

文章编号: 1000_0887(2005) 08_1003_06

非对称开采时矿柱失稳的尖点突变模型*

李江腾^{1,2}, 曹平¹

(1. 中南大学 资源与安全工程学院, 长沙 410083;
2. 湖南工业大学 土木工程系, 株洲 412008)

(谢和平推荐)

摘要: 针对非对称开采时矿柱稳定性问题建立了一个简化的力学模型。基于势能原理, 应用尖点突变理论对矿柱成为非稳定系统进行了探讨, 导出了失稳的充要条件、矿柱变形突跳量和能量释放表达式, 为定量研究其失稳问题奠定了基础。结果表明: 系统的失稳不仅与其所承载荷有关, 而且与其内部刚度分配有关, 当相对刚度值越大, 所承受的临界载荷也越大, 越不容易失稳。反之, 越容易失稳, 且失稳时所释放的能量越大, 危害也越大。给出了算例, 其计算结果可为安排开采顺序、合理布置采场等提供依据。

关键词: 矿柱; 稳定性; 势能; 尖点突变; 非对称开采

中图分类号: O343.3; TD324.1 **文献标识码:** A

引 言

由于受地质条件的限制, 对称开采有时难以实现, 且随着开采深度的加深和开采面积的扩大, 采空区的稳定性问题显得愈来愈重要, 直接关系到矿山的安全生产和深部矿体的开挖规划, 而对采空区起支撑作用的矿柱结构的稳定性问题更是首当其冲。

目前, 对矿柱的稳定性分析已从单纯的强度理论, 向围岩组成的力学平衡系统的失稳研究方向发展。秦四清^[1]、徐曾和等人^[2,3]应用突变理论研究了对称开采时煤柱_顶板模型的失稳及其延迟效应。李宏等人^[4]用计算机符号运算研究了非对称开采时矿柱_顶板模型的理论解。本文应用尖点突变理论探讨了在非对称开采条件下矿柱的稳定性问题。

1 简化的力学模型及本构关系

1.1 力学模型

q_0 (上覆岩重+顶梁自重)通过顶梁传递给矿柱, 由于矿柱相对狭窄, 其纵向变形远大于顶底板的压缩量, 可以认为: 在 q_0 作用下, 顶板_矿柱_底板系统的纵向变形仅仅由矿柱的变形所决定^[5], 故在矿柱中心处可简化为弹性支撑。而在顶梁两端, 可以认为无角位移及线位移, 从而简化为固支约束。因此, 顶板_矿柱_底板系统的力学模型可简化为图 1。图中 l_1 、 l_2

* 收稿日期: 2004_04_08; 修订日期: 2005_03_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50274074)

作者简介: 李江腾(1964—), 女, 湖南人, 副教授, 博士研究生(联系人, Tel/Fax: + 86_731_8879612; E_mail: L_jt@21.cn.com)。

分别为矿柱两侧采空区跨度。

梁边界条件为:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \quad y(l_1 + l_2) = 0, \quad y(l_1) = u, \\ y'(0) &= 0, \quad y'(l_1 + l_2) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

由(1)式可设梁的挠曲线方程为:

$$y = \frac{u}{1 - \cos[2\pi l_1 / (l_1 + l_2)]} \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{l_1 + l_2} \right], \quad (2)$$

式中, u 为矿柱压缩量。

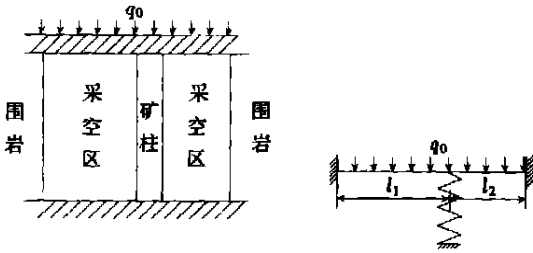


图1 简化的力学模型

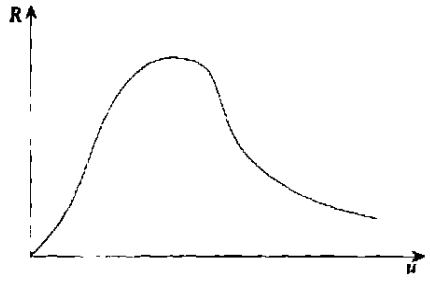


图2 岩石的载荷-变形关系

1.2 矿柱的本构关系

岩石是一种天然材料,由于生成条件、矿物成分、胶结材料的不同,存在许多初始缺陷,这些初始缺陷在外力作用下进一步发展,使材料性能不断劣化,在建立本构关系时考虑这一因素。参照文献[1]、[2]、[6],矿柱的非线性本构关系为:

$$\sigma = E\varepsilon \left[1 - \int_0^\varepsilon \phi(t) dt \right], \quad (3)$$

