

文章编号: 1000-0887(2005) 09_1038_07

非线性转子系统稳定性量化分析方法^{*}

郑惠萍¹, 薛禹胜², 陈予恕³

- (1. 河北科技大学 机械电子工程学院, 石家庄 050054;
2. 国家电力公司 电力自动化研究院, 南京 210003;
3. 天津大学 机械学院力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 转子轴承系统是一类多自由度非线性动力系统, 广泛应用于工程实际。设计观念和维修体制的变革提出了稳定性量化分析的要求。本文利用轨线保稳降维方法提出了转子系统稳定性的量化分析方法。首先, 对高维非线性非自治转子系统进行数值积分, 将 n 维空间的轨线映射为一系列一维的映象轨线, 并将各自由度的运动方程中除该自由度外的所有状态变量用积分结果代换, 得到 n 个互相解耦, 含有多个时变参数的单自由度方程。然后, 在一维观察空间的外力位移扩展相平面上定义了动态中心点, 研究转子系统中常见的几种运动的动态中心点动能差序列的特点, 给出了上述典型运动形式的轨线稳定裕度的定量评估指标, 应用灵敏度分析技术快速有效地预测周期运动的倍周期分岔点和 Hopf 分岔点。以一个具有非线性支承的滑动轴承柔性转子模型为例, 证明了该方法的有效性。

关键词: 非线性转子系统; 分岔; 扩展相平面; 动态中心点; 动能差序列; 稳定裕度
中图分类号: O322; TH113 **文献标识码:** A

引 言

转子轴承系统是一类重要的多自由度非线性动力系统, 广泛应用于工业实际。由于转子难以完全消除不平衡量, 因此, 由不平衡量造成的系统工频振动就成为此类系统的典型运动形式。在数值计算、实验观测和生产实际中, 均发现非线性转子系统由周期运动失稳为倍周期运动、概周期运动和混沌运动的现象。因此, 研究转子系统周期运动的稳定性具有重要的理论意义和工程实用价值。

周期运动的定量分析, 传统采用的是以摄动法和渐进法为代表的各种近似分析方法, 如 KBM 法, 多尺度法, 平均法等。其优点是: 通过少量计算即能得到有关解的性质及其与一些参数之间定量关系的一个概貌。但由于只适用于弱非线性问题及低维系统, 应用受到限制。适用于非线性振动系统定常运动的数值计算方法主要有两大类: 一类设法把常微分方程周期解的计算转化为非线性代数方程组的求解问题, 如 Galerkin 法、Chebyshev 法; 另一类则是常微分

* 收稿日期: 2003_05_23; 修订日期: 2005_04_29

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目(19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316; G1998010301)

作者简介: 郑惠萍(1964—), 女, 河北石家庄人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_311_8613304; Fax: + 86_311_8613300; E_mail: hpzheng@126.com)。

方程直接数值积分,如点映射、胞映射、广义胞映射以及打靶法。虽然这些方法可以利用 Floquet 理论分析周期解的稳定性并确定分岔点的位置,但由于没有裕度的概念,只能用试探法搜索分岔点,所需的计算量非常大。另一方面, Floquet 乘数的计算需要利用系统所有变量的信息,这就为其工程应用带来困难。更为重要的是,转子系统的设计观念正从过去单一的重视功能性向可靠性和稳定性与优良的功能受到同样的重视转变;同时,维修体制也正在从传统的时候维修制和定期维修制向视情维修制转变。正是这样的两个变革对稳定性的量化研究提出了迫切的要求。本文基于已在电力系统稳定性量化分析中得到广泛应用的轨迹保稳降维变换,在一维观察空间定义了轨迹稳定裕度(以下简称稳定裕度),给出了基于稳定裕度的非线性转子系统周期运动分岔点的预测方法,利用该方法对一个具有非线性支承的滑动轴承柔性转子系统的动力学行为进行了量化分析。

1 $R^n \rightarrow R^1$ 的轨线保稳降维

轨线保稳降维变换^[1]是将 R^n 轨线稳定的充要条件严格地保存在某个映象中的线性变换。通过该变换将 R^n 积分空间与 R^1 观察空间分离,即在 R^n 空间中积分或从物理系统中测量以保证轨线的精确性,而从 R^2 或 R^1 映象轨线中抽取出原系统有关的动力学特性。

针对多自由度相对运动的有界稳定性,提出了互补簇惯量中心相对运动(CCCOLRM)保稳变换和互补簇簇际能量壁垒准则(CCEBC)^[2]。其商品化的软件包已在中国、韩国、法国、加拿大和美国的许多大学和电力系统中得到工程应用,实现了快速定量分析。

