

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1152_09

夹层压电材料中垂直于界面的共线 双裂纹动力学问题分析*

曲贵民, 周振功, 王 彪

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所及光电研究中心, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 采用 Schmidt 方法分析了在简谐反平面剪切波作用下, 两个半空间夹层压电材料中的共线裂纹的动力学行为。压电材料层内裂纹垂直于界面, 电边界条件假设为可导通。通过 Fourier 变换, 使问题的求解转换为两对三重积分对偶方程。通过数值计算, 给出了裂纹的几何尺寸、压电材料常数、入射波频率等对于应力强度因子的影响。结果表明, 在不同的入射波频率范围, 动力场将阻碍或促使压电材料内裂纹的扩展。与不可导通电边界条件相比, 导通裂纹表面的电位移强度因子比不可导通裂纹的电位移强度因子要小许多。

关键词: 弹性波; 压电材料; Fourier 变换; Schmidt 方法; 裂纹

中图分类号: O345.51 文献标识码: A

引 言

在压电材料断裂问题研究中, 许多研究者提出了不同的电边界条件。例如, 为简化分析, 研究者^[1~4]采用了电场在裂纹面上不可导通的假设。在这一模型中, 不可导通裂纹是指裂纹面上的电荷为零, 因此, 在裂纹面上的电位移为零。事实上, 在压电材料的裂纹中含有空气或其它气体, 这就要求电场能够通过裂纹, 从而使垂直于裂纹表面的电场分量在裂纹上是连续的, 即可导通电边界条件。也有许多研究者^[5,6]用可导通电边界裂纹模型, 对压电材料中裂纹静力学问题进行了分析。近来, Zhang 和 Tong^[7]以及 Sosa 和 Khutoryansky^[8]在椭圆裂纹的边缘, 使用了更加精确的电边界条件来处理压电学中反平面问题。他们分析了裂纹面电边界条件对压电材料断裂机理的影响。有趣的是通过改变边界条件得到了完全不同的结果^[9]。在文献 [10、11] 中, 分别分析了夹层压电材料中平行于和垂直于界面的不可导通裂纹的静态和动态断裂问题。最近, 压电材料的动力学响应和破坏模式吸引了越来越多的研究者的关注。Yu 和 Chen^[12]应用积分变换方法研究了在反平面动态电力冲击载荷作用下无限大压电材料条中的有限不可导通裂纹问题。在文献 [13] 中, 分析了夹层压电材料中垂直于界面的可导通裂纹的

* 收稿日期: 2004_06_18; 修订日期: 2005_05_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172030; 50232030); 国家科技部八六三项目(2001AA31304); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04_08); 黑龙江省教育厅基金资助项目(10541047)

作者简介: 曲贵民(1962—), 男, 辽宁人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_451_86390831; Fax: + 86_451_86390830; E_mail: qugmh@yahoo.com.cn)。

静态断裂问题,但对于这样结构的动力学问题研究,还未见报道。

针对文献[13]中的裂纹模型,本文采用 Schmidt 方法^[14]分析了其对弹性波的散射问题,首先应用 Fourier 变换把混合边界值问题转换为两对三重积分方程,再利用 Jacobi 多项式将裂纹面上的位移间断函数以级数形式展开而进行数值求解。最终,给出应力和电位移的强度因子数值结果,分析了弹性波频率、裂纹的几何尺寸和材料性质对应力和电位移的强度因子的影响。

