

文章编号: 1000-0887(2005)09-1076-07

# 应用多刚体离散化方法对梁的动力屈曲和后屈曲分析\*

殷学纲<sup>1</sup>, 杜思义<sup>1,2</sup>, 胡继云<sup>3</sup>, 剡平<sup>4</sup>

- (1. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044;
2. 郑州大学 土木工程学院, 郑州 450002;
3. 河南工业大学 机电工程学院, 郑州 450052;
4. 重庆科技学院 建筑工程学院, 重庆 400042)

(我刊原编委张汝清推荐)

**摘要:** 基于梁的多刚体离散化模型(有限段模型),建立了梁的链式多刚体\_铰链\_弹簧系统模型,利用坐标变换方法建立了相应的非线性多自由度系统的参数振动方程,并利用约束参数法对所得到的多度系统的 Mathieu\_Hill 方程进行了梁的动力屈曲分析,得到系统的参数共振域。因为所用的离散化模型与动力方程对梁的变形并无限制,所以可以用所得到的数学模型在其失稳域对梁的动力后屈曲进行数值仿真分析。通过实例的数值仿真,证明了这种梁的参数振动模型与分析方法的正确性。

**关键词:** 杆梁; 有限段法; 动力屈曲; 参激振动; 后屈曲  
**中图分类号:** O345      **文献标识码:** A

## 引 言

结构的动力屈曲问题,即结构的参数激励振动问题,是一个非线性振动问题。在 20 世纪 40 年代,俄国学者使用 Galerkin 方法研究了梁的动力稳定性问题<sup>[1]</sup>, B. B. Bolokin 提出了一种基于假设模态的方法。Bolokin 以梁的第一阶振动主模态作为梁的动力屈曲模态,用这种方法获得了近似的梁第一阶模态下的动力不稳定区域,即给出了梁的第一阶动力屈曲问题的近似解。

目前,有限单元法已是结构分析的一种成熟方法,它能有效地对结构进行静力屈曲分析。但用有限元法难于对梁式结构的动力屈曲问题进行分析<sup>[2]</sup>,因为它是一个几何非线性问题。有限段法(FSM)是一种新的结构离散化方法,它不同于通常的集中质量法和有限单元法。这种方法的基本思想是对结构的弹性进行分离,建立多刚体\_弹簧\_铰链系统的力学模型,这种离散化方法又称为“多刚体离散化方法”。然后根据力学模型建立力学控制方程,即导出其数学模型,最后进行数值求解。这种离散化方法最大特点是对梁的变形与运动没有任何限制。

\* 收稿日期: 2003\_07\_29; 修订日期: 2005\_06\_10

作者简介: 殷学纲(1939—),男,重庆人,教授,博士生导师(E-mail: xg.yin@163.com);  
杜思义(1969—),男,淮阳人,讲师,博士(E-mail: dsy3227@zzu.edu.cn)。

在1976年, Winget. J. M 和 Huston. R. L 提出了“有限段法(FSM)”, 并成功地用在缆索动力学分析上。在1988年, 作者将有限段法用在弹性梁模型上, 并以悬臂梁为例讨论了其动力特性<sup>[3]</sup>。还利用这一离散化方法对梁的静力后屈曲问题进行了数值分析<sup>[4]</sup>。本文利用 FSM 法探讨梁的动力屈曲和后屈曲问题。

## 1 基于有限段法的梁的离散化力学模型

用有限段法, 一根梁被离散为  $N$  个小段, 每个小段视为一个刚体, 为了方便, 称这个小段为“单元”。在2个相邻的单元之间有光滑铰和弯曲弹簧连接, 单元的端点称为结点, 如果需要考虑结构的阻尼, 可在单元的两结点上增加一个阻尼器。这种建模方法为有限段法和多刚体离散化法<sup>[2,3]</sup>。方程建立在 Cartesian 坐标系下, Cartesian 坐标系的坐标原点放在第一个结点上,  $Ox$  轴与梁轴线重合, 如图1所示。