式中, E 为初始弹性模量, $\int_0^\varepsilon \phi(t) dt$ 为损伤参量,与材料中缺陷的分布密度有关,当岩石中的缺陷为泊松分布时,此式为

$$\sigma = E\varepsilon e^{-\varepsilon/\varepsilon_0}. \quad (4)$$

对截面为 A , 高为 H 的矿柱, (4) 式可表示为载荷 R 与变形 u 的关系(见图2):

$$R = \lambda u e^{-u/u_0}, \quad (5)$$

式中, $\lambda = EA/H$ 为矿柱的初始刚度, u_0 为峰值载荷对应的变形值。

2 矿柱失稳的尖点突变分析

2.1 尖点突变理论

在尖点突变理论中^[7-9],势函数的标准形式为

$$\Pi(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}px^2 + qx, \quad (6)$$

其中 x 为状态变量, p, q 为控制变量。

当势函数 $\Pi(x)$ 一阶导数为零时,即

$$\dot{\Pi}(x) = x^3 + px + q = 0 \quad (7)$$

为系统平衡方程,如图3(a)所示,这是一个具有光滑折痕的曲面,其上一点代表所研究系统的

一种平衡状态。对势函数求二阶导数有

$$\Pi''(x) = 3x^2 + p \quad (8)$$

在图 3(a) 曲面上叶和下叶上, 满足 $\Pi''(x) > 0$, 即系统势能取极小值, 则平衡状态是稳定的; 在曲面的中叶上 $\Pi''(x) < 0$, 即系统势能取极大值, 则平衡状态是非稳定的。在曲面上叶和下叶与中叶的交界即光滑折痕 OA 、 OB 上, $\Pi''(x) = 0$, 即为临界状态, 其上满足分叉集方程 (见 3(b))

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \quad (9)$$

当系统状态处于下叶时, 平衡是稳定的, 随着外界的进一步作用, 系统平衡点移到折痕上, 此时, 达到临界平衡状态。在微小扰动下由折痕移到中叶上, 而中叶是非稳定状态, 无法存在, 必然跳到对应的上叶, 从而引起该系统失稳, 如图 3(c)。

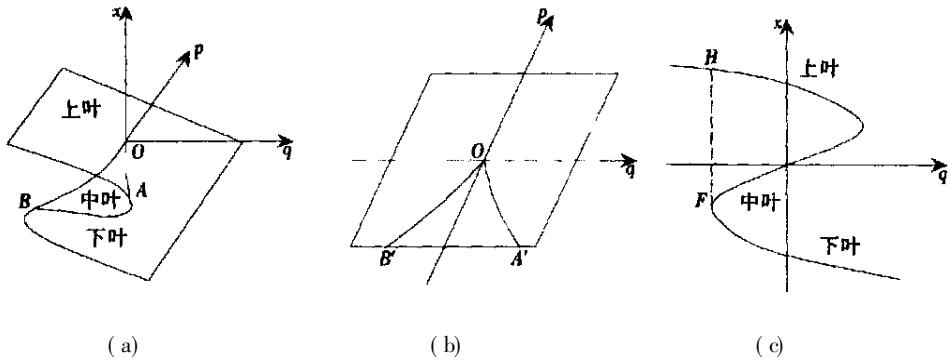


图 3 尖点突变模型

2.2 系统的势函数

由顶板和矿柱构成的力学系统, 其总势能为^[10]:

$$\Pi = -W_L + U_E + U_S \quad (10)$$

式中, $W_L = \int_0^{l_1+l_2} q_0 y dx$ 为外力对系统所做的功, U_E 为系统应变能, U_S 为耗散能。

$$U_E + U_S = \frac{1}{2} \int_0^{l_1+l_2} E_b I (y'')^2 dx + \int_0^u \lambda u e^{-u/u_0} du$$

将(2)式代入, 可得系统的总势能为:

$$\Pi = -q_0 \frac{u}{1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}]} (l_1 + l_2) + \frac{4\pi^4 u^2 E_b I}{(l_1 + l_2)^3 (1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}])^2} + \int_0^u \lambda u e^{-u/u_0} du \quad (11)$$

2.3 尖点突变分析

取矿柱的压缩量 u 为状态变量, 按尖点突变理论, $\Pi' = 0$ 得平衡曲面 M 。

$$\Pi' = -q_0 \frac{(l_1 + l_2)}{1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}]} + \frac{8\pi^4 E_b I u}{(l_1 + l_2)^3 (1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}])^2} + \lambda u e^{u/u_0} \quad (12)$$

