

文章编号: 1000-0887(2005) 09-1033-05

不同系统之间的部分同步*

陈 骏¹, 刘曾荣²

(1. 上海交通大学 安泰管理学院, 上海 200052;

2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

(本刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 提出了一种处理不同系统之间的部分同步问题的方法, 给出了此问题意义下的部分同步的定义, 并以 Liapunov 函数方法分析了方法的稳定性, 推导出了控制项的形式, 通过实例对计算结果的分析与讨论说明了该方法的可行性, 并考察了同步系统的动力学行为且发现对于响应系统各种动力学状态通过选取合适的控制项部分同步都能达到

关键词: 混沌; 混沌同步; 部分同步

中图分类号: O19 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 混沌同步得到越来越多的注意. Pecora 和 Carroll 首先提出驱动响应系统的方法以实现混沌同步^[1,2]. 目前已从实验中发现了 4 种不同类型的同步现象^[3] (完全同步、相同步、滞后同步和广义同步), 并已建立了统一的数学定义^[4]. 混沌同步的研究成果已被应用到神经元的动力学模型, 如 Titz_Huge_Nagumo, Morris_Lecar 和 Hodgkin_Huxley 方程^[5,6]. 但从目前多数工作来看, 研究主要集中在两个相同系统之间, 至多是两个系统参数略有不同.

而最近有关生命科学的研究^[7-10]表明大脑中的信息传输与同步有密切联系. 大脑是一个具有层次结构的系统, 可以看成许多相互联系的神经网络组成, 而这些神经网络在结构上可能是有差异的. 因此就提出了如下问题: 1) 如何实现不同系统之间的混沌同步. 2) 如何进一步将此类同步推广到描述两个不同网络之间的信息传输.

我们认为只有对上述两个问题充分了解之后才能对大脑中的信息传输有深入的理解. 因此, 本文主要讨论两个不同系统之间的同步, 关于第 2) 个问题, 将在其他文章中加以研究.

全文组织如下: 第 1 节给出问题的数学描述和处理方法的基本理论; 第 2 节中给出实例说明在不同情况下两个不同系统都可实现部分混沌同步; 在文章最后对结果作一些讨论.

1 基本理论

文献[4]中给出了两个子系统之间的同步的一般定义. 考虑系统

* 收稿日期: 2003_03_27; 修订日期: 2005_06_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171061)

作者简介: 陈骏(1976—), 男, 江苏无锡人, 博士(联系人, Tel: + 86_21_62933255; E_mail: Chenjunshu@163.com).

$$\dot{x} = f_1(x, y, t), \quad \dot{y} = f_2(x, y, t), \quad x \in R^k, y \in R^k. \quad (1)$$

定义 系统(1)中两个子系统关于性质 g_x 和 g_y 是同步的, 如果存在不依赖时间 t 的映射 $h: R^k \times R^k \rightarrow R^k$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|h[g_x(x(t)), g_y(y(t))]\| = 0, \quad (2)$$

对所有轨道都成立, 其中 $\|\cdot\|$ 为范数.

将上述定义用来讨论两个不同系统之间的同步, 为此考虑以下系统:

$$\dot{u} = F(u), \quad u \in R^n, \quad y = h_1(u), \quad y \in R, \quad \dot{x} = G(x), \quad x \in R^m, \quad (3)$$

把(3)分为两个子系统, 其中一个为驱动子系统

$$\dot{u} = F(u), \quad u \in R^n, \quad y = h_1(u), \quad y \in R, \quad (4)$$

其中标量 y 代表该子系统的输出. 另一个是响应子系统:

$$\dot{x} = G(x), \quad x \in R^m, \quad (5)$$

如果对系统(5)加入由 x, y 及 y 的混阶导数组成的控制项 $T(x, y, y, \dot{y}, \dots)$. 则系统(5)成为

$$\dot{x} = G(x) + T(x, y, y, \dot{y}, \dots), \quad (6)$$

并且存在映射 $h_2: R^m \rightarrow R$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|h_2(x(t)) - y(t)\| = 0, \quad (7)$$

其中 $x(t)$ 代表(6)中的轨道. 则我们称(3)中驱动系统和响应系统在 T 的作用下达部分同步. 不失一般性, 可取 h_2 为 x 的某一分量投影算子, 即 $h_2(x(t)) = x_i(t)$, 则(7)成为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - y(t)\| = 0. \quad (8)$$