1 基本方程

设在两个弹性半空间中有一含垂直于界面共线可导通裂纹的压电层,如图 1 所示。两个弹性半空间的材料模量为 c_{44}^E , 这里,将弹性半空间材料有关量以上角标 E 表示。设压电层的厚度为 $2h$, 裂纹长度为 $1-b$, $2b$ 是两个裂纹之间的距离(对于含有长度为 $a-b$ 的共线 Griffith 裂纹的解,可利用本文的结论,经过一个简单变换得到, $a > b > 0$)。设反平面剪切应力波垂直入射, ω 为入射波的频率, τ_0 是入射波的大小。如公认采取的技术一样,在以下的有关变量中舍去简谐时间项 $e^{-i\omega t}$ 。如文献[9]、[15]所述,由于反平面问题不存在裂纹张开位移,所以裂纹面可以假设是完全接触的。可以利用相应的可导通边界条件,即两个裂纹面上的电势和法向电位移是连续的。故本问题的边界条件是(仅考虑扰动应力场):

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \phi^{(1)} = \phi^{(2)}, D_y^{(1)} = D_y^{(2)}, \quad y = 0, |x| \leq b, 1 \leq |x| \leq h, \quad (1)$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = -\tau_0, \phi^{(1)} = \phi^{(2)}, D_y^{(1)} = D_y^{(2)}, \quad y = 0, b \leq |x| \leq 1, \quad (2)$$

$$\tau_{xz}^{(1,2)}(\pm h, y, t) = \tau_{xz}^E(\pm h, y, t), w^{(1,2)}(\pm h, y, t) = w^E(\pm h, y, t), \quad D_x^{(1,2)}(\pm h, y, t) = 0, \quad (3)$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w^E = 0, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \quad (4)$$

这里, $\tau_{kz}^{(i)}, D_k^{(i)}$ ($k = x, y, i = 1, 2$) 分别是反平面剪应力和平面电位移, $w^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 分别是位移和电势, τ_{xz}^E, τ_{yz}^E 和 w^E 是弹性半空间的剪应力和位移, 各量的上标 i ($i = 1, 2$) 分别指上半平面($y \geq 0$) 和下半平面($y \leq 0$), 如图 1 所示。

本构方程可写为:

$$\tau_{kz}^{(i)} = c_{44} w_{,k}^{(i)} + e_{15} \phi_{,k}^{(i)} \quad (k = x, y; i = 1, 2), \quad (5)$$

$$D_k^{(i)} = e_{15} w_{,k}^{(i)} - \epsilon_{11} \phi_{,k}^{(i)} \quad (k = x, y; i = 1, 2), \quad (6)$$

$$\tau_{xz}^E = c_{44}^E w_{,x}, \tau_{yz}^E = c_{44}^E w_{,y}, \quad (7)$$

其中, $c_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$ 分别是剪切模量、压电常数和介电常数。

反平面控制方程为:

$$c_{44} \nabla^2 w^{(i)} + e_{15} \nabla^2 \phi^{(i)} = \rho \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

$$e_{15} \nabla^2 w^{(i)} - \epsilon_{11} \nabla^2 \phi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

$$\nabla^2 w^E = \rho^E \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (10)$$

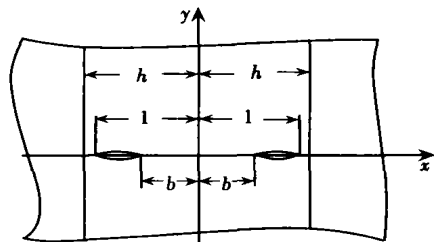


图 1 反平面剪切波作用下压电层中的裂纹

其中, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是二维拉普拉斯算子, ρ 是压电材料的密度, ρ^E 是弹性材料的密度。由于几何及载荷的对称性, 仅考虑问题的 $0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty$ 即可。

方程(8)、(9)和(10)的解可设为:

$$w^{(1)}(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_1(s) e^{-y_1 y} \cos(sx) ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty H(s) \cosh(y_1 x) \sin(sy) ds \quad (y \geq 0), \quad (11)$$

$$w^{(2)}(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_2(s) e^{y_1 y} \cos(sx) ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty H(s) \cosh(y_1 x) \sin(sy) ds \quad (y \leq 0), \quad (12)$$

$$w^E(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C(s) e^{-y_2 x} \sin(sy) ds, \quad (13)$$

