文章编号: 1000_0887(2005) 09_1022_05

多台系统可靠性增长试验方法研究*

马小宁, 吕震宙, 岳珠峰

(西北工业大学 航空学院 120 信箱, 西安 710072)

(我刊编委岳珠峰来稿)

摘要: 提出了一种解决多台系统同步投试、同步停止试验和同步改进问题的新模型——指数模型• 该模型充分考虑了增长过程中的各种可得信息, 包括各改进阶段的失效数、未失效数和失效时间等数据• 如果多台系统经过多次同步改进, 并且单台系统的可靠性增长符合 AMSAA 模型, 就可以合理地认为在每两个相邻的改进时刻之间, 每台系统的失效时间服从指数分布• 采用非参数方法得到多台系统在各同步停止试验时刻的可靠度, 并利用最小二乘法拟合求得该模型中参数 a 和 b 的点估计值, 以及参数 b 的置信限• 通过在工程实例中对所提模型和几种已有模型计算结果的比较, 说明了所提模型在解决多台系统同步可靠性增长问题中的合理性•

关 键 词: 可靠性增长; AMSAA 模型; AMSAA_BISE 模型; 非齐次泊松过程; 最小二乘法

中图分类号: TB114.3 文献标识码: A

引 言

对于单台系统的可靠性增长试验, AMSAA 模型已经可以较好的解决许多问题[1~8]• 但对于多台系统的可靠性增长试验, 尤其是多台系统同步增长问题, 仍有许多问题需要解决•

周源泉、翁朝曦在文献[3]中提出了 AMSAA_BISE 模型, 对多台系统同步投试、同步停止试验和同步改进问题给出了处理方法• 文献[4]和文献[5]中指出 AMSAA_BISE 模型不能成立, 提出近似模型来处理多台系统的同步增长问题• 近似模型认为同步投试的多台系统中在 T 时刻有一台发生 B 类故障, 则全部系统在相继时间 $T+\delta T(\delta T \to 0)$ 都将发生 B 类故障• 而在产品的研制开发阶段, 多台系统的失效时间差别是比较大的, 当系统数量很大时, 此近似方法将可能导致评估结果偏于保守•

本文通过对多台系统整体进行考虑, 提出可靠性增长的指数模型• 采用非参数方法得到多台系统在各同步停止试验时刻的可靠度, 再利用最小二乘法拟合求得该模型中参数 a 和 b 的估计值以及参数 b 的置信限•

* 收稿日期: 2003_10_14; 修订日期: 2005_04_26
基金项目: 国家航空基金资助项目(00B53010); 国家航天基金资助项目(2003CH0502, N5CH0001); 陕西省自然科学基金资助项目(2003CS0501)
作者简介: 马小宁(1978—), 男, 甘肃平凉人, 硕士;
吕震宙(1966—), 女, 湖北黄石人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: +86_29_88460480; E_mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn)•

1　多台系统可靠性增长试验的指数模型

假设在应力 S_i 下，有 n 台系统投入试验，在 T_1 时刻有 m_1 台系统失效• 此时，对 n 台系统进行同步停止试验和同步改进，之后再投入试验；到 T_2 时刻有 m_2 台系统失效，此时，对 n 台系统同步停止试验和同步改进后，再投入试验；此过程一直持续到改进 c 次后，停止可靠性增长试验，我们将对产品的平均故障间隔时间(MTBF)进行估计•

1.1　假设与条件

文献[2]表明，如果单台系统的可靠性增长符合 AMSAA 模型，就有以下结论成立：

1) 系统在 $(0, t]$ 内的失效次数 $N(t)$ 符合非齐次泊松过程，即有：

$$P\{N(t) = n\} = \frac{1}{n!}\{E[N(t)]\}^n \cdot e^{-E[N(t)]} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

其均值函数 $E[N(t)]$ 和瞬时故障强度函数 $\lambda(t)$ 如(2)式和(3)式所示•

$$E[N(t)] = at^b, \tag{2}$$

$$\lambda(t) = \mathrm{d}E[N(t)]/\mathrm{d}t = abt^{b-1}, \tag{3}$$

式(2)和(3)式中的 a 和 b 为模型参数•

2) 系统到 T 时刻定型，之后对系统不再改进，则其失效时间服从指数分布• 其故障强度函数(亦称故障率或失效率) $\lambda(t)$ 在 T 之后的时刻 t 可表示为下式

$$\lambda(t) = abT^{b-1} \qquad (t \geqslant T)• \tag{4}$$

若系统经过多次改进，由上面的结论 2)，我们就可以合理地认为在每两个相邻的改进时刻之间，即 $t \in (T_i, T_{i+1})$ $(i = 1, 2, \cdots, c-1)$ 中，每台系统的失效时间服从指数分布，其故障强度函数 $\lambda(t)$ 可以表示为 $\lambda(t) = abT_i^{b-1}$• 而每次的改进只是改变了单台系统的故障强度函数，即第 $i(i = 1, 2, \cdots, c-1)$ 次改进后，$\lambda(t)$ 由 abT_i^{b-1} 变为 abT_{i+1}^{b-1}• 由指数分布的性质，我们可以得到单台系统的可靠度 $R(t)$ 的表达式为(5)式，(5)式就是本文模型建立的前提条件•

$$R(t) = \exp[-abT_i^{b-1}(t - T_i)] \qquad (T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1})• \tag{5}$$