不妨设 $n = m = 3$, 且取 h_1 和 h_2 为各自系统对第一分量的投影算子, 即 $y(t) = h_1(u(t)) = u_1(t)$, $h_2(x(t)) = x_1(t)$. 即我们考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{u} = F(u) = A_1 u + f(u), \\ \dot{x} = G(x) + T(x, u_1, u_1, \dot{u}_1, \dots) = A_2 x + g(x) + T(x, u_1, u_1, \dot{u}_1, \dots), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, A_1 和 A_2 是 3×3 常数矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{13} & b_{13} & c_{13} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} \end{bmatrix},$$

$f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $g = (g_1, g_2, g_3)^T$ 是非线性光滑函数. 我们将讨论如何选取适当的 T 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(t) - x_1(t)\| = 0. \quad (10)$$

我们使用 Liapunov 方法来处理, 构造如下的 Liapunov 函数

$$V = (x_1 - u_1)^2 + [(1 + a_{21})x_1 + b_{21}x_2 + c_{21}x_3 + g_1 - u_1 - u_1]^2, \quad (11)$$

并选取 $T = (0, T_2, T_3)^T$ 使得

$$\begin{aligned} & 2u_1 + 2u_1 + \ddot{u}_1 - (2 + a_{21})x_1 - b_{21}x_2 - c_{21}x_3 - (1 + a_{21} + g_{1x_1})(a_{21}x_1 + \\ & b_{21}x_2 + c_{21}x_3 + g_1) - (b_{21} + g_{1x_2})(a_{22}x_1 + b_{22}x_2 + c_{22}x_3 + g_2) - \\ & (c_{21} + g_{1x_3})(a_{23}x_1 + b_{23}x_2 + c_{23}x_3 + g_3) = (b_{21} + g_{1x_2})T_2 + (c_{21} + g_{1x_3})T_3, \end{aligned} \quad (12)$$

通过计算, 就可以得到

$$\begin{aligned} dV/dt &= 2(x_1 - u_1)(x_1 - u_1) + 2[(1 + a_{21})x_1 + \\ & b_{21}x_2 + c_{21}x_3 + g_1 - u_1 - u_1][(1 + a_{21})x_1 + \\ & b_{21}x_2 + c_{21}x_3 + g_{1x_1}x_1 - g_{1x_2}x_2 + g_{1x_3}x_3 - u_1 - \ddot{u}_1] = -2V, \end{aligned} \quad (13)$$

$$V(t) = V(0)e^{-2t}, \quad (14)$$

记误差函数为 $e(t) = |x_1(t) - u_1(t)|$, 显然从(11), 我们可以得到 $V(t) \geq e^2(t)$. 此就有 $e(t) \leq \sqrt{V(0)}e^{-t}$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (15)$$

这样响应子系统(9)的第一分量 $x_1(t)$ 能与驱动子系统的分量 $u_1(t)$ 达到同步.

注 在实际应用中为了使条件(12)应尽量简单, 我们就要尽可能选取响应子系统中分量方程中简单的分量作为达到同步的分量. 比如, 当第一个分量方程是线性时, 即在(12)中, $g_1 = g_{1x_1} = g_{1x_2} = g_{1x_3} = 0$, 则条件(12)可以大大简化. 同时注意到等式(12)右端含有 T_2 和 T_3 两项, 可以估计实际情况作不同选取, 故方法是可操作的.

2 Lorenz 系统和 Chen 系统之间的部分同步

本节我们以 Lorenz 系统和 Chen 系统为例说明我们的方法. 取 Lorenz 系统为驱动子系统, Chen 系统为响应子系统.

Lorenz 系统和 Chen 系统分别是

$$\dot{u} = \sigma(v - u), \quad \dot{v} = \rho u - v - uv, \quad \dot{w} = uw - \beta w, \quad (16)$$

$$\dot{x} = a(y - x), \quad \dot{y} = (c - a)x + cy - xz, \quad \dot{z} = xy - bx. \quad (17)$$

我们选取子系统(17)的 $x(t)$ 作为同步分量, 子系统(16)的 $u(t)$ 作为输出, 为实现两系统之间的部分同步, 据上述讨论, 我们可以选取控制项为 $(0, T_2, 0)^T$, 则系统(17)成为

$$\dot{x} = a(y - x), \quad \dot{y} = (c - a)x + cy - xz + T_2, \quad \dot{z} = xy - bx. \quad (18)$$

我们构造如下的 Liapunov 函数:

$$V(t) = (x(t) - u(t))^2 + [(1 - a)x(t) + ay(t) - u(t) - \dot{u}(t)]^2, \quad (19)$$

并选取控制项 $(0, T_2, 0)^T$ 为如下形式:

$$T_2 = \frac{2a - ac - 2}{a}x - (2 + c - a)y + xaz + \frac{2}{a}u + \frac{2}{a}\dot{u} + \frac{1}{a}\ddot{u}, \quad (20)$$

通过计算, 有

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &= 2(x(t) - u(t))(x(t) - u(t)) + 2[(1 - a)x(t) + ay(t) - u(t) - \dot{u}(t)] \\ &\quad \cdot [-(1 - a)x(t) - ay(t) - \dot{u}(t) - \ddot{u}(t)] = -2V(t), \end{aligned} \quad (21)$$

则有 $V(t) = V(0)e^{-2t}$, 即 $|x(t) - u(t)| \leq \sqrt{V(0)}e^{-t}$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - u(t)\| = 0,$$

如此 Lorenz 系统和 Chen 系统达到部分同步.