其中

$$y_1 = \sqrt{s^2 - (\omega/c_3)^2}, \quad c_3 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad \mu = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11},$$

$$y_2 = \sqrt{s^2 - (\omega/c_3^E)^2}, \quad c_3^E = \sqrt{c_{44}^E/\rho^E},$$

$A_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $H(s)$ 和 $C(s)$ 是未知函数。

将方程(11)和(12)代入方程(8)和(9)可假设:

$$\phi^{(1)}(x, y, t) - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(1)}(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(s) \cosh(sx) \sin(sy) ds, \quad (14)$$

$$\phi^{(2)}(x, y, t) - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(2)}(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_2(s) e^{sy} \cos(sx) ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(s) \cosh(sx) \sin(sy) ds, \quad (15)$$

其中, $B_1(s)$ 、 $B_2(s)$ 和 $F(s)$ 是未知函数。

由本构方程(5)至(7)式可得:

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(x, y, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ y_1 [\mu A_1(s) + e_{15} B_1(s)] e^{-y_1 y} \cos(sx) - \right. \\ &\quad \left. s [\mu H(s) + e_{15} F(s)] \cos(sy) \cosh(y_1 x) \right\} ds, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_y^{(1)}(x, y, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon_{11} s [B_1(s) e^{-sy} \cos(sx) - \\ &\quad F(s) \cos(sy) \cosh(sx)] ds \quad (y \geq 0); \\ \tau_{yz}^{(2)}(x, y, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ y_1 [\mu A_2(s) + e_{15} B_2(s)] e^{y_1 y} \cos(sx) + \right. \\ &\quad \left. s [\mu H(s) + e_{15} F(s)] \cos(sy) \cosh(y_1 x) \right\} ds, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_y^{(2)}(x, y, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon_{11} s [B_2(s) e^{sy} \cos(sx) + \\ &\quad F(s) \cos(sy) \cosh(sx)] ds \quad (y \leq 0); \end{aligned} \right.$$

$$\tau_{xz}^E(x, y, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty c_{44}^E y_2 C(s) e^{-y_2 x} \sin(sy) ds, \quad (18)$$

这里 $\mu = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$ 。

裂纹面上的位移和电势的间断函数可假设为:

$$f(x) = w^{(1)}(x, 0^+, t) - w^{(2)}(x, 0^-, t), \quad (19)$$

$$f_\phi(x) = \phi^{(1)}(x, 0^+, t) - \phi^{(2)}(x, 0^-, t). \quad (20)$$

将方程(11)、(12)、(14)和(15)代入方程(19)、(20),并应用 Fourier 变换和边界条件得到:

$$f(s) = A_1(s) - A_2(s), \quad (21)$$

$$f_\phi(s) = \frac{e_{15}}{e_{11}}f(s) + B_1(s) - B_2(s) = 0. \quad (22)$$

将方程(16)和(17)代入方程(1)和(2)得到:

$$\mu_1 [A_1(s) + A_2(s)] + e_{15} s [B_1(s) + B_2(s)] = 0, \quad (23)$$

$$B_1(s) + B_2(s) = 0. \quad (24)$$

解方程(21)~(24),应用边界条件(2),可得:

$$\int_0^\infty \left\{ c_{44} \gamma_1 [f(s) \cos(sx) - s [H(s) + e_{15} F(s)] \cosh(\gamma_1 x)] \right\} ds = \pi \tau_0 \quad (b \leq |x| \leq 1), \quad (25)$$

$$\int_0^\infty f(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (|x| > 1 \text{ 且 } |x| < b), \quad (26)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0, t) = \tau_{yz}, \quad D_y^{(1)}(x, 0, t) = D_y^{(2)}(x, 0, t) = D_y. \quad (27)$$