1.2　各失效时刻 T_i 处的可靠度 $R(T_i)$

假设有 n 台系统投入试验，其中有 X 台发生故障，各台系统的失效是相互独立的，则 X 是一个服从二项分布的随机变量，$X = r$ 的概率如(6)式所示•

$$P\{X = r\} = C_n^r R^{n-r}(1 - R)^r, \tag{6}$$

其中 R 为单台系统的可靠度•

令 $X = r$ 的概率对单台系统可靠度 R 的导数为零，则可得 n 台系统中有 r 台失效时，R 的极大似然估计量 $\hat{R}$ 如(7)式所示•

$$\hat{R} = \frac{n - r}{n}, \tag{7}$$

所以，当失效时刻 T_i 处有 m_i 台失效时的可靠度 $R(T_i)$ 的极大似然估计量 $\hat{R}(T_i)$ 如(8)式所示•

$$\hat{R}(T_i) = \frac{n - m_i}{n} \qquad (i = 2, 3, \cdots, c)• \tag{8}$$

1.3　参数 a 和 b 的点估计

由前面的(5)式可知，在各同步停止试验的时刻 T_i 处，系统的可靠度为

$$R(T_i) = \exp[-abT_{i-1}^{b-1}(T_i - T_{i-1})] = (n - m_i)/n \qquad (i = 2, 3, \cdots, c),$$

而根据(8)式，由非参数方法可得到各同步停止试验的时刻 T_i 处系统的可靠度 $R(T_i)$ 的极大

似然估计量 $\hat{R}(T_i)$，所以可建立如下式(9)所示的方程。

$$\exp[-abT_{i-1}^{b-1}(T_i - T_{i-1})] = \frac{n-m_i}{n} \quad (i = 2, 3, \cdots, c), \tag{9}$$

方程(9)两边取两次对数后可得(10)式所示的化简方程。

$$\ln ab + (b-1)\ln T_{i-1} = \ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \cdots, c), \tag{10}$$

令 $p = \ln ab,\ q = b-1,\ x_i = \ln T_{i-1},\ y_i = \ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})$,

并由失效间隔时间 $T_i - T_{i-1}$ 之间的独立性以及失效数 m_i 之间的独立性,可以用最小二乘法来求得参数 p 和 q 的估计值 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$ 如(11)和(12)式所示。

$$\hat{p} = \frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right] - \left(\frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\ln T_{i-1}\right)\frac{S_{x,y}}{S_{x,x}}, \tag{11}$$

$$\hat{q} = \frac{S_{x,y}}{S_{x,x}}, \tag{12}$$

其中

$$S_{x,x} = \sum_{i=2}^{c}(\ln T_{i-1})^2 - \frac{1}{c-1}\left(\sum_{i=2}^{c}\ln T_{i-1}\right)^2,$$

$$S_{x,y} = \sum_{i=2}^{c}\ln T_{i-1}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right] - \frac{1}{c-1}\left(\sum_{i=2}^{c}\ln T_{i-1}\right)\left\{\sum_{i=2}^{c}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right]\right\},$$

$$S_{y,y} = \sum_{i=2}^{c}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right]^2 - \frac{1}{c-1}\left\{\sum_{i=2}^{c}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right]\right\}^2,$$

进而可求得参数 a 和 b 的点估计值 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 如(13)和(14)式所示。

$$\hat{a} = \frac{\exp\left\{\frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\left[\ln\left(-\ln\frac{n-m_i}{n}\right) - \ln(T_i - T_{i-1})\right] - \left(\frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\ln T_{i-1}\right)\frac{S_{x,y}}{S_{x,x}}\right\}}{S_{x,y}/S_{x,x} + 1}, \tag{13}$$

$$\hat{b} = \frac{S_{x,y}}{S_{x,x}} + 1。 \tag{14}$$

1.4 参数 b 的置信限

定义 $\sigma = \sqrt{(S_{y,y} - S_{x,y}^2/S_{x,x})/(c-3)}$，则由线性回归原理可得下式:

$$\frac{\hat{b} - b}{\sigma}\sqrt{S_{x,x}} \sim t(c-3), \tag{15}$$

所以可得参数 b 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间如(16)式所示,

$$\left(\hat{b} \pm t_{\alpha/2}(c-3) \times \frac{\sigma}{\sqrt{S_{x,x}}}\right)。 \tag{16}$$