注 我们强调指出上述方法中我们对 a, b, c 和 σ, ρ, β 没有任何要求. 换句话说, 对于 Lorenz 系统(16)和 Chen 系统(17)任意的动力学行为, 我们总是可以选取适当的 T 使得系统(18)的第一分量 $x(t)$ 与输出 $u(t)$ 达到部分同步.

下面我们给出 3 个数值结果来说明这个结果.

1) 令 $a = 35, b = 3, c = 28, \sigma = 3, \rho = 10, \beta = 1$ 使得 Lorenz 系统处于不动点状态, Chen 系统(17)为混沌状态. 分别选取两个系统初值为 $(2, -1, 5)$ 和 $(1.310\ 0, 4.301\ 1, 25.226\ 7)$. 计算结果可见图 1 和图 2, 可以发现 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - u(t)\| = 0$, 且系统(18)趋于不动点.

2) 令 $a = 10, b = 3, c = 2, \sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ 使得 Lorenz 系统处于混沌态而 Chen 系统(17)处于不动点状态. 分别选取两个系统初值为 $(1.619\ 7, 3.184\ 5, 8.412\ 8)$ 和 $(1, 1, 2)$. 结果见图 3 和图 4. 从图 3, 可见系统(18)的分量 $x(t)$ 与 Lorenz 系统的分量 u 同步. 而从图 4 可见

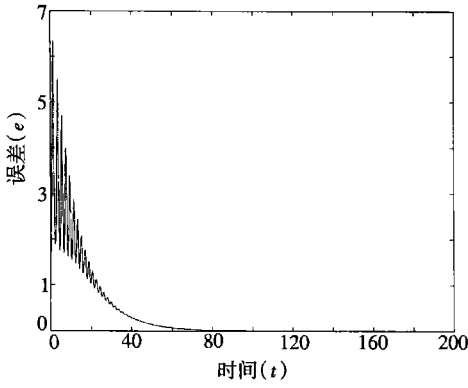


图 1 误差函数 $u(t) - x(t)$ (原 Chen 系统处于混沌而 Lorenz 系统处于不动点状态)

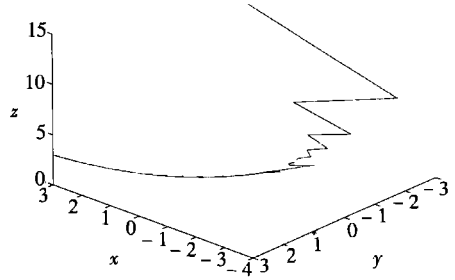


图 2 加入 T 后的 Chen 系统 (原 Chen 系统处于混沌而 Lorenz 系统处于不动点状态)

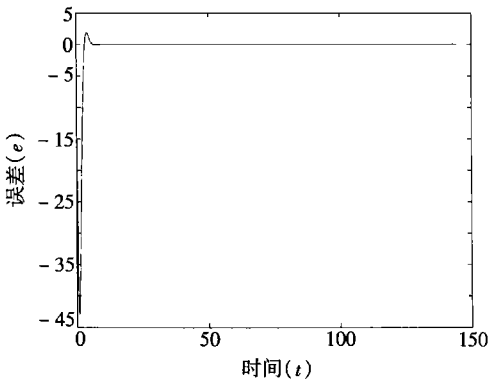


图 3 误差函数 $u(t) - x(t)$ (Lorenz 系统处于混沌而 Chen 系统处于不动点状态)

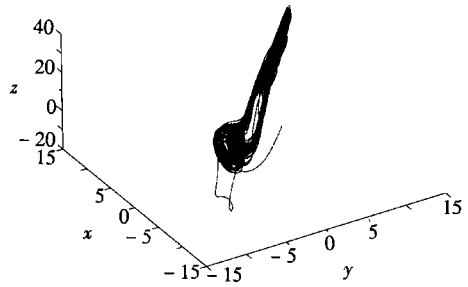


图 4 加入 T 后的 Chen 系统 (Lorenz 系统处于混沌而 Chen 系统处于不动点状态)