要确定未知函数 $f(s)$,必须解积分方程(25)和(26).利用 Fourier 变换和边界条件(3)得到函数 $A_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $F(s)$ 、 $H(s)$ 与 $C(s)$ 之间的关系:

$$H(t) [\gamma_1 \sinh(\gamma_1 h) + \mu_1 \gamma_2 \cosh(\gamma_1 h)] = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(sh) s - \gamma_2(t) \mu_1 \cos(sh)}{\gamma_1^2(s) + t^2} A_1(s) ds, \quad (28)$$

$$C(t) e^{-\gamma_2 h} [\gamma_1 \sinh(\gamma_1 h) + \mu_1 \gamma_2 \cosh(\gamma_1 h)] = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cosh[\gamma_1(t) h] \sin(sh) s + \gamma_1(t) \sinh[\gamma_1(t) h] \cos(sh)}{\gamma_1^2(s) + t^2} A_1(s) ds, \quad (29)$$

$$F(t) \sinh(th) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s}{s^2 + t^2} B_1(s) \sin(sh) ds, \quad (30)$$

其中 $\mu_1 = \frac{E}{c_{44}} \mu$.

2 三重积分方程的求解

利用 Schmidt 方法^[14]求解三重积分方程(25)和(26).裂纹面上的位移间断函数可以展成如下形式的级数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2, 1/2)} \left[\frac{x - (1+b)/2}{(1-b)/2} \right] \left[1 - \frac{(x - (1+b)/2)^2}{((1-b)/2)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{当 } b \leq |x| \leq 1, y = 0), \quad (31)$$

其中, a_n 是待定的未知系数, $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ 是 Jacobi 多项式^[16]. 方程(31)经 Fourier 变换后为^[17]

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n G_n(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right], \quad (32)$$

$$\begin{cases} Q_n = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \\ G_n(s) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos\left[s \frac{1+b}{2}\right] & (n = 0, 2, 4, 6, \dots), \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin\left[s \frac{1+b}{2}\right] & (n = 1, 3, 5, 7, \dots) \end{cases} \end{cases} \quad (33)$$

这里, $\Gamma(x)$ 和 $J_n(s)$ 分别是 Gamma 函数和 Bessel 函数。

将方程(32)代入方程(25)和(26)中, 方程(26)能被自动满足, 而方程(25)在区间 $[b, x]$ 上对 x 积分变为:

$$\begin{aligned} c_{44} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \gamma_1 s^{-2} G_n(s) J_{n+1}\left[s \frac{1-b}{2}\right] [\sin(sx) - \sin(sb)] ds = \\ \pi \tau_0(x-b) + \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{s^2 [\sinh(\gamma_1 x) - \sinh(\gamma_1 b)]}{g(s)} ds \times \\ \int_0^{\infty} G_n(\eta) J_{n+1}\left[\eta \frac{1-b}{2}\right] \frac{\eta \sin(\eta h) - \gamma_2(s) \mu_1 \cos(\eta h)}{[\gamma_1^2(\eta) + s^2] \eta} d\eta - \\ \frac{e_{15}^2}{\pi \epsilon_{11}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{\sinh(sx) - \sinh(sb)}{\sinh(sh)} ds \times \\ \int_0^{\infty} G_n(\eta) J_{n+1}\left[\eta \frac{1-b}{2}\right] \frac{\sin(\eta h)}{\eta^2 + s^2} d\eta, \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $g(s) = \gamma_1 [\gamma_1 \sinh(\gamma_1 h) + \mu_1 \gamma_2 \cosh(\gamma_1 h)]$ 。

对于变量 s 的值较大时, 在方程(34)中, 双重半无限积分的被积函数除了几个奇异点以外几乎都是指数形式, 积分的奇异点就是函数 $g(s)$ 的零点。这些零点出现在 $g(s)$ 为零的复平面上, 函数 $g(s)$ 的零点不仅与压电层厚度、入射波的频率有关, 而且与材料性质有关, 所有积分取积分主值, 对半无限积分进行数值求解。从而可利用 Schmidt 方法^[14] 求解方程(34)可获得系数 a_n , 具体可见文献[10, 11]。