针对多自由度系统绝对运动的结构稳定性,例如非线性转子系统的动力学行为,提出了坐标轴投影法。在 R^n 空间积分得到所有的轨线,其中每一条轨线代表了一个观察空间,这时的变换矩阵为单位阵。由于每一个观察空间的轨线都严格地包含了其它 $(n-1)$ 个观察空间的影响,因此,高维转子系统分岔特性的研究就变成了在观察空间中分析观察轨迹特征并从中抽取原系统动力学特性的问题。实际工作中,并不需要逐个观察空间进行分析,而只需选择认为重要的观察空间来分析并预测系统的分岔点。

轨线保稳降维变换通过积分,将 DAE、非线性、非自治性、多自由度等一系列困难,统一转换为二维或三维轨线的动力学特性的抽取问题。它既具有数值积分法在求取时间响应方面几乎无限的能力,又兼有(扩展)相平面法的简明性和机理性,将非线性动力学分析从定性的范畴提升到量化。

2 R^1 观察空间转子系统的运动特征

2.1 动态中心点动能差序列

动态中心点指的是在 R^1 观察空间的外力位移扩展相平面上的一次有界摆动中,外力为零的点,如图 1(a)、图 1(b)中的 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 点,其对应于一次摆动过程中的动能极值点^[3]。相应点的动能分别用 $K(O_1)$ 、 $K(O_2)$ 、 $K(O_3)$ 、 $K(O_4)$ 表示。动态中心点动能序列由同向各摆次的动态中心点的动能所构成;动态中心点的动能差序列为同向摆次的相邻两个动态中心点动能之差的绝对值,分别用 K_{13} 、 K_{24} 表示。

2.2 R^1 观察空间转子系统的运动特征

转子系统常见的工频周期运动(以下简称周期运动)、倍周期运动、概周期运动在 R^1 观察空间的轨迹特征和动态中心点的动能差序列见图 1 至图 3。

不同稳态运动的动能差序列均有两种瞬态方式。周期运动动能差序列经过短暂的瞬态达到

最大值后,其瞬态衰减过程既可能从最大值依次递减,也可能波动地递减到达稳态,稳态值为零,如图 3(a)、图 3(d)所示。倍周期运动动能差序列的一种方式是经过短暂的瞬态达到最大值后逐渐递减;另一种方式则是经过短暂的瞬态达到最小值,从最小值逐渐递增直到稳态,稳态值为一常数,如图 3(b)、图 3(e)所示。概周期运动经过短暂的瞬态后,或者从最大值波动地递减到稳态,或者从最小值波动地递增到稳态,稳态时为有规律的波动,如图 3(c)、图 3(f)所示。

稳态时,不同的运动对应的稳态动能差序列的特征参数见表 1。根据表 1 中的特征参数来判断运动轨迹是否达到稳态,并同时确定运动轨迹的运动类型。

表 1 稳态动能差序列的特征参数

运动形式 \ 特征参数	K_{13}	ΔK_{13}	$E(K_{13})$	$D(K_{13})$	$\Delta E(K_{13})$
周期运动	0	0	0	0	0
倍周期运动	C_1	0	C_1	0	0
概周期运动	概周期波动	概周期波动	C_2	C_3	0

表中 ΔK_{13} 为 K_{13} 序列相邻两值的差值; $E(K_{13})$ 为 K_{13} 序列在一个样本长度内的均值; $D(K_{13})$ 为 K_{13} 序列在一个样本长度内的均方差; $\Delta E(K_{13})$ 表示 $E(K_{13})$ 序列的变化程度; C_1 、 C_2 、 C_3 为常数。

3 稳定裕度

3.1 周期运动稳定裕度

周期运动的稳定裕度用动能差序列衰减的快慢程度来衡量。衰减的快慢,是系统阻尼大小的衡量指标。衰减速度越快,说明阻尼越大则系统越稳定。该衰减速度用动能差序列包络线的衰减指数来表达。求取衰减指数,首先需截取动能差序列的瞬态衰减过程,然后求出其包络线序列。利用下列曲线拟合包络线序列:

$$z = a e^{-bn}, \quad (1)$$

式中 n 为周期数, z 为动能差之值, b 为衰减指数。定义周期运动的稳定裕度为:

$$\eta = \min(b_{K_{13}}, b_{K_{24}}), \quad (2)$$

其中 $b_{K_{13}}$ 、 $b_{K_{24}}$ 分别为根据动能差序列 K_{13} 、 K_{24} 计算出的衰减指数。

3.2 倍周期运动稳定裕度

随着参数的变化,系统经过倍周期分岔,其运动状态由周期运动变为倍周期运动。倍周期运动的明显特征是稳态时动能差序列为常数 C_1 , 该数值为一个周期内最大摆次中的最大动能与同向摆动的另一个摆次中最大动能的差值的绝对值。它反映了倍周期运动中低频分量的大小以及倍周期运动的剧烈程度,故定义倍周期运动的稳定裕度为:

