应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 09_1009_07

压电梁的多项式解(Ⅰ) ——若干精确解*

丁皓江[1], 江爱民[2]

(1. 浙江大学 土木系, 杭州 310027;
2. 浙江工业大学 浙西分校, 浙江衢州 324000)

(我刊编委 丁皓江来稿)

摘要: 从正交各向异性压电介质平面问题, 对于材料 3 个特征根互不相等情况下, 以 3 个拟调和函数表达位移、电势、应力和电位移的通解出发, 利用调和多项式的显式表达式, 结合试凑法, 给出了平面压电梁的一系列精确解, 包括刚体平动、刚体转动、均匀电势、均匀拉伸、均匀电位移、纯剪切、纯弯曲和两端自由压电梁上下表面作用常电势情况下的精确解•

关 键 词: 压电梁; 平面问题; 调和多项式; 精确解
中图分类号: O342 文献标识码: A

引 言

压电材料因其在智能结构中的广泛应用前景, 越来越吸引人们的注意力[1~10]• 压电材料由于存在各力学量与电学量间的相互耦合效应, 从而导致基本方程的解析分析比较困难• 但是对于一些相对比较简单, 又十分典型的问题, 寻求相应的精确解或解析解, 以研究各力学量与电学量间的相互影响, 仍是非常必要而有意义的•

在压电材料平面梁平衡问题研究中, 文献[2] 至文献[5] 对平面应力或应变问题以混合解法推导出了在均布荷载、集中荷载作用下压电简支梁和压电悬臂梁的解析解; 文献[6] 和文献[7] 对平面应变问题, 以"应力"解法推导出了梯度功能压电悬臂梁、简支梁的几个解析解; 文献[8] 给出了压电梁一类纯弯曲的精确解; 文献[9] 给出了压电平面问题的一般解和基本解; 文献[10] 和文献[11] 得到了用拟调和位移函数表示的压电平面问题的通解, 同时文献[11] 还利用这些通解, 结合试凑法, 简洁并极其方便地给出了无限平面、半无限平面和两相无限平面有关的 Green 函数, 显示了这种位移解法的有效性• 上述的混合法以应力函数和电势为基本变量, "应力"解法则以应力函数和电位移函数为基本变量, 它们都需要求解一个相当复杂的偏微分方程组, 当选定这些基本变量为某阶多项式时, 均需代入这些方程组确定多项式间系数的关系, 因此, 求解具体问题时, 只能逐个解决, 不仅很烦, 而且难以形成系统的求解方法• 本文从

---

* 收稿日期: 2004_02_20; 修订日期: 2005_04_19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472102)
作者简介: 丁皓江(1934—), 男, 江苏常州人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86_571_87993057; E_mail: hjding@mail.hz.zj.cn);
江爱民(1966—), 男, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_570_8015029; Fax: + 86_570_8015112; E_mail: jam@vip.sina.com)•

文献[10]和文献[11]所给出的压电平面应变问题的通解出发,利用调和多项式的显式表达式,从低阶多项式到高阶多项式,系统地给出了压电梁的若干精确解•

1 压电平面问题通解

Sosa 和 Castro[1]给出了压电介质平面应变问题的基本方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}+c_{13}\dfrac{\partial w}{\partial z}+e_{31}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \tau_{xz}=c_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+e_{15}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x},\quad \sigma_z = c_{13}\dfrac{\partial u}{\partial x}+c_{33}\dfrac{\partial w}{\partial z}+e_{33}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ D_x = e_{15}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)-\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x},\quad D_z = e_{31}\dfrac{\partial u}{\partial x}+e_{33}\dfrac{\partial w}{\partial z}-\varepsilon_{33}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{cases} \tag{2}$$

其中:$\sigma_x(\sigma_z,\tau_{xz})$、$D_x(D_z)$、$u(w)$和$\Phi$分别是应力分量、电位移分量、位移分量和电势;$c_{ij}$、$e_{ij}$和$\varepsilon_{ij}$分别是弹性常数、压电常数和介电常数• 对平面应力问题,$\sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$,电位移$D_y=0$,相应基本方程仍可表示为式(1)和(2)形式,其中c_{ij}、e_{ij}和ε_{ij}分别由附录A中对应的常数$\bar{c}_{ij}$、$\bar{e}_{ij}$和$\bar{\varepsilon}_{ij}$替换•