3 强度因子

尽管从 a_n 可以确定整个动应力场和电位移场, 但对于断裂力学, 重要的是确定在裂纹尖端附近的扰动应力 τ_z 和扰动电位移场 D_y 。沿裂纹面的应力 τ_z 和电位移 D_y 可分别表示为:

$$\begin{aligned} \tau_z(x, 0, t) = - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \left[\int_0^{\infty} c_{44} \gamma_1 s^{-1} G_n(s) J_{n+1}\left[s \frac{1-b}{2}\right] \cos(xs) ds - \right. \\ \left. \frac{\mu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\gamma_1 x) s^2}{[\gamma_1 \sinh(\gamma_1 h) + \mu_1 \gamma_2 \cosh(\gamma_1 h)]} ds \times \right. \\ \left. \int_0^{\infty} G_n(\eta) J_{n+1}\left[\eta \frac{1-b}{2}\right] \frac{\eta \sin(\eta h) - \gamma_2(s) \mu_1 \cos(\eta h)}{[\gamma_1^2(\eta) + s^2] \eta} d\eta + \right. \\ \left. \frac{e_{15}^2}{\pi \epsilon_{11}} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(sx)}{\sinh(sh)} ds \int_0^{\infty} G_n(\eta) J_{n+1}\left[\eta \frac{1-b}{2}\right] \frac{\sin(\eta h)}{(\eta^2 + s^2)} d\eta \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} D_y(x, 0, t) = - \frac{e_{15}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \left[\int_0^{\infty} G_n(s) J_{n+1}\left[s \frac{1-b}{2}\right] \cos(xs) ds - \right. \\ \left. \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(sx)}{\sinh(sh)} ds \int_0^{\infty} G_n(\eta) J_{n+1}\left[\eta \frac{1-b}{2}\right] \frac{\sin(\eta h)}{(\eta^2 + s^2)} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

从而扰动应力场和扰动电位移场的奇异部分可表示为:

$$\tau = - \frac{c_{44}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n H_n(b, x), \quad (37)$$

$$D = - \frac{e_{15}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n H_n(b, x), \quad (38)$$

其中

$$H_n(b, x) = (-1)^{n+1} F_1(b, x, n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots; 0 < x < b),$$

$$H_n(b, x) = -F_2(b, x, n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots; 1 < x),$$

$$F_1(b, x, n) =$$

$$\frac{2(1-b)^{n+1}}{\sqrt{(1+b-2x)^2 - (1-b)^2} [1+b-2x + \sqrt{(1+b-2x)^2 - (1-b)^2}]^{n+1}},$$

$$F_2(b, x, n) = \frac{2(1-b)^{n+1}}{\sqrt{(2x-1-b)^2 - (1-b)^2} [2x-1-b + \sqrt{(2x-1-b)^2 - (1-b)^2}]^{n+1}}.$$

在右裂纹的左尖端, 可得应力强度因子 K_L :

$$K_L = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-x)} \cdot \tau = c_{44} \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n Q_n; \quad (39)$$

在右裂纹的右尖端, 可得应力强度因子 K_R :

$$K_R = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2\pi(x-1)} \cdot \tau = c_{44} \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n. \quad (40)$$

在右裂纹的左尖端, 可得电位移强度因子 K_L^D :

$$K_L^D = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-x)} \cdot D = e_{15} \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n Q_n = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_L; \quad (41)$$

在右裂纹的右尖端, 可得电位移强度因子 K_R^D :

$$K_R^D = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2\pi(x-1)} \cdot D = e_{15} \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n = \frac{e_{15}}{c_{44}} K_R. \quad (42)$$