图1中符号的意义:

( $i$ ) —— 节点号或弹簧的编号;

$i$  —— 第  $i$  刚体单元的编号;

$l_i$  —— 第  $i$  单元的长度;

$k_i$  —— 第( $i$ ) 结点处的等效弹簧的刚度系数。

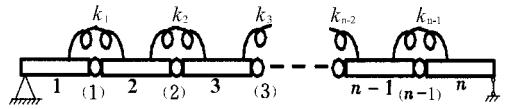


图1 梁的多刚体离散化模型

梁的弯曲刚度分布到单元两端的结点上, 梁单元的弯曲刚度系数是  $EI/l$ , 集中弹簧的刚度系数是  $k = 2EI/l$ 。当2个单元相连时, 端点的弹簧也被连接起来, 因此2个单元之间的等效刚度系数为

$$k_i = 2E E_{i+1} I_i I_{i+1} / (E_i I_i l_{i+1} + E_{i+1} I_{i+1} l_i) \quad (1)$$

当梁的端点简支时, 简支端弹簧的刚度为0, 即  $k_0 = 0, k_n = 0$ 。

假如单元  $i$  的轴线与  $Ox$  轴正方向之间的夹角是  $\varphi_i$ ,  $X_i$  和  $Y_i$  表示节点  $i$  的坐标, 那么  $X_i$  和  $Y_i$  可表示为

$$X = H \cos \varphi, \quad Y = H \sin \varphi, \quad (2)$$

其中:

$$H = \begin{bmatrix} l_1 & & & \mathbf{0} \\ l_1 & l_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n]^T,$$

即令  $\cos \varphi = [\cos \varphi_1 \quad \cos \varphi_2 \quad \dots \quad \cos \varphi_n]^T$ ,  $\sin \varphi = [\sin \varphi_1 \quad \sin \varphi_2 \quad \dots \quad \sin \varphi_n]^T$ ,

单元的几何中心坐标可表示为:

$$X_c = L \cos \varphi, \quad Y_c = L \sin \varphi, \quad (3)$$

其中:

$$L = \begin{bmatrix} l/2 & & & & \mathbf{0} \\ l_1 & l_2/2 & & & \\ l_1 & l_2 & l_3/2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n/2 \end{bmatrix}.$$

## 2 梁的有限段模型的动力平衡方程

第  $i$  单元的受力如图 2 所示。其中  $M_i$ 、 $F_{ix}$ 、 $F_{iy}$  为作用于  $i$  单元的主动动力， $R_x$ 、 $R_y$  为铰链约束反力， $M_i$  为弯曲弹簧恢复力。

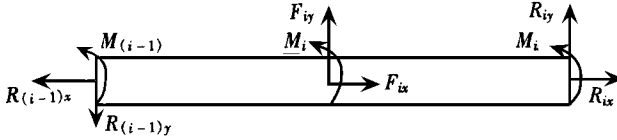


图 2 单元受力图

基于单元受力图, 第  $i$  个单元的动力平衡方程写成矩阵形式为

$$M_{ei} \ddot{X}_i = P_i + N_i, \quad (4)$$

其中:

$$M_{ei} = \begin{bmatrix} m_{ei} & & \mathbf{0} \\ & m_{ei} & \\ \mathbf{0} & & I_{eci} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{X}_i = [\dot{X}_{ic} \quad \dot{Y}_{ic} \quad \dot{\phi}_i]^T,$$

$$P_i = [F_{ix} \quad F_{iy} \quad M_i + M_i + M_{i-1}]^T,$$

$$N_i = [R_x - R_{(i-1)x} \quad R_{iy} - R_{(i-1)y} \quad M_{iR}]^T,$$

$P_i$  和  $N_i$  分别表示主动力矢量和约束力矢量,  $M_{iR}$  为约束反力对质心的力矩。系统坐标按  $X$ 、 $Y$ 、 $\varphi$  重新排序后, 得系统动力平衡方程为