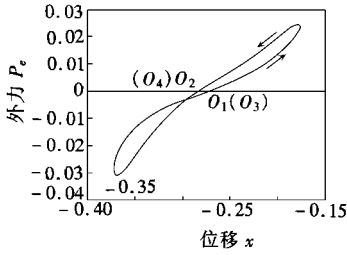
$$\eta = -C_1, \quad (3)$$

C_1 越大表示倍周期运动中低频分量越大,倍周期运动程度越剧烈,即 η 越负,系统的失稳程度越严重。临界状态时, $\eta = 0$ 。

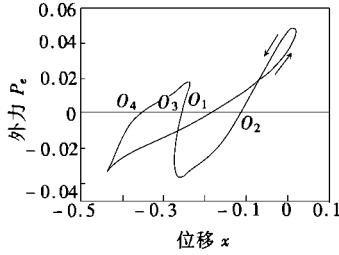
3.3 概周期运动稳定裕度

随着参数变化,系统发生 Hopf 分岔,周期运动变为概周期运动,由于存在“锁模”现象,还会有 N 周期运动出现。概周期运动两个频率成份的比值为无理数,在外力位移扩展相平面上表现为一带状结构,如图 1(c)所示;而在相图上表现为在一有界圆环内不封闭的运动轨迹,如图 2(c)所示;这使得稳态时动能差序列呈现概周期波动,如图 3(e)、图 3(f)所示。 N 周期运动与概周期运动所不同的是相轨迹与外力位移轨迹是以 NT 为周期的封闭曲线,在动能差序列