丁皓江等[10,11]已推导出压电平面问题的通解,其中所有的物理量都用3个拟调和函数表达,即

$$\begin{cases} u=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \psi_j}{\partial x},\quad w_m=\sum_{j=1}^{3}s_jk_{mj}\frac{\partial \psi_j}{\partial z_j},\quad \sigma_x=\sum_{j=1}^{3}\omega_{3j}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z_j^2} \\ \sigma_m=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\omega_{mj}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z_j^2},\quad \tau_m=\sum_{j=1}^{3}s_j\omega_{mj}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x\partial z_j} \end{cases}\quad (m=1,2), \tag{3}$$

式中,$\omega_{3j}=-s_j^2\omega_{1j}$和

$$w_1=w,\ w_2=\Phi,\ \sigma_1=\sigma_z,\ \sigma_2=D_z,\ \tau_1=\tau_{xz},\ \tau_2=D_x, \tag{4}$$

各拟调和函数ψ_j满足下列方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)\psi_j=0\qquad (j=1,\cdots,3), \tag{5}$$

式中,$z_j=s_jz$,s_j是下列特征方程的3个互不相等的特征根,通常选取$Re(s_j)>0$•

$$a_1s^6-a_2s^4+a_3s^2-a_4=0, \tag{6}$$

式(3)中的系数k_{mj}、ω_{mj}($m=1,2;j=1,\cdots,3$)和式(6)的a_n($n=1,\cdots,4$)可参看文献[10]和文献[11]中相应系数•

2 平面问题的边界条件

平面问题直梁的长度为L,高度为h,宽度假设为1个单位,其中坐标原点取为形心,x轴是长度向对称轴,z轴正向向下• 简支梁所占区域是$(-L/2\leqslant x\leqslant +L/2,\ -h/2\leqslant z\leqslant +h/2)$,而悬臂梁所占区域是$(0\leqslant x\leqslant L,\ -h/2\leqslant z\leqslant +h/2)$•

在平面压电梁的上下表面作用有多项式分布的力荷载和电荷载(电位移或电势),在梁两端面的边界条件通常有如下3种情形:

1) 固定端

对于精确解:

$$u=w=0,\ \Phi=\text{const}\ 或\ D_x=\text{const}\qquad(-h/2\leqslant z\leqslant +h/2).\tag{7a}$$

对于解析解:

$$u=w=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0\ 或\ \frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \Phi=\text{const}\qquad(在\ z=0\ 处).\tag{7b}$$

2) 简支端

对于精确解:

$$\begin{cases}w=\text{const},\ \sigma_x=\text{const}\\ \Phi=\text{const}\ 或\ D_x=\text{const}\end{cases}\qquad(-h/2\leqslant z\leqslant +h/2).\tag{8a}$$

对于解析解:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_x\,\mathrm{d}z=\text{const},\ \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_x z\,\mathrm{d}z=\text{const},\\ \displaystyle\int_{-h/2}^{+h/2}D_x\mathrm{d}z=\text{const},\ w\mid_{z=0}=\text{const}.\end{cases}\tag{8b}$$

3) 自由端

对于精确解:

$$\sigma_x=\text{const},\ \tau_{xz}=\text{const},\ D_x=\text{const}\qquad(-h/2\leqslant z\leqslant +h/2).\tag{9a}$$

对于解析解:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_x\,\mathrm{d}z=\text{const},\ \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_x z\,\mathrm{d}z=\text{const},\\ \displaystyle\int_{-h/2}^{+h/2}\tau_{xz}\mathrm{d}z=\text{const},\ \int_{-h/2}^{+h/2}D_x\mathrm{d}z=\text{const}.\end{cases}\tag{9b}$$

这里所提到的精确解是指在梁的两端每一点上也满足指定边界条件的解,而解析解只需要在两端面满足放松了的边界条件,有的则只是在某一点满足指定的条件,例如(7b). 另外,(7)式至(9)式中的常数,在许多情形下都等于零.