2 算　　例

本例的原始数据取自文献[6]，石油勘测部门希望采集站的 MTBF 能提高到 2 000 h(h 为

时间单位小时)，为此进行了 $n=35$ 台的同步可靠性增长试验，共发生了 $c=7$ 次 B 类故障，故障时间依次为 1 h、6 h、14 h、28 h、67 h、90 h、176 h，每次故障后，均对 35 台作同步纠正，并于 $T=180$ h 时同步终止试验，现要求系统的 MTBF 的估计值 M•

我们采用 II 类截尾，运用本文的方法来计算系统的 MTBF• 由该算例所给的条件知：$n=35$、$c=7$、$m_i=1(i=1,2,\cdots,7)$、$T_1=1$、$T_2=6$、$T_3=14$、$T_4=28$、$T_5=67$、$T_6=90$、$T_7=176$，将这些数据代入式(13) 和式(14) 中，可得模型参数 a 和 b 的点估计值 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 以及 MTBF 的估计值 M 如表 1 所示，表 1 还给出了本文模型计算结果与其它几种可得模型计算结果的比较•

表 1　4 种模型的计算结果比较

参数	模型			
	AMSAA_BISE 模型	DUANE 模型	近似模型[4]	本文模型
$\hat{b}$	0.343 5	0.383 1	0.477	0.437
$\hat{a}$	0.033 9	0.029 6	0.594	0.016 6
M	2 561.7 h	2 145.0 h	52.71 h	2 533.0 h

3 结　论

1) 从表 1 可以看出，本文的计算结果与 AMSAA_BISE 模型、DUANE 模型的计算结果较接近，而与近似模型计算结果相差很大• AMSAA_BISE 模型、DUANE 模型及本文的模型都是在利用各改进阶段的失效数和失效时间等现实数据后得出的，而近似模型认为在多台系统中有 1 台发生 B 类故障时，该 B 类故障在所有系统中同时发生，所以导致了计算结果与其它 3 种模型的结果有较大区别•

2) 本文的模型与 AMSAA 模型在形式上较为相近，但其实质上是失效率不断变化的指数模型，即在每一同步改进时刻，产品的失效率都改变 1 次，而在相邻的 2 次改进时刻之间，产品的失效率是不变的•

3) 本文的模型与 AMSAA_BISE 模型相比，其优点在于不仅考虑了截尾时刻系统的失效数，还考虑了未失效数对系统 MTBF 的影响• 本文方法运用非参数方法将整个系统作为一个整体来考虑，充分利用了各改进阶段的失效数、未失效数和失效时间等数据来进行模型参数的估计•

[参 考 文 献]

[1] 周源泉，翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京：科学出版社，1992，64—82.

[2] 周源泉，翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京：科学出版社，1990，198—217.

[3] ZHOU Yuan_quan, WENG Zhao_xi. AMSAA_BISE model[A]. In: MAO Shi_song, Sunada Y, Eds. 3rd Japan_China Symp on Statistics[C]. Tokyo, Japan: Soka Univ, 1989, 179—182.

[4] 梅文华，郭月娥，杨义先. AMSAA_BISE 模型不能成立[J]. 应用数学和力学，2001，**22**(7)：758—762.

[5] 梅文华，杨义先. 对 GJB/Z77 多台同型产品增长模型的分析[J]. 航空学报，1999，**20**(1)：65—68.

[6] 曹玉　. 应用 AMSAA_BISE 模型提高采集站的可靠性[J]. 系统工程与电子技术，1993，(4)：55—61.

[7] 韩明. 某型发动机无失效数据的 Bayes 可靠性分析[J]. 航空学报，1999，**20**(3)：216—219.

[8] HAN Ming. Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of zero- failure data[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathimatics, 2001, **16**(1): 65—70.

Research on Reliability Growth for Synchronously Developed Multi_Systems

MA Xiao_ning, LÜ Zhen_zhou, YUE Zhu_feng

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710072, P.R.China)

Abstract: An advanced reliability growth model, exponential model, was presented to estimate the model parameters for multi_systems, which was synchronously tested, synchronously censored, and synchronously improved. In the presented method, the data during the reliability growth process were taken into consideration sufficiently, including the failure numbers, safety numbers and failure times at each censored time. If the multi_systems were synchronously improved many times, and the reliability growth of each system fitted AMSAA model, the failure time of each system could be considered rationally as an exponential distribution between two adjoining censored times. The nonparametric method was employed to obtain the reliability at each censored time of the synchronous multi_systems. The point estimations of the model parameters, a and b, were given by the least square method. The confidence interval for the parameter b was given as well. An engineering illustration was used to compare the result of the presented method with those of the available models. The result shows that the presented exponential growth model fits AMSAA_BISE model rather well, and two models are suitable to estimate the reliability growth for the synchronously developed multi_systems.

Key words: reliability growth; AMSAA model; AMSAA_BISE model; non_homogeneity Poisson process; least square method