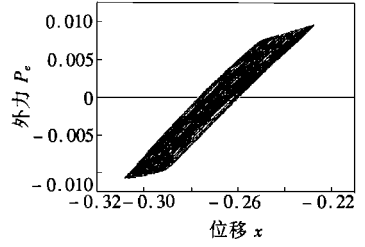
上则表现为严格的周期特征•



(a) 工频周期运动

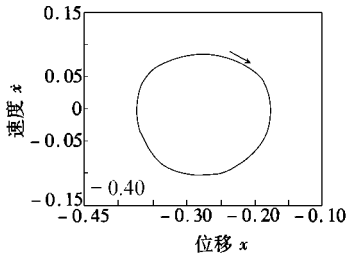


(b) 倍周期运动

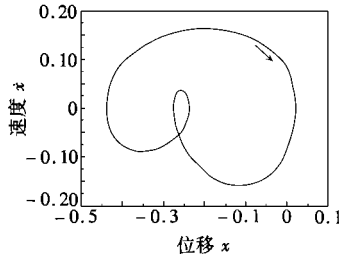


(c) 概周期运动

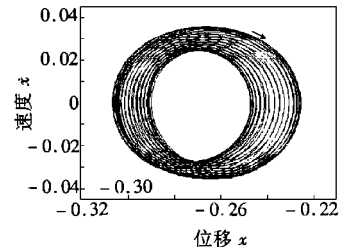
图 1 扩展相平面上轨迹



(a) 工频周期运动

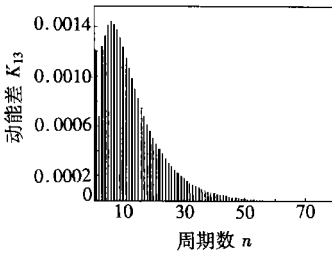


(b) 倍周期运动

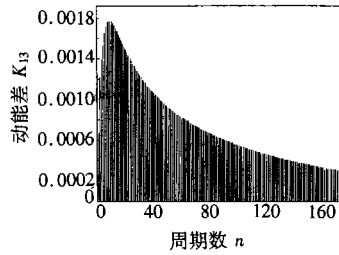


(c) 概周期运动

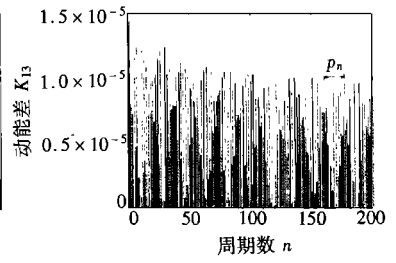
图 2 相平面上的轨迹



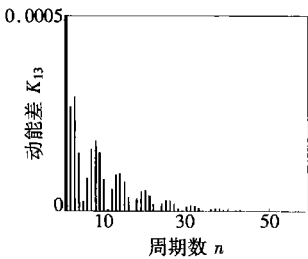
(a) 工频周期运动



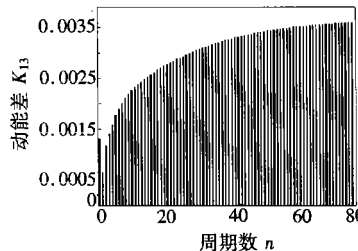
(b) 倍周期运动



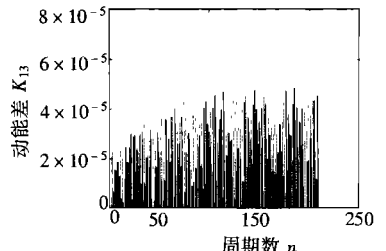
(c) 概周期运动



(d) 工频周期运动



(e) 倍周期运动



(f) 概周期运动

图 3 动能差序列

鉴于概周期运动动能差序列的非周期特征, 研究时必须选择合适的样本长度• 定义一个 (或连续几个) 近似周期内的动能差序列为一个样本长度, 用 p_n 表示, 如图 3(c) 所示• 计算出 p_n 后, 按照 p_n 为样本长度在动能差序列上依次截取形成一个样本序列• 计算对应于每一个样本长度内动能差序列的均值 $E(K_{13})$ 和均方差 $D(K_{13})$, 从而形成一个均值序列和一个均方差序列• 均值序列的变化程度用 $\Delta E(K_{13})$ 表示

$$\Delta E(K_{13}) = \frac{|E_{i+1}(K_{13}) - E_i(K_{13})|}{E_i(K_{13})}, \tag{4}$$

其中 $E_i(K_{13})$ 和 $E_{i+1}(K_{13})$ 为均值序列中相邻的两个数值。

概周期运动轨线的非周期程度用轨线到达稳态时动能差序列的一个样本长度内的均值 $E(K_{13})$ 表示, 该值反映了概周期运动动态中心点动能差的平均变化程度。动态中心点动能差的波动幅度用动能差序列一个样本长度内的均方差 $D(K_{13})$ 表示。因此, 概周期运动的稳定裕度包含以下两个内容:

$$\eta = (\eta_p, \eta_{pd}), \quad \eta_p = -E(K_{13}), \quad \eta_{pd} = -D(K_{13}), \tag{5}$$

其中 η_p 用来判断周期运动到概周期运动的分岔点, η_{pd} 用来判断倍周期运动到概周期运动的分岔点。 η 越负说明系统失稳程度越严重, 概周期运动越剧烈, 临界状态时, $\eta = 0$ 。

4 分岔点预测

4.1 稳定裕度的灵敏度分析

系统分岔点处的稳定裕度为零, 故预测分岔点的问题就是求取使稳定裕度为零的参数值 α_{lim} 。当参数发生变化时, 系统的稳定裕度也会相应发生变化。参数 α 的微小变化对观察空间的轨迹稳定裕度 η 的影响, 可以通过 η 对于 α 的各阶灵敏度系数来反映。不论系统多复杂, 总是可以用数值摄动法来求取稳定裕度在任何目标参数方向上的各阶灵敏度系数。

在得到与对象参数初始工作点 α_0 对应的稳定裕度 $\eta(\alpha_0)$ 后, 按指定的目标方向取数值摄动量 $\Delta\alpha$, 求取 $\eta(\alpha_0 + \Delta\alpha)$, 则用数值摄动法得到 η 对于 α 的一阶灵敏度系数为:

$$S_\alpha = (\eta(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \eta(\alpha_0)) / \Delta\alpha, \tag{6}$$