$$M\ddot{Z} - (P + N) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

其中:

$$Z = [X_c^T \quad Y_c^T \quad \varphi^T]^T,$$

$$M = \text{diag}[M_e \quad M_e \quad I_{ec}], \quad M_e = \text{diag}[m_{ei}],$$

$$I_{ec} = \text{diag}[I_{eci}],$$

$$P + N = [(P_x + N_x)^T \quad (P_y + N_y)^T \quad (M_P + M_R)^T]^T,$$

$M_P$  为主动力力矩。

利用动力学普遍方程, 并考虑理想约束:  $\delta Z^T N = \mathbf{0}$ , 则可得

$$\delta Z^T (M\ddot{Z} - P) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

考虑方程(3), 可得方程(7)

$$Z = Z(\varphi), \quad (7)$$

又得

$$\delta Z = J_z \delta \varphi, \quad \ddot{Z} = J_z \ddot{\varphi} + J_z \mathcal{C}, \quad (8)$$

其中:

$$J_z = \begin{bmatrix} -L \text{diag}(\sin \varphi_i) & & \mathbf{0} \\ & L \text{diag}(\cos \varphi_i) & \\ \mathbf{0} & & E_{n \times n} \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \cdot$$

$E$  为单位阵, 将方程(8) 代入方程(6), 可得梁有限段模型的动力学普遍方程形式的动力学方程为

$$\delta \varphi^T (\mu \dot{\varphi} + \xi \varphi - \Phi) = \mathbf{0}, \quad (9)$$

其中:

$$\mu = J_z^T M J_z, \quad \xi = J_z^T M \dot{P}_z, \quad \Phi = J_z^T P.$$

### 3 动力屈曲和后屈曲分析

通常, 梁端点有不同的支承条件, 因此,  $\varphi$  在总体坐标系中不是独立的. 假定有约束方程  $f_j(\varphi) = \mathbf{0} (j = 1, 2, \dots, r)$ ,  $r$  为约束方程个数, 并令  $q = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r})^T$  是独立的坐标, 可得如下方程

$$\delta \varphi = D \delta q, \quad (10)$$

其中:  $D$  是图 1 系统的约束矩阵. 因为简支梁的约束方程为

$$y_n = \sum_{i=1}^n l_i \sin \phi_i = 0, \quad (11)$$

$$D = \begin{bmatrix} & & & & E_{(n-1) \times (n-1)} \\ -l_1 \cos \phi_1 / l_n \cos \phi_n & -l_2 \cos \phi_2 / l_n \cos \phi_n & \dots & -l_{n-1} \cos \phi_{n-1} / l_n \cos \phi_n & \end{bmatrix}_{n \times (n-1)}.$$

对于承受轴向周期力  $p(t)$  的简支梁, 那么方程(9) 中的  $\Phi$  为

$$\Phi = -p(t) J_n \sin \varphi + k \varphi,$$

其中:

$$J_n = \begin{bmatrix} l_1/2 & & & & \mathbf{0} \\ & l_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & l_{n+1} & \\ \mathbf{0} & & & & l_n/2 \end{bmatrix},$$

$$k = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & & & \\ & & & -k_2 & k_2 + k_3 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -k_{n-2} & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & & & & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n \end{bmatrix}_{n \times n},$$

则方程(9) 成为方程(12)

$$\delta \varphi^T (\mu \dot{\varphi} + \xi \varphi + k \varphi - p(t) J_n \sin \varphi) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

然后, 将方程(10) 代入方程(12), 考虑  $\delta q$  的独立性, 可得下面的方程

$$D^T \mu \dot{\varphi} + D^T \xi \varphi + D^T k \varphi - p(t) D^T J_n \sin \varphi = \mathbf{0}, \quad (13)$$

方程(13) 是受轴向周期力作用下简支梁的参激振动方程.