在以下各节中,我们将利用附录B中的调和多项式求解得到几种简单平面问题的精确. 因为位移函数 ψ_j 满足拟调和方程(5),故对于附录B中的调和多项式,只需将其中的 z 替换以z_j,即可以被选作位移函数.

3 刚体位移和均匀电势

选取附录式(B2)中的 $\varphi_1^0(x,z)$、$\varphi_1^1(x,z)$ 和 $\varphi_2^1(x,z)$,我们可构造如下位移函数:

$$\psi_j=A_{1j}x+B_{1j}z_j+B_{2j}xz_j\qquad(j=1,\cdots,3),\tag{10}$$

式中,A_{1j}、B_{1j} 和B_{2j} 均为待定未知常数.

将式(10)代入式(3),并选择合适的常数,我们可得下列各式:

$$\begin{cases}u=u_0+\omega_0 z,\ w=w_0-\omega_0 x,\ \Phi=\Phi_0,\\ \sigma_x=\sigma_z=\tau_{xz}=0,\ D_x=D_z=0,\end{cases}\tag{11}$$

式中,$u_0(w_0)$、ω_0 和 Φ_0 分别表示刚体平动、刚体转动和均匀电势.

4 均匀拉伸、均布电位移和纯剪切

选取附录式(B2)中的 $\varphi_2^0(x,z)$ 和 $\varphi_2^1(x,z)$,可构造如下位移函数:

$$\psi_j=A_{2j}(x^2-z_j^2)+B_{2j}xz_j\qquad(j=1,\cdots,3),\tag{12}$$

式中,A_{2j} 和B_{2j} 均为待定未知常数.

将式(12)代入式(3),便得下式:

$$\begin{cases} u = \sum_{j=1}^{3}(2A_{2j}x + B_{2j}z_j),\ w = \sum_{j=1}^{3}s_j k_{1j}(B_{2j}x - 2A_{2j}z_j), \\ \Phi = \sum_{j=1}^{3}s_j k_{2j}(B_{2j}x - 2A_{2j}z_j),\ \tau_{xz} = \sum_{j=1}^{3}s_j\ \omega_{1j}B_{2j},\ D_x = \sum_{j=1}^{3}s_j\ \omega_{2j}B_{2j}, \\ \sigma_x = -2\sum_{j=1}^{3}\omega_{3j}A_{2j},\ \sigma_z = -2\sum_{j=1}^{3}\omega_{1j}A_{2j},\ D_z = -2\sum_{j=1}^{3}\omega_{2j}A_{2j}\cdot \end{cases} \tag{13}$$

边界条件为:

$$x = \pm L/2,\ \sigma_x = \sigma_1,\ \tau_{xz} = \tau_0,\ D_x = D_1, \tag{14a}$$

$$z = \pm h/2,\ \sigma_z = \sigma_2,\ \tau_{xz} = \tau_0,\ D_z = D_2\cdot \tag{14b}$$

另外,我们取压电梁无旋转条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0\cdot \tag{15}$$

将式(13)代入式(14)和式(15),便可得如下各式:

$$-2\sum_{j=1}^{3}\omega_{1j}A_{2j} = \sigma_2,\ -2\sum_{j=1}^{3}\omega_{2j}A_{2j} = D_2,\ -2\sum_{j=1}^{3}\omega_{3j}A_{2j} = \sigma_1, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{3}s_j\ \omega_{1j}B_{2j} = \tau_0,\ \sum_{j=1}^{3}s_j\ \omega_{2j}B_{2j} = D_1,\ \sum_{j=1}^{3}s_j(1 - k_{1j})B_{2j} = 0\cdot \tag{17}$$