4 数值计算与讨论

这一部分给出了代表性的数值计算结果。由文献[10, 11]讨论可知, 可利用 Schmidt 方法求解方程(34), 取无穷级数(34)的前10项就可以满足精度。对于任意长度 $a-b$ 的两个共线双裂纹情况, 可经过一个简单变换后利用本文所求的形式($a > b > 0$), 即利用本文压电层宽度为 h/a 、共线双裂纹长度为 $1-b/a$ 的结果。

在计算中, 压电材料为 PZT_4 或 PZT_5H 材料, 半空间为铝或环氧。PZT_4 的材料常数为 $c_{44} = 2.56 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $e_{15} = 12.7 \text{ C/m}^2$, $\epsilon_{11} = 64.6 \times 10^{10} (\text{C/V} \cdot \text{m}^2)$, $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 。PZT_5H 的材料常数分别为 $c_{44} = 2.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2$, $\epsilon_{11} = 150.4 \times 10^{10} (\text{C/V} \cdot \text{m}^2)$, $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 。铝的材料常数为 $c_{44}^E = 2.65 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2706 \text{ kg/m}^3$ 。环氧的材料常数为 $c_{44}^E = 0.176 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ 。计算结果如图 2 到图 11 所示。通过分析可得如下结论:

- i) 应力强度因子不仅与裂纹长度、入射波频率、压电层宽度有关, 而且与材料性质有关。
- ii) 两个裂纹之间的影响是随裂纹间距离的增加而减小。即应力强度因子和电位移强度因子随裂纹长度的减小而减小, 如图 4、7 和 8 所示。

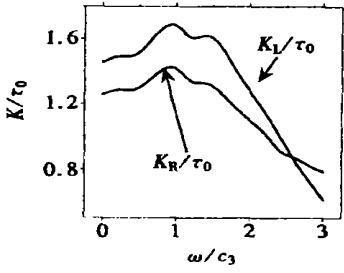


图2 应力强度因子随 ω/c_3 的变化规律
($h = 1.5, b = 0.1$; 铝/PZT_4/铝)

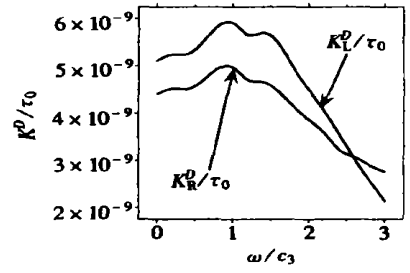


图3 电位移强度因子随 ω/c_3 的变化规律
($b = 0.1, h = 1.5$; 铝/PZT_4/铝)

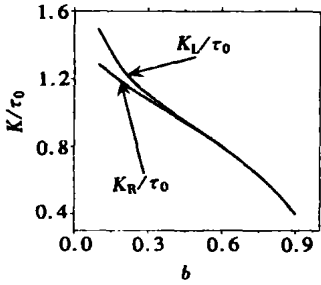


图4 应力强度因子随 b 的变化规律
($h = 1.5, \omega/c_3 = 0.4$; 铝/PZT_4/铝)

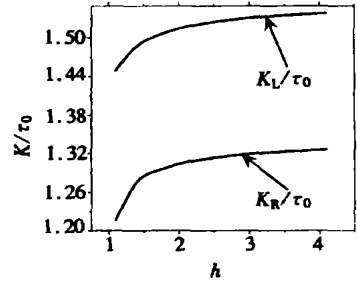


图5 应力强度因子随 h 的变化规律
($b = 0.1, \omega/c_3 = 0.4$; 铝/PZT_4/铝)

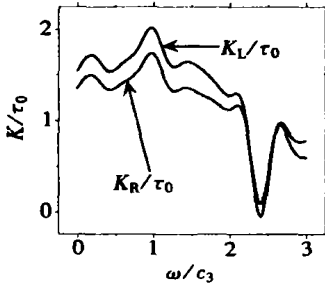


图6 应力强度因子随 ω/c_3 的变化规律
($h = 1.5, b = 0.1$; 环氧/PZT_5H/环氧)

