaterial interface [J]. Eng Frac Mech, 1990, **37**(1): 1—5.
- [5] Jiang C P, Liu C T. Stress distribution around a rigid line in dissimilar media [J]. Eng Frac Mech,

- 1992, **42**(1): 27—32.
- [6] Jiang C P. The plane problem of collinear rigid lines arbitrary loads [J]. Eng Frac Mech, 1991, **39**(2): 299—308.
- [7] Hao T H, Wu Y C. Elastic plane problem of collinear periodical rigid lines[J]. Eng Frac Mech, 1989, **33**(2): 979—981.
- [8] Jiang C P, Chueng Y C. Antiplane problems of collinear rigid line inclusions in dissimilar media[J]. Eng Frac Mech, 1995, **52**(5): 907—916.
- [9] 刘又文. 各向异性材料界面周期性刚性线夹杂的反平面问题[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(10): 1037—1042.
- [10] 刘又文. 各向异性材料界面共线刚性线夹杂的反平面问题[J]. 固体力学学报, 2001, **22**(2): 214—218.
- [11] Liu Y W, Jiang C P. Stress distribution at the rigid circular arc inclusion end[J]. Eng Frac Mech, 1994, **47**(3): 431—440.
- [12] Shen M H, Chao C K. Explicit solutions for elastic and thermoelastic fields with rigid circular arc inclusion[J]. Int J Fracture, 1994, **65**: 1—18.
- [13] Muskhelishvili, N L. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity[M]. Leyden: Noordhoff, 1975.
- [14] 樊大钧. 数学弹性力学[M]. 北京: 新时代出版社, 1983.
- [15] 蒋持平, 刘振国. 纵向剪切三相共焦点椭圆模型的精确解及其应用[J]. 力学学报, 2000, **32**(4): 251—256.
- [16] 刘又文, 蒋持平. 含圆形弹性夹杂的反平面问题[J]. 中南矿冶学院学报, 1991, **22**(2): 196—201.

Antiplane Problem of Circular Arc Interfacial Rigid Line Inclusions

LIU You_wen, FANG Qi_hong, WANG Ming_bin

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The antiplane problem of circular arc rigid line inclusions under antiplane concentrated force and longitudinal shear loading was dealt with. By using Riemann-Schwarz's symmetry principle integrated with the singularity analysis of complex functions, the general solution of the problem and the closed form solutions for some important practical problems were presented. The stress distribution in the immediate vicinity of circular arc rigid line end was examined in detail. The results show that the singular stress fields near the rigid inclusion tip possess a square-root singularity similar to that for the corresponding crack problem under antiplane shear loading, but no oscillatory character. Furthermore, the stresses are found to depend on geometrical dimension, loading conditions and materials parameters. Some practical results concluded are in agreement with the previous solutions.

Key words: rigid line inclusion; circular arc interface; antiplane problem; complex variable method