基于线性假设时,

$$\alpha_{lim} = \alpha_0 - \eta_0 / S_\alpha. \tag{7}$$

由于不同运动类型稳定裕度的定义不同, 预测分岔点时需要把灵敏度分析与二分法结合应用。

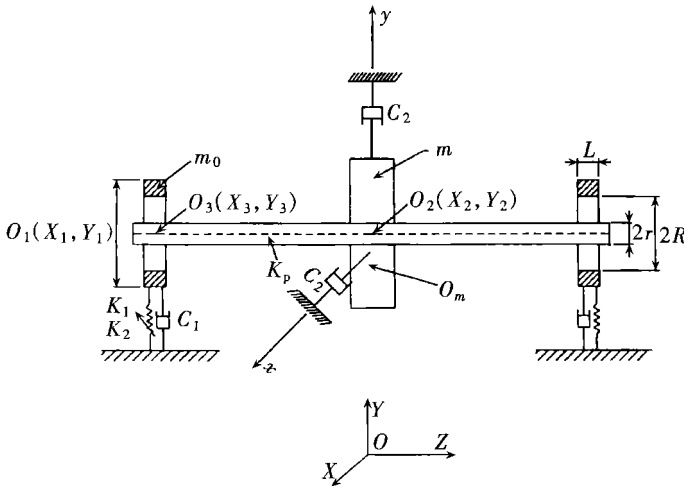


图4 具有非线性支承的滑动轴承柔性转子系统示意图

4.2 算例

支承在具有非线性支承的滑动轴承上的柔性转子示意图如图4所示。 O_m 为转子的质

心, O_1, O_2, O_3 分别为轴承、转子、轴颈的几何中心, m 和 ρ 分别为转子的质量和质量偏心距, K_p 为轴的刚度, ϕ 和 ω 分别为轴的旋转角和旋转角速度, m_0 为轴承座的质量, K_1 和 K_2 分别为支承轴承座的刚度, C_1 为支承结构的阻尼系数, C_2 为转子圆盘的粘性阻尼, R 为轴承座的内径, r 为轴的直径. 图5为轴承截面图, (X, Y) 为固定坐标, (e, φ) 为旋转坐标. e 为轴颈中心的偏心距, φ 为旋转坐标的方向角. 无量纲运动方程如下^[4]:

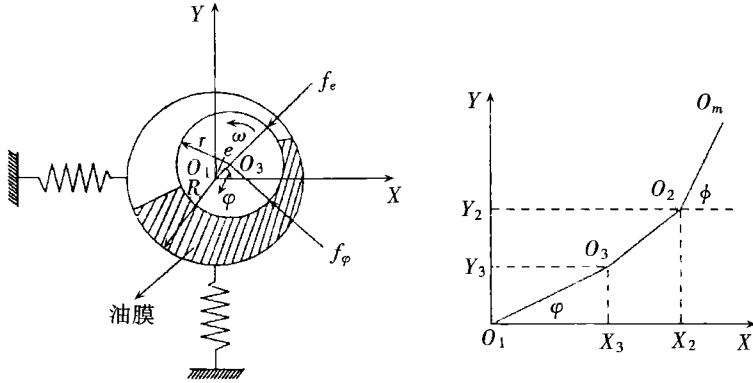


图5 滑动轴承截面图

$$\left\{ \begin{aligned}
 & y_1'' + \frac{2\xi_1}{a_1} y_1' + \frac{1}{a_1^2} y_1 + \frac{\alpha}{a^2} y_1^3 - \frac{1}{2C_0 a^2} (y_2 - y_1 - \varepsilon \sin \varphi) + \frac{f}{a^2} = 0, \\
 & x_1'' + \frac{2\xi_1}{a_1} x_1' + \frac{1}{a_1^2} x_1 + \frac{\alpha}{a^2} x_1^3 - \frac{1}{2C_0 a^2} (x_2 - x_1 - \varepsilon \cos \varphi) = 0, \\
 & \varepsilon' = \frac{1}{(1/2)\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 8\varepsilon^2(\pi b(1-\varepsilon^2)^{5/2}((x_2-x_1)\cos\varphi + (y_2-y_1)\sin\varphi - \varepsilon) - 4\beta(1-\varepsilon^2)^2((x_2-x_1)\sin\varphi - (y_2-y_1)\cos\varphi))}, \\
 & \varphi' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}(\varepsilon^2 - (1/16)\pi^2(1+2\varepsilon^2))} (b\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{5/2} \times \\
 & \quad ((x_2-x_1)\cos\varphi + (y_2-y_1)\sin\varphi - \varepsilon) - \frac{1}{4}\pi b(1+2\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^2 \times \\
 & \quad ((x_2-x_1)\sin\varphi - (y_2-y_1)\cos\varphi), \\
 & x_2'' + (2\xi_2/a)x_2' + (1/a^2)(x_2 - x_1 - \varepsilon \cos \varphi) = \beta \cos \varphi, \\
 & y_2'' + (2\xi_2/a)y_2' + (1/a^2)(y_2 - y_1 - \varepsilon \sin \varphi) = \beta \sin \varphi - f/a^2,
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

其中“'”表示 $d/d\phi$, $b = (\Lambda/\sqrt{f})(1/a)$, $a_1^2 = C_0 C_{p1} a^2$.