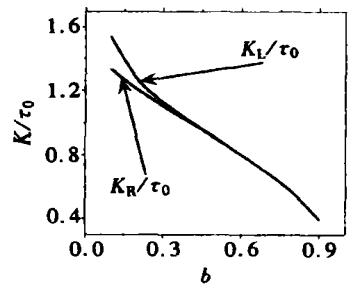


图7 应力强度因子随 b 的变化规律
($h = 1.5, \omega/c_3 = 0.4$; 环氧/PZT_5H/环氧)

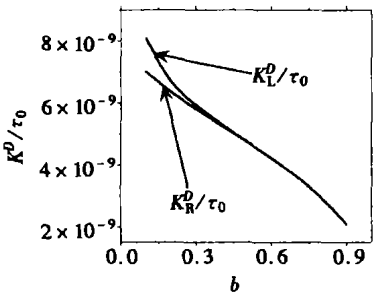


图8 电位移强度因子随 b 的变化规律
($h = 1.5, \omega/c_3 = 0.4$; 环氧/PZT_5H/环氧)

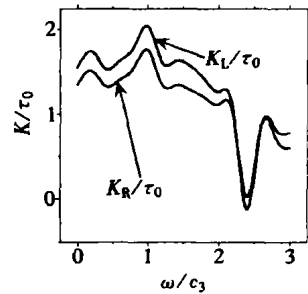
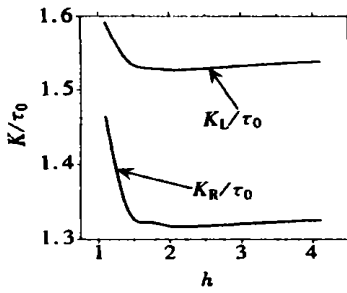
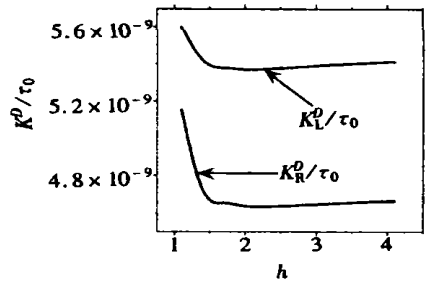


图9 应力强度因子随 ω/c_3 的变化规律
($h = 1.5, b = 0.1$; 环氧/PZT_4/环氧)

图 10 应力强度因子随 h 的变化规律

($b = 0.1$, $\omega/c_3 = 0.4$; 环氧/PZT-4/环氧)

图 11 电位移强度因子随 h 的变化规律

($b = 0.1$, $\omega/c_3 = 0.5$; 环氧/PZT-4/环氧)

ii) 对不同材料结合情况, 随着压电层宽度的增加, 电位移强度因子增加或减少, 如图 5、图 10 和图 11 所示。因此, 通过改变材料的结合情况, 可以使应力场达到最小值。

iv) 本文的解在 $h \geq 4.0$ 的情况下近似于无限的压电材料含有两个共线裂纹情况。也就是压电材料宽度 $h \geq 4.0$ 时对结果的影响很小, 如图 5 所示。

v) 对导通裂纹条件, 电位移强度因子比非导通裂纹条件要小得多^[11]。如图 3、图 8 和图 11 所示。

vi) 在裂纹内尖端, 应力强度因子和电位移强度因子比裂纹外尖端大。可是对 $b > 0.45$ 的情况, 在裂纹内尖端和裂纹外尖端的应力强度因子和电位移强度因子几乎相等, 如图 4、图 7 和图 8 所示。

vii) 动态应力强度因子随着入射波频率增加而增加, 而后达到一个峰值, 然后减小。当入射波的频率超过 2.3 左右时, 应力强度因子在某些情况下变为负值。所以, 通过调节入射波频率能够延缓裂纹的扩展。可是当频率 $\omega/c_3 > 2.5$ 时, 动态应力强度因子的幅值随入射波频率的增加而又达到一个负峰值, 如图 2、图 6 和图 9 所示。这一现象是由自由波引起的, 而自由波是由积分方程(34)中被积函数的奇异性所引起。所以, 通过改变入射波的频率可以使应力场达到极小值。

[参 考 文 献]

- [1] Deeg W E F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids[D]. Ph D thesis. Palo Alto: Stanford University, 1980.
- [2] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(4): 647—653.
- [3] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40(5): 739—765.
- [4] Gao H, Zhang T Y, Tong P. Local and global energy rates for an elastically yielded crack in piezoelectric ceramics[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45(4): 491—510.
- [5] ZHOU Zhen-gong, WANG Biao, CAO Mao-sheng. Analysis of two collinear cracks in a piezoelectric layer bonded to dissimilar half spaces subjected to anti-plane shear[J]. European Journal of Mechanics A/ Solids, 2001, 20(2): 213—226.
- [6] Suo Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics[J]. Journal of the mechanics and Physics of Solids, 1993, 41(6): 1155—1176.

- [7] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, **33**(5): 343—359.
- [8] Sosa H, Khutoryansky N. Transient dynamic response of piezoelectric bodies subjected to internal electric impulses[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(9): 5467—5484.
- [9] Soh A K, Fang D N, Lee K L. Analysis of a bi piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti plane shear and in plane electric loading[J]. European Journal of Mechanics, A/ Solid, 2000, **19**(6): 961—977.
- [10] ZHOU Zhen_gong, CHEN Jun_ying, WANG Biao. Analysis of two collinear cracks in a piezoelectric layer bonded to two half spaces subjected to anti plane shear[J]. Meccanica, 2000, **35**(5): 443—456.
- [11] 周振功, 王彪. 采用新方法研究夹层压电材料中平行界面共线双裂纹的断裂问题[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(1): 1—11.
- [12] YU Shou_wen, CHEN Zeng_tao. Transient response of a cracked infinite piezoelectric strip under anti plane impact[J]. Fatigue and Engineering Materials and Structures, 1998, **21**(10): 1381—1388.
- [13] ZHOU Zhen_gong, LIANG Jun, WANG Biao. Two collinear permeable cracks in a piezoelectric layer bonded to two half spaces[J]. Meccanica, 2003, **38**(4): 467—475.
- [14] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [M]. Vol 1. New York McGraw_Hill, 1958.
- [15] Srivastava K N, Palaiya K N, Karaulia D S. Interaction of shear waves with two coplanar Griffith cracks situated in an infinitely long elastic strip[J]. International Journal of Fracture, 1983, **23**(1): 3—14.
- [16] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integral, Series and Products [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [17] Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [M]. Vol 1. New York: McGraw_Hill, 1954.

Dynamic Behavior of Two Collinear Permeable Cracks in a Piezoelectric Layer Bonded to Two Half Spaces

QU Gui_min, ZHOU Zhen_gong, WANG Biao

(P. O. Box 1247, Center for Composite Materials and Electro Optics Research Center,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The dynamic behavior of two collinear cracks in a piezoelectric layer bonded to two half spaces under harmonic anti plane shear waves was investigated by means of Schmidt method. The cracks are vertically to the interfaces of the piezoelectric layer. The boundary conditions of the electrical field were assumed to be the permeable crack surface. By using the Fourier transform, the problem can be solved with the help of two pairs of triple integral equations. Numerical examples were presented to show the effect of the geometry of the interacting cracks, the piezoelectric constants of the materials and the frequency of the incident waves upon the stress intensity factors. The results show that the dynamic field will impede or enhance the propagation of the crack in a piezoelectric material at different stages of the frequency of the incident waves. It is found that the electric displacement intensity factors for the permeable crack surface conditions are much smaller than the results for the impermeable crack surface conditions.

Key words: elastic wave; piezoelectric material; Fourier integral transform; Schmidt method; crack