由式(16)和(17)可解出未知常数 A_{2j} 和 B_{2j}• 当 σ_1、σ_2、D_1、D_2 和 τ_0 5个常数中依次保持其中1个非零、其余均为零时,就分别得到矩形压电梁的5种有意义情形下的精确解,即:1) x 方向均匀拉伸;2) z 方向均匀拉伸;3) x 方向均匀电位移;4) z 方向均匀电位移和5)纯剪切•

由式(11)刚体位移和均匀电势解的特性,可以看出如将(13)前3式中的 x 替换成 $(x - L)$ 或 $(x - L/2)$,并不影响式(13)中的应力分量和电位移的值•

5 两端自由梁表面作用常电势

首先,取附录式(B2)中的 $\varphi_2^0(x, z)$,可构造如下位移函数:

$$\psi_j = A_{2j}(x^2 - z_j^2) \qquad (j = 1, \cdots, 3), \tag{18}$$

式中,A_{2j} 为待定未知常数• 将这个位移函数代入式(3),便可得到位移、电势、应力和电位移的表达式,且只需在式(13)中令 $B_{2j} = 0$,即得相应的表达式•

边界条件为:

$$z = \pm\frac{h}{2}:\ \sigma_z = 0,\ \tau_{xz} = 0,\ \Phi = \pm\frac{\alpha_0}{2}, \tag{19a}$$

$$x = \pm\frac{L}{2}:\ \sigma_x = 0,\ \tau_{xz} = 0,\ D_x = 0\cdot \tag{19b}$$

将相应的 σ_x、σ_z 和 Φ 表达式代入式(19),即得

$$\sum_{j=1}^{3}\omega_{1j}A_{2j} = 0,\ \sum_{j=1}^{3}\omega_{3j}A_{2j} = 0,\ 2h\sum_{j=1}^{3}s_j^2 k_{2j}A_{2j} = -\alpha_0, \tag{20}$$

联列求解式(20)可解出3个未知量 A_{2j}• 在这个解上叠加式(11),并令其中 $u_0 = w_0 = 0$ 和 $\omega_0 = 0$,则得如下形式的解:

$$
\begin{cases}
u = 2x \sum_{j=1}^{3} A_{2j}, \quad w = -2z \sum_{j=1}^{3} s_j^2 k_{1j} A_{2j}, \quad \Phi = \Phi_0 - 2z \sum_{j=1}^{3} s_j^2 k_{2j} A_{2j}, \\
\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = 0, \; D_x = 0, \; D_z = -2 \sum_{j=1}^{3} \omega_{2j} A_{2j} \cdot
\end{cases}
\tag{21}
$$

由于 α_0 和 Φ_0 的任意性, 就可以在 $z = \pm h/2$ 的两个表面指定任意的常电势• 解(21)对于两端自由梁是精确解, 但不难发现解(21)也满足(8b), 因而可作为两端简支压电梁的解析解• 还可发现: 在 $x = 0$ 这一截面, 解(21)还满足(7b), 因此它还可作为在 $x = 0$ 端固定、$x = L$ 端自由的悬臂梁的解析解•

6 纯 弯 曲

选取附录式(B2)中的 $\varphi_3^1(x, z)$, 可构造如下位移函数:

$$
\psi_j = B_{3j} \varphi_3^1(x, z_j) = B_{3j}(x^2 z_j - z_j^3/3) \qquad (j = 1, \cdots, 3),
\tag{22}
$$

式中, B_{3j} 为待定未知常数•

将式(22)代入式(3), 导出下式:

$$
\begin{cases}
u = 2\sum_{j=1}^{3} B_{3j} x, \quad w = \sum_{j=1}^{3} s_j k_{1j} B_{3j}(x^2 - z_j^2), \\
\Phi = \sum_{j=1}^{3} s_j k_{2j} B_{3j}(x^2 - z_j^2), \\
\sigma_x = -2\sum_{j=1}^{3} \omega_{3j} B_{3j} z_j, \quad \sigma_z = -2\sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} B_{3j} z_j, \quad \tau_{xz} = 2\sum_{j=1}^{3} s_j \omega_{1j} B_{3j} x, \\
D_z = -2\sum_{j=1}^{3} \omega_{2j} B_{3j} z_j, \quad D_x = 2\sum_{j=1}^{3} s_j \omega_{2j} B_{3j} x,
\end{cases}
\tag{23}
$$

以上式子包含了矩形压电梁承受纯弯曲情形解, 相应边界条件为:

$$
x = \pm \frac{L}{2}, \; \sigma_x = \sigma_0 z, \; \tau_{xz} = 0, \; D_x = 0,
\tag{24a}
$$

$$
z = \pm \frac{h}{2}, \; \sigma_z = 0, \; \tau_{xz} = 0, \; D_z = 0 \cdot
\tag{24b}
$$

将式(23)代入式(24), 给出下式:

$$
\sum_{j=1}^{3} s_j \omega_{1j} B_{3j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} s_j \omega_{2j} B_{3j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} s_j \omega_{3j} B_{3j} = -\frac{\sigma_0}{2} \cdot
\tag{25}
$$

未知常数 B_{3j} 可由式(25)解出, 再代回式(23), 即得到:

$$
u = 2\sum_{j=1}^{3} B_{3j} x, \quad w_m = \sum_{j=1}^{3} s_j k_{mj} B_{3j}(x^2 - z_j^2) \qquad (m = 1, 2),
\tag{26}
$$

$$
\sigma_x = 12Mz/h^3, \; \sigma_z = \tau_{xz} = 0, \; D_x = D_z = 0,
\tag{27}
$$

式中, 弯矩 $M = \sigma_0 h^3/12$•

这是矩形压电梁受纯弯曲的精确解• 由式(27)可以看出, 矩形压电梁承受纯弯曲情形下应力和电位移分量均与材料常数无关• 由于式(26)和(27)在 $x = 0$ 这一端也满足(7b), 因此它也是矩形压电悬臂梁($x = 0$ 端固定)在自由端($x = L$)处承受弯矩 M 情形下的解析解•

在文献[8]中还讨论了压电梁另一类纯弯曲问题解, 它与上述纯弯曲解相比, 只是在电学边界条件上有所改动, 现在是

$$x = \pm\frac{L}{2}:\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0;\ z = \pm\frac{h}{2}:\ \Phi = 0. \tag{28}$$

为了得到这个纯弯曲解, 只需在式(23)上叠加一个均匀电势 Φ_0, 然后代入边界条件, 得到下列 4 个方程:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{3}s_jk_{2j}B_{3j} = 0,\ 4\Phi_0 - h^2\sum_{j=1}^{3}s_j^3k_{2j}B_{3j} = 0,\\ \sum_{j=1}^{3}s_j\omega_{1j}B_{3j} = 0,\ 2\sum_{j=1}^{3}s_j\omega_{3j}B_{3j} = -\sigma_0.\end{cases} \tag{29}$$

由式(29)解出 B_{3j} 和 Φ_0 4 个常数后, 代回式(23), 即得如下精确解:

$$u = 2x\sum_{j=1}^{3}B_{3j},\ w = \sum_{j=1}^{3}s_jk_{1j}B_{3j}(x^2 - z_j^2),\ \Phi = \Phi_0\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \tag{30}$$

$$\sigma_x = \sigma_0 z,\ \sigma_z = \tau_{xz} = 0,\ D_z = -2z\sum_{j=1}^{3}s_j\omega_{2j}B_{3j},\ D_x = 2x\sum_{j=1}^{3}s_j\omega_{2j}B_{3j}. \tag{31}$$

附 录 A

$$c_{11} = \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}},\ c_{13} = \frac{(c_{11} - c_{12})c_{13}}{c_{11}},\ c_{33} = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{11}},\ c_{44} = c_{44},$$

$$e_{31} = \frac{(c_{11} - c_{12})e_{31}}{c_{11}},\ e_{33} = \frac{c_{11}e_{33} - c_{13}e_{31}}{c_{11}},\ e_{15} = e_{15},$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{33} = \frac{c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2}{c_{11}}.$$

附 录 B

平面问题多项式调和函数可写成下列形式:

$$\varphi_n^m(x, z) = x^{n-m}z^m + \sum_{i=1}^{[(n-m)/2]}(-1)^i\frac{(n-m)(n-m-1)\cdots(n-m-2i+1)}{(2i+m)!}x^{n-2i-m}z^{2i+m}$$
$$(m = 0, 1;\ n = 1, 2, \cdots), \tag{B1}$$

式中, $[(n-m)/2]$ 表示不超过 $(n-m)/2$ 的最大整数. 由上式, 可写出头 11 个调和多项式

$$\begin{cases}\varphi_0^0(x, z) = 1,\ \varphi_1^0(x, z) = x,\ \varphi_1^1(x, z) = z,\ \varphi_2^0(x, z) = x^2 - z^2,\ \varphi_2^1(x, z) = xz,\\ \varphi_3^0(x, z) = x^3 - 3xz^2,\ \varphi_3^1(x, z) = x^2z - z^3/3,\ \varphi_4^0(x, z) = x^4 - 6x^2z^2 + z^4,\\ \varphi_4^1(x, z) = x^3z - xz^3,\ \varphi_5^0(x, z) = x^5 - 10x^3z^2 + 5xz^4,\ \varphi_5^1(x, z) = x^4z - 2x^2z^3 + z^5/5,\end{cases} \tag{B2}$$

[参 考 文 献]

[1] Sosa H A, Castro M A. On concentrated load at boundary of a piezoelectric half_plane[J]. J Mech Phys Solids, 1994, **42**(7): 1105—1122.

[2] 林启荣, 刘正兴, 金占礼. 均布载荷作用下的两端简支压电梁的解析解[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 617—624.

[3] 杨德庆, 刘正兴. 自由端受集中力作用下压电悬臂梁弯曲问题解析解[J]. 力学季刊, 2003, **24**(3): 327—333.

[4] 朱纯章. 悬臂压电梁自由端受集中力的解析解[J]. 南京工程学院学报, 2001, **1**(1): 12—15.

[5] 柳拥军, 杨德庆. 均匀分布荷载作用下压电悬臂梁弯曲问题解析解[J]. 固体力学学报, 2002, **23**(3): 366—371.

[6] 黄彬彬, 石志飞. 梯度功能压电悬臂梁的几个解析解[J]. 复合材料学报, 2002, **19**(4): 106—113.

[7] 张琳楠, 石志飞. 简支梯度压电梁的解析解[J]. 北方交通大学学报, 2002, **26**(1): 71—76.

[8] Wang Q, Quek S T, Sun C T. et al. Analysis of piezoelectric coupled circular plate[J]. Smart Materials and Structures, 2001, **10**(2): 229—239.

[9] 丁皓江, 王国庆, 梁剑. 压电介质平面问题的一般解和基本解[J]. 力学学报, 1996, **28**(4): 441—448.

[10] 丁皓江, 王国庆, 陈伟球. 用"调和函数"表示的压电介质平面问题的通解[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(8): 703—710.

[11] DING Hao_jiang, WANG Guo_qing, CHEN Wei_qiu. Green's functions for a two_phase infinite piezoelectric plane[J]. Proceedings of the Royal Society of London (A), 1997, **453**: 2241—2257.

Polynomial Solutions to Piezoelectric Beams(Ⅰ)——Several Exact Solutions

DING Hao_jiang[1], JIANG Ai_min[2]

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P.R. China;

2. West Branch of Zhejiang University of Technology, Quzhou, Zhejiang 324000, P.R. China)

Abstract: For the orthotropic piezoelectric plane problem, a series of piezoelectric beams is solved and the corresponding exact solutions are obtained with the trial_and_error method on the basis of the general solution in the case of three distinct eigenvalues, in which all displacements, electrical potential, stresses and electrical displacements are expressed by three displacement functions in terms of harmonic polynomials. These problems are rectangular beams having rigid body displacements and identical electrical potential, rectangular beams under uniform tension and electric displacement as well as pure shearing and pure bending, beams of two free ends subjected to uniform electrical potential on the upper and lower surfaces.

Key words: piezoelectric beam; plane problem; harmonic polynomial; exact solution