无量纲参数 $\xi_1 = 0.01$, $\xi_2 = 0.02$, $f = 0.3$, $C_{p1} = 2.0$, $C_0 = 0.2$, $\alpha = 1.0$, $\Lambda = 0.1$, $\beta = 0.05$ 时, 用 a 作为控制参数, 利用 x_1 轨迹预测周期运动的分岔点. 选初始值 $a_0 = 0.2$, 步长 $\Delta a = 0.1$, 经过6步搜索预测到参数 a 的倍周期分岔点为 $a_c = 0.6143$. 利用直接数值积分得到的倍周期分岔点为 0.65 ^[4].

无量纲参数 $\xi_1 = 0.01$, $f = 0.3$, $C_{p1} = 2.0$, $C_0 = 0.2$, $\alpha = 1.0$, $\Lambda = 0.1$, $\beta = 0.05$, $a = 2.0$ 时, 用 ξ_2 作为控制参数在 x_1 观察空间预测周期运动分岔点. 初始值 $\xi_{20} = 0.02$, 步长 $\Delta \xi_2 = 0.02$, 经过4步搜索得到的系统的Hopf分岔点为 $\xi_{2c} = 0.043$. 利用直接数值积分得到的倍周期分岔点为 0.05 ^[4]. 由此可见, 该方法有比较好的收敛精度.

5 结 论

1) 基于轨迹稳定裕度的非线性转子系统周期运动分岔点的预测方法由于利用了灵敏度技术,与试探法相比搜索过程大大的加快了。稳定裕度的引入使得非线性转子系统的稳定性分析从定性分析上升为定量分析。

2) 通过数值方法很容易求得高维系统的响应轨迹,并实现各自由度的解耦,故本方法极易推广到高维系统。此外,基于轨迹的特点使得该方法具有较好的工程应用前景。

[参 考 文 献]

- [1] XUE Yu_sheng. The stability_preserving trajectory_reduction methodology for analyzing nonlinear dynamics[A]. Keynote in International Conferences on Info_tech & Info_net [C]. Beijing: IEEE Catalog Number: 01EX479, ICIE2001, 2001, 7—19.
- [2] 薛禹胜. 运动稳定性量化理论[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1999, 1—65.
- [3] 郑惠萍, 薛禹胜, 陈予恕. 基于轨迹的非线性转子系统参数稳定裕度的计算[J]. 机械强度, 2002, 24 (2): 185—189.
- [4] Chen Cha' o_kuang, Yan Her_teng. Bifurcation in a flexible rotor supported by two short journal bearings with nonlinear suspension[J]. Journal of Vibration and Control, 2001, 7: 653—673.

Quantitative Methodology for the Stability Analysis of Nonlinear Rotor Systems

ZHENG Hui_ping¹, XUE Yu_sheng², CHEN Yu_shu³

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054, P. R. China;

2. Nanjing Automation Research Institute, Nanjing 210003, P. R. China;

3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Rotor_bearings systems applied widely in industry are nonlinear dynamic systems of multi_degree_of_freedom. Modern concepts on design and maintenance call for quantitative stability analysis. Using trajectory based stability_preserving, dimensional_reduction, a quantitative stability analysis method for rotor systems is presented. At first, a n_dimensional nonlinear non_autonomous rotor system is decoupled into n subsystems after numerical integration. Each of them has only one_degree_of_freedom and contains time_varying parameters to represent all other state variables. In this way, n dimensional trajectory is mapped into a set of one_dimensional trajectories. Dynamic central point (DCP) of a subsystem is then defined on the extended phase plane, namely force_position plane. Characteristics of curves on the extended phase plane and the DCP's kinetic energy difference sequence for general motion in rotor systems are studied. The corresponding stability margins of trajectory are evaluated quantitatively. By means of the margin and its sensitivity analysis, the critical parameters of the period doubling bifurcation and the Hopf bifurcation in a flexible rotor supported by two short journal bearings with nonlinear suspension are determined.

Key words: nonlinear rotor system; bifurcation; stability margin; extended phase plane; dynamic central point; kinetic energy difference sequence