对动力稳定性分析, 只需考虑小变形, 并不计阻尼, 由方程(13) 可得

$$\mu^* \ddot{q} + k^* q - p(t) D^{0T} J_n D^0 q = \mathbf{0}, \quad (14)$$

对于均质梁取等长单元情况下有

$$\mu^* = D^{0T}(L^T M_c L + I_{ec}) D^0, \quad k^* = D^{0T} k D^0,$$

$$D^0 = \begin{bmatrix} & & E_{(n-1) \times (n-1)} & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times (n-1)},$$

方程(14)是 Mathieu\_Hill 型方程,即简支梁的有限段模型的参数振动方程最终归结为一个 Mathieu\_Hill 方程。

求广义特征值问题:

$$(k^* - p^2 \mu^*) \varphi = \mathbf{0}. \quad (15)$$

标准化的特征矢量  $\varphi_N$  容易获得,利用它进行坐标变换。

$$q = \varphi_N \beta, \quad (16)$$

因此,在  $\beta$  坐标空间中方程(14)可改写为:

$$\beta + \text{diag} p_i^2 (E + p(t) \text{diag} p_i^{-2} \eta) \beta = \mathbf{0}. \quad (17)$$

其中:  $\eta = D^{0T} J_n D^0 \varphi_N$ .

令  $p(t) = A \cos \omega t$ , 作变换  $\omega t = 2\tau$ , 并记  $d^2 \beta / d\tau^2 = \beta''$ , 那么方程(17)成为一标准的 Mathieu\_Hill 方程<sup>[5]</sup>。

$$\beta'' + \delta (E + 2d\xi \cos 2\tau) \beta = \mathbf{0}, \quad (18)$$

其中:

$$\delta = 4 \text{diag} p_i^2 / \omega^2,$$

$$2d = \frac{A}{p_i^2},$$

$$\xi = (p_i^2 \text{diag} p_i^{-2}) \eta,$$

$\xi$  是激励系数矩阵。

设:

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots,$$

$$\delta = a^2 E + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots, \quad (19)$$

注  $\delta_1, \delta_2, \dots$  为对角阵。

将方程(19)代入方程(18),令方程两边  $\varepsilon$  的系数相等,可得

$$\begin{cases} \beta_0'' + a^2 \beta_0 = \mathbf{0}, \\ \beta_1'' + a^2 \beta_1 = -(\delta_1 + 2a^2 \xi \cos 2\tau) \beta_0, \\ \beta_2'' + a^2 \beta_2 = -(\delta_2 + 2\delta_1 \xi \cos 2\tau) \beta_0 - (\delta_1 + 2a^2 \xi \cos 2\tau) \beta_1, \end{cases} \quad (20)$$

按照求解参数激励振动方程的约束参数法<sup>[4,5]</sup>可以得到

当  $a = 1$  时,过渡曲线方程

$$\delta = E + \varepsilon \xi - \varepsilon^2 \frac{1}{8} (\xi^2), \quad (21)$$

当  $a = 2$  时,过渡曲线方程

$$\delta = 4E + \frac{5}{12} \varepsilon^2 \xi^2, \quad (22)$$

$$\text{和} \quad \delta = 4E - \frac{1}{12} \varepsilon^2 \xi^2. \quad (23)$$

方程(21)~(23)为过渡曲线方程组,由此可得其失稳域。此处组合参数共振分析未列出,

感兴趣的读者可参考文献[6]至文献[8]。

由于(13)式对 $\varphi$ 没有任何限制,由此即可进行梁的动力后屈曲的数值分析,具体方法是利用分段线性化直接积分法并结合Newton-Raphson修正。

## 4 实 例

对一等截面简支梁轴向简谐力作用下的动力后屈曲数值仿真

一等截面简支梁,如图3所示,它被分成20个等长单元, $EI = 3.5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$ ,  $l = 800 \text{ mm}$ ,  $\rho \approx 1.57 \text{ g/mm}^3$ ;  $p(t) = 100 \cos(\pi f t) \text{ N}$ 。梁的基频  $p_1 = 260.003 \text{ l/s}$ 。