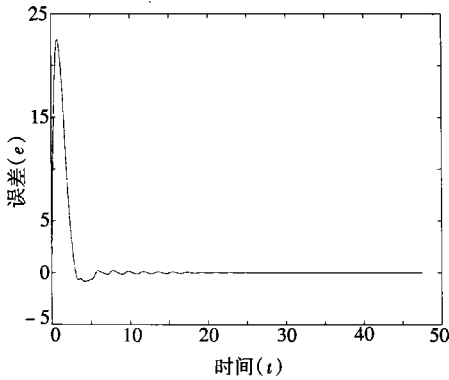


图 5 误差函数 $u(t) - x(t)$ (Lorenz 系统和 Chen 系统都处于混沌)

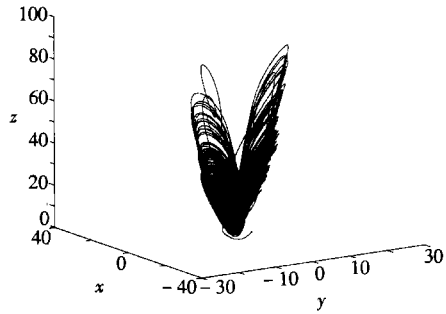


图 6 加入 T 后的 Chen 系统 (Lorenz 系统和 Chen 系统都处于混沌)

系统 (18) 此时是混沌的。

3) 令 $a = 35, b = 3, c = 28, \sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ 使得 Lorenz 系统和 Chen 系统 (17) 都处于混沌态。分别选取两个系统初值为 $(1.6197, 3.1845, 8.4128)$ 和 $(1.3100, 4.3011, 25.2267)$ 。结果见图 5 和图 6。从图 5, 可见系统 (18) 的分量 $x(t)$ 与 Lorenz 系统的分量 u 同步。而图 6 显示此时系统 (18) 仍处于混沌但是此时的吸引子与 Chen 系统 (17) 的吸引子不同。

3 讨 论

为了研究两个不同系统之间的部分混沌同步问题, 我们给出了一种新的方法。而且在我们的方法中, 我们仅需要在响应系统中加入控制项, 因而此方法是可行的。值得特别注意的是无论响应子系统原来吸引子是何种类型, 不动点也好, 极限环也好, 或者混沌态也好, 在我们的方法中都可以通过选取适当的控制项来实现部分同步。

[参 考 文 献]

- [1] Pecora L A, Carroll T S. Synchronization in chaotic systems[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(11): 821—824.
- [2] Pecora L A, Carroll T S. Synchronizing chaotic circuits[J]. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1991, **38**(4): 453—456.
- [3] Tang D Y, Dykston R, Hamilton M W, et al. Stages of chaotic synchronization[J]. *Chaos*, 1998, **8**(3): 697—701.
- [4] Brown R, Kocarev L. A unifying definition of synchronization for dynamical systems[J]. *Chaos*, 2000, **10**(2): 344—349.
- [5] Jensen R V, Jones L, Gartner D. Synchronization of randomly drive nonlinear oscillators and the reliable firing of cortical neurons[A]. In: Bower J M Ed. *Computational Neuroscience: Trends in Research* [C]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1998, 403—407.
- [6] Mainen Z F, Sejnowski T. Reliability of spike timing in neocortical neurons[J]. *Science*, 1995, **268**(5216): 1503—1506.
- [7] Bao S, Chan V T, Merzerich M M. Cortical remodeling induced by activity of ventral tegmental dopamine neurons[J]. *Nature*, 2001, **412**(6842): 79—83.
- [8] Bramo M C, Goebel R, Nenenschwander S, et al. Neural synchrony correlates with surface segregation rules[J]. *Nature*, 2000, **405**(6787): 685—689.
- [9] Steinmetz P N, Fitzgerald P J, Hsiao S S, et al. Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex[J]. *Nature*, 2000, **404**(6774): 187—190.
- [10] Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology[J]. *Nature*, 2001, **410**(6825): 277—284.

Partial Synchronization Between Different Systems

CHEN Jun¹, LIU Zeng_rong²

(1. Aetna School of Management, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200052, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: A new method for partial synchronization between different systems was obtained. The definition of partial synchronization under which the problem works is given. The stability of the method is analyzed by the Liapunov function method and the condition of choosing the control term is derived. The reliability of this method is proved by some numerical examples, in which the dynamical behaviors of the synchronized systems are observed and it is found that whatever state the response system is partial synchronization can be always achieved by adding some proper control term.

Key words: chaos; chaos synchronization; partial synchronization