$\Pi'' = 0$ 可得尖点为: $u = u_1 = 2u_0$ 。

为将(12)式写成标准形式, 将其在尖点处进行 Taylor 级数展开, 并截取至三次项,

$$-q_0 \frac{(l_1 + l_2)}{1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}]} + \frac{8\pi^4 E_b I u_1}{(l_1 + l_2)^3 (1 - \cos[2\pi l \sqrt{(l_1 + l_2)}])^2} +$$

$$\begin{aligned} & \lambda u_1 e^{-u_1/u_0} + \left[\frac{8\pi^4 E_b I}{(l_1 + l_2)^3 (1 - \cos[2\pi l_1 / (l_1 + l_2)])^2} + \right. \\ & \left. \lambda \left[1 - \frac{u_1}{u_0} \right] e^{-u_1/u_0} (u - u_1) + \frac{\lambda}{u_0} \left[\frac{u_1}{u_0} - 2 \right] e^{-u_1/u_0} (u - u_1)^2 + \right. \\ & \left. \frac{\lambda}{6u_0^2} \left[3 - \frac{u_1}{u_0} \right] e^{-u_1/u_0} (u - u_1)^3 = 0 \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{令 } x = \frac{u - u_1}{u_1}, \quad (14)$$

上式可化为标准形式:

$$x^3 + px + q = 0,$$

其中

$$p = \frac{3}{2}(k_f - 1), \quad (15)$$

$$q = \frac{3}{2}(1 + k_f - \xi), \quad (16)$$

$$k_f = \frac{8\pi^4 E_b I}{(l_1 + l_2)^3 (1 - \cos[2\pi l_1 / (l_1 + l_2)])^2} \frac{1}{\lambda e^{-2}}, \quad (17)$$

$$\xi = \frac{q_0(l_1 + l_2)}{\lambda e^{-2} (1 - \cos[2\pi l_1 / (l_1 + l_2)]) u_1}. \quad (18)$$

由尖点突变理论可知:当控制变量 p 、 q 满足分叉集方程时,系统才会发生失稳,分叉集方程是系统发生失稳的充要条件。如图3可知,在分叉集右侧($q > 0$), x 不产生突跳,而在分叉集左侧($q < 0$), x 才产生突跳,这时对应的是不稳定状态。故该力学系统发生失稳的充要条件为

$$\begin{cases} 2(k_f - 1)^3 + 9(1 + k_f - \xi)^2 = 0, \\ (1 + k_f - \xi) < 0. \end{cases} \quad (19)$$

2.4 失稳过程中的能量释放

通过计算 F 、 H 点(见图3(c))的势能差,可粗略估计失稳过程中的能量释放量。

当 $p < 0$,且在(9)式成立时,由(7)式和(15)式可得

$$x_1 = x_2 = - \left[-\frac{p}{3} \right]^{1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - k_f)^{1/2}, \quad (20)$$

$$x_3 = 2 \left[-\frac{p}{3} \right]^{1/2} = \sqrt{2}(1 - k_f)^{1/2}. \quad (21)$$

跨越分歧点集时状态变量产生突跳,其突跳量为:

$$\Delta x = x_3 - x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - k_f)^{1/2}, \quad (22)$$

相应矿柱的突然压缩量为:

$$\Delta u = u_1 \Delta x = 3\sqrt{2}u_0(1 - k_f)^{1/2}. \quad (23)$$

将(11)式在尖点处按 Taylor 级数展开,截取到4次项,并引入(14)~(17)式得:

$$\Pi(x) = \frac{2}{3} \lambda e^{-2} u_0^2 (x^4 + 2px^2 + 4qx + c), \quad (24)$$

$$\text{式中 } c = \frac{3}{2}(e^2 - 3 - k_f + 2\xi). \quad (25)$$

将(20)、(21)式代入并利用(9)式得能量释放量为:

$$\Delta \Pi = \Pi(x_3) - \Pi(x_1) = \frac{1}{2} \lambda e^{-2} u_0^2 (1 - k_f)^2 \quad (26)$$

3 分析与讨论

1) 从(19)式可知,当 $k_f - 1 \leq 0$ 时,系统可能跨越分叉集发生突变,成为系统失稳的必要条件。

2) 由以上分析可知,当顶板的抗弯刚度越大,即 k_f 值越大, ξ 也越大,所承受的临界载荷也越大,越不容易失稳。反之,当顶板的抗弯刚度越小,越容易失稳,且失稳时所释放的能量越大,危害也越大。

3) 本文是在假设顶板不发生破坏的情况下进行讨论的,由(14)~(18)式可知,在 $l_1 + l_2$ 不变时,矿柱在对称开挖时更容易发生失稳,且释放的能量最大。

4 算 例

应用本文方法对两个工程进行验算,实测岩石材料数据如表1,按照前面所述,对其进行了失稳分析,计算结果见表2。此外,将非对称估算结果与对称估算结果进行了比较,见表3。

表1 材料参数表

工程编号	E_f/GPa	顶板宽度		顶板高度		E/GPa	H/m	A/m^2	上覆岩层密度		开挖深度	
		a/m	b/m	a/m	b/m				$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	h/m	l_1/m	l_2/m
1	25.2	20	10	36.8	100	10×10	3 000	550	18	12		
2	7.80	14	3	62.0	50	6×6	2 500	290	12	10		

表2 计算结果

工程编号	是否失稳	x_1	x_2	$\Delta u/\text{m}$	$\Delta \Pi/\text{J}$
1*	否	/	/	/	/
2	是	-0.295	0.885	0.10	3.89×10^5

表3 2号工程非对称与对称开采比较

$\Delta u/\text{m}$		$\Delta \Pi/\text{J}$	
非对称	对称	非对称	对称
0.10	0.11	3.89×10^5	4.99×10^5

* 经计算1号工程不发生失稳,故无计算结果

从表3可以看出:非对称开采时所释放的能量及突跳量均比对称开采时的相应值小,与前面的分析结果相一致。

5 结 论

1) 突变理论是分析失稳现象的有效手段,本文用该方法研究了单个矿柱两侧工作面推进度不一致时的稳定性问题,导出了其失稳的充要力学条件判据、矿柱变形突跳量和能量释放量的表达式,为定量研究其失稳问题奠定了基础。

2) 系统失稳是多种因素相互作用的综合结果,除了和岩石性质有关外,还和结构的尺寸、外加载荷有关。

3) 用突变理论分析的结果和其它的失稳分析相协调,和实际经验相一致,但突变理论可借用数学工具得出较普遍的推论。

4) 用突变理论分析的结果可为安排开采顺序、合理布置采场等提供依据。

致谢 感谢中南大学博士生创新工程基金的资助(030608)。

[参 考 文 献]

- [1] 秦四清,何怀锋. 狭窄煤柱冲击地压的突变理论分析[J]. 水文地质与工程地质, 1995, **18**(5): 17—20.
- [2] 徐曾和,徐小荷,唐春安. 坚硬顶板下煤柱岩爆的尖点突变理论分析[J]. 煤炭学报, 1995, **20**(5): 485—491.
- [3] 徐曾和,徐小荷. 柱式开采岩爆发生条件与时间效应的尖点突变[J]. 中国有色金属学报, 1997, **7**(2): 17—23.
- [4] 李宏,徐曾和,徐小荷,等. 非对称开采时矿柱岩爆的准则与前兆[J]. 中国矿业, 1997, **6**(1): 46—51.
- [5] 杰里米克 M L. 岩体力学在硬岩开采中的应用[M]. 赵玉学 译. 北京: 冶金工业出版社, 1990.
- [6] 唐春安. 岩石破裂过程中的尖点灾变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1990, **9**(2): 100—107.
- [7] Saunders P T. 突变理论入门[M]. 凌复华 译. 上海: 上海科学技术和文献出版社, 1983.
- [8] Qin S, Jiao J J, Wang S. A cusp catastrophe model of instability of slip buckling slope[J]. International Rock Mechanics and Rock Engineering, 2001, **34**(2): 119—134.
- [9] 潘一山,章梦涛,李国臻. 洞室岩爆的尖角型突变模型[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(10): 893—900.
- [10] 陈 . 地壳岩石的力学性能——理论基础与实验方法[M]. 北京: 地震出版社, 1988.

Cusp Catastrophe Model of Instability of Pillar in Asymmetric Mining

LI Jiang_teng^{1,2}, CAO Ping¹

(1. School of Resources and Safety Engineering, Central South University,
Changsha 410083, P. R. China;

2. Civil Engineering Department, Hunan Polytechnic University,
Zhu zhou, Hunan 412008, P. R. China)

Abstract: A simplified mechanical model of pillar_hang wall was established in asymmetric mining and instability of the system was discussed by means of potential energy principle and cusp catastrophe theory. The necessary_sufficient condition and the jump value of displacement of pillar and the released energy expressions were derived, which established foundation for quantifying of the instability of system. The results show that instability of the system is related to load and its stiffness distribution. The critical load increases with the increasing relative stiffness, and the system is more stable. On the contrary, the instability of system is likely to occur, and the released energy is larger in instability process, and the harm is more tremendous accordingly. Furthermore, an example was calculated, and the estimated results correspond to practical experience, which provide basis for mining order and arranging stope.

Key words: pillar; stability; potential energy; cusp catastrophe; asymmetric mining