1) 当  $f = 15.0 \text{ Hz}$ , 梁振动是动力稳定的。

2) 当  $f = 41.387 \text{ Hz}$ , 梁的第2阶振动是动力不稳定的, 梁中点的竖向位移时间曲线如图4所示。

3) 当  $f = 82.774 \text{ Hz}$ , 梁第1阶振动是动力不

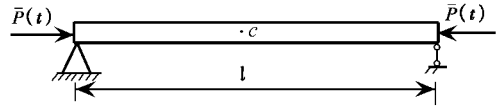


图3 简支梁受力图

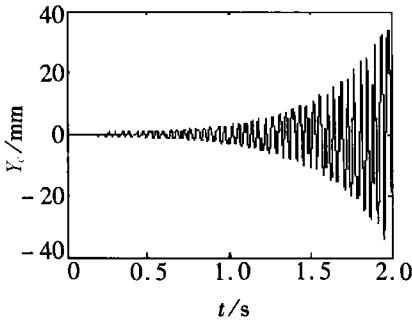


图4 工况2)响应曲线

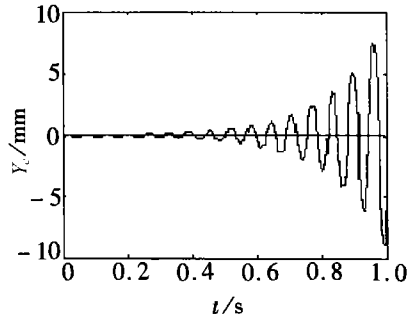


图5 工况3)相应曲线

稳定的, 梁中点的竖向位移时间曲线如图5所示。

## [参 考 文 献]

- [1] 鲍洛金 B B. 弹性体系的动力稳定性[M]. 北京: 高等教育出版社, 1960, 158—185.
- [2] 殷学纲, 万慧. 多刚体离散化方法在杆梁结构的屈曲与后屈曲分析中的应用[J]. 应用力学学报, 1995, 12(2): 66—71.
- [3] 殷学纲. 有限段法在梁非线性振动分析中的应用[J]. 重庆大学学报, 1988, 11(11): 113—125.
- [4] 殷学纲. 梁的动力稳定性分析的有限元方法[J]. 应用力学学报, 1995, 12(4): 81—87.
- [5] Nayfeh A H. Nonlinear Oscillations [M]. New York: J Wiley & Sons Inc, 1979, 258—369.
- [6] Winget J M, Huston R L. Cable dynamics\_a finite segment approach[J]. Journal of Serathres, 1976, 6(3): 476—480.
- [7] Yin W. Finite segment Model for elastic beams[J]. Trends and Developments in Mechanisms. Machines and Poboties, 1988, 15(2): 78—85.
- [8] 殷学纲. 建立离散系统动力学方程的矩阵方法[J]. 重庆大学学报, 1989, 12(1): 86—97.

# Analysis of Dynamical Buckling and Post Buckling for Beams by Finite Segment Method

YIN Xue\_gang<sup>1</sup>, DU Si\_yi<sup>1,2</sup>, HU Ji\_yun<sup>3</sup>, DING Jian\_ping<sup>4</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China;

2. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, P. R. China;

3. School of Mechanical and Electrical Engineering, Henan Institute of Technology, Zhengzhou 450002, P. R. China;

4. School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 400042, P. R. China)

**Abstract:** Based on the multi\_rigid body discretization model, namely finite segment model, a chain multi\_rigid body\_hinge\_spring system model of a beam was presented, then a nonlinear parametrically exacted vibration equation of multi\_degrees of freedom system was established using the coordination transformation method, and its resonance fields were derived by the restriction parameter method, that is the dynamical buckling analysis of the beam. Because the deformer of a beam isn't restricted by discrete model and dynamic equation, the post buckling analysis can be done in above math model. The numerical solutions of a few examples were obtained by direct integrated method, which shows that the mechanical and math model gotten is correct.

**Key words:** beam; finite segment method; post buckling; parametrically exacted